

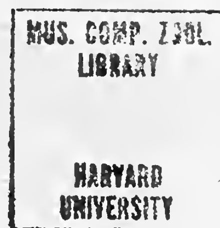
ANALES

DE LA

SOCIEDAD CIENTIFICA ARGENTINA

ADOPTADOS PARA SUS PUBLICACIONES POR LA

ACADEMIA NACIONAL DE CIENCIAS EXACTAS, FISICAS Y NATURALES



DIRECTOR: EMILIO REBUELTO

ENERO 1939 — ENTREGA I — TOMO CXXVII

SUMARIO

BUENOS AIRES
CALLE SANTA FE 1145
1939

SOCIEDAD CIENTIFICA ARGENTINA

SOCIOS HONORARIOS

CONSEJO CIENTIFICO

JUNTA DIRECTIVA

(1938-1939)

ADVERTENCIA. — Los colaboradores de los Anales son personalmente responsables de la tesis sustentada en sus escrito. Tienen derecho a la corrección de do pruebas. Los que deseen tirada aparte de 50 ejemplares de sus artículos, deben solicitarla por escrito. Los manuscritos, correspondencia, etc. se enviarán a la sede social, **Santa Fe 1145.**

Impreso en los Talleres Gráficos "TOMAS PALUMBO" - La Madrid 321-325 - Buenos Aires

ANALES

DE LA

SOCIEDAD CIENTIFICA

ARGENTINA

ADOPTADOS PARA SUS PUBLICACIONES POR LA

ACADEMIA NACIONAL DE CIENCIAS EXACTAS, FISICAS Y NATURALES

DIRECTOR: EMILIO REBUELTO

ENERO 1939 — ENTREGA I — TOMO CXXVII

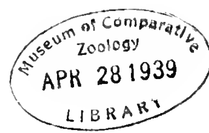
BUENOS AIRES

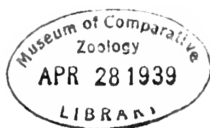
CALLE SANTA FÉ 1145

—

1939

7091





SECCIÓN OFICIAL

DE LA

SOCIEDAD CIENTÍFICA ARGENTINA

SECCIÓN "SANTA FÉ"

Ciclo de conferencias

EL SUBSUELO DE ROSARIO

CONFERENCIA DEL DR. ALFREDO CASTELLANOS

Prosiguiendo con el ciclo de conferencias organizado por la Sección « Santa Fé » de la Sociedad Científica Argentina, para el presente año (1938) se realizaron durante el mes de Octubre dos conferencias a cargo de los Dres. Alfredo Castellanos y Ricardo A. Gaibrois, respectivamente. Ambas conferencias se llevaron a cabo en el local de la Facultad de Química Industrial y Agrícola y contaron con el auspicio del Instituto Social de la Universidad Nacional del Litoral.

La primera de ellas, que tuvo lugar el 8 de Octubre a las 18.30 y que estuvo a cargo del Dr. Alfredo Castellanos, profesor de la Facultad de Ciencias Matemáticas de Rosario, y Director del Instituto de Fisiografía y Geología de esa Facultad, versó sobre el tema: « El subsuelo de Rosario », y fué ilustrada con numerosas proyecciones luminosas.

Dada la extensión de esta conferencia y como ella es sólo una síntesis del curso que con el mismo nombre dictara el autor en el Instituto de Fisiografía y Geología de Rosario, desde mayo a agosto del corriente año, y que se publicará en su oportunidad, solamente nos ha remitido una revisión general de todos los estratos que han sido alcanzados por diferentes perforaciones practicadas por empresas y establecimientos, dentro del perímetro de la ciudad.

Haremos una rápida crónica del desarrollo de su conferencia para completarla luego con la descripción de los diversos estratos del subsuelo de Rosario, que nos remitió el autor.

Para estudiar la colocación y distribución de los distintos sedimentos alcanzados por las perforaciones más profundas, el conferencista inició su disertación realizando una exposición sobre la génesis de la morfología del zócalo cristalino y de la constitución del subsuelo de la pampa y su relación con el plegamiento de las sierras pampeanas. Se ocupó de los movimientos tectónicos y fracturamiento del zócalo cristalino y del subsuelo de la pampa; de la destrucción de las sierras pampeanas y rellenamiento de la planicie del Este, para concluir con la formación de los trozos de la llanura pampeana y del bloque mesopotámico, limitados éstos por una serie de fallas longitudinales que son las siguientes de oeste a este:

1ª - San Francisco del Chañar o Rayo Cortado, Sampacho, Del Campillo, Cañada Verde. Cambia de rumbo hacia el sud-este por Villa Sauze y Tandil.

2ª - Alhuampa, Añatuya, Capilla de los Remedios, Hernando, Alejandro, Laboulaye. Se dirige luego al S. E. por Gainza, Tapalquén, Parish, Rauch, Pirán.

3ª - Tostado, Selva, Borde de los Altos, San Francisco, Monte Maíz, Arias, Amenábar. Sigue la dirección E. S.E. por Chacabuco y Navarro.

4ª - Ríos Paraguay y Paraná, (Las Delicias, Santa Elena, La Paz) y margen derecha del Plata.

5ª - San Ignacio, río Uruguay y margen izquierda del Plata.

De esta manera queda la llanura del este de la sierra de Córdoba dividida de W. a E., en tres partes: *Pampa elevada, Pampa hundida* y *Pampa levantada*. La intermedia es un *Graben* y las otras dos son *Horst*. Los movimientos del bloque santafesino son en báscula, lo mismo que el que dió origen a la planicie mesopotámica.

En seguida se ocupó de los estratos de Paganzo y las areniscas de São Bento en la llanura pampeana y de la posible existencia del mar chaqueño de Bonarelli.

Describió el avance del océano Atlántico en la llanura pampeana constituyendo el mar entrerriano formado por cuatro ingresiones dispuestas alternativamente entre sedimentos terrestres: la primera corresponde a la parte de arcilla azul del *Paranense* inferior, separada por una arcilla marrón o parda, tal vez sincrónica al *Pal-*

mirense del Uruguay, de la segunda ingresión marina del *Paranense* superior constituída por arcilla plástica gris verdosa oscura con intercalaciones arenosas y coronada en la parte de Entre Ríos con un banco calcáreo marino.

La tercera ingresión marina correspondería al *Mesopotamiense* medio o *Mesopotamiense* marino. Los sedimentos de esta ingresión se componen de arcilla verdosa o gris verdosa. Para Castellanos el *Mesopotamiense* estaría formado por tres divisiones, superior, inferior e intermedia, esta última marina; todas serían sincrónicas a los depósitos denominados areniscas de Río Negro (*Ríonegrense*).

La cuarta ingresión, de menor extensión que las anteriores, sería el *Entrerriense* de las barrancas del Paraná que cerca de la ciudad de su nombre, es un banco calcáreo marino. Del lado santafesino lo forman arenas blancas amarillentas, fluviales, presentando en su cumbre intercalaciones medanosas, de dunas litorales de pequeña altura.

Estas cuatro ingresiones del mar entrerriano se caracterizan también por su extensión: la primera, la de la arcilla azul, ha sido la de mayor propagación extendiéndose en toda la llanura pampeana hasta el pie de las sierras del mismo nombre; la segunda es más reducida y más aún la tercera; la cuarta interesó más bien el bloque mesopotámico y parte S. W. del Uruguay. Estas ingresiones están en relación con los movimientos de ascenso y descenso de la llanura pampeana como repercusión de los movimientos tectónicos andinos en sus tres fases, subfases y etapas.

Retirado definitivamente el mar entrerriano, mucho tiempo después sobreviene otro pequeño descenso de la llanura que permite, en tiempos belgranenses, otra ingresión marina la que penetra por las bocas del Plata, asciende en forma de brazo estrecho por el Paraná dejando depósitos marinos y estuáricos en los alrededores de La Plata, Buenos Aires y sus alrededores, en San Pedro (Buenos Aires) y en el Rincón de Grondona (Santa Fé).

La última ingresión marina de carácter exclusivamente estuárico, de edad mucho más reciente, es la Querandina, se limita a las márgenes del río de la Plata y parte de la costa de la provincia de Buenos Aires, en la orilla oriental del río Uruguay desde Fray Bentos y en la margen del río Negro hasta cerca del Aº Cololó (Uruguay).

El Dr. Castellanos describió también las características climáticas que debieron presidir la deposición de los sedimentos que cons-

tituyen el suelo santafesino y la distribución de la red hidrográfica después del retiro del mar entrerriano y durante los tiempos pampeanos en relación con la actual. Hizo una descripción petrográfica de los sedimentos lacustres, fluviales y eólicos que componen, en general el subsuelo de Santa Fe. Completó su exposición ocupándose de la emisión de meláfiro y basalto de Serra Geral que se ha extendido en el bloque mesopotámico y que algunas perforaciones realizadas en la llanura pampeana encontraron en la zona del este.

« En la ciudad de Rosario y sus alrededores, desde hace bastante tiempo, ya para la construcción del puerto, o bien en busca de agua potable, o para el hincamiento de pilotes en distintas construcciones, se han realizado diversas perforaciones. Gran parte del material extraído ha sido seleccionado y se halla formando parte de las colecciones del Instituto de Fisiografía y Geología de la Facultad de Ciencias Matemáticas, etc., de Rosario, que dirijo.

« En agosto de 1936 se terminó una perforación en Fisherton, al oeste de la ciudad, en el Country Club, perteneciente al Jockey Club de Rosario. Aquélla alcanzó 263,80 m. Comparando la serie de sedimentos extraídos de esta perforación con otros obtenidos de las de la Cervecería Quilmes en Alberdi, de la fábrica de hielo « La Moderna », y de las practicadas en la zona portuaria, se tiene el siguiente perfil de abajo a arriba:

« En la perforación del Country Club, desde los 263,80 m. hasta los 211m.30, se ha descubierta una serie de capas de arena cuya edad podría ser equivalente a la de los depósitos denominados *Friasense*. Por la naturaleza y posición de los elementos petrográficos, creo que ellos no alcanzarían a la edad del *Santacrucense*. Estos depósitos de arena están distribuídos en la siguiente forma:

263m.80 — 239m.30 (24m.50 de espesor) es una arena limpia de grano mediano.
239m.30 - 230m.30 (9 metros de espesor) arena fina.
230m.30 - 218m.30 (12 metros de espesor) arena limpia de grano mediano.
218m.30 - 211m.30 (7 m. de espesor) arena cuarzosa muy fina.

« El espesor total de estos depósitos es de 52m.50 En la base se alcanzó la *quinta napa acuífera, es de agua salada* y asciende 258 m., es decir, hasta la primera napa.

« Desde los 136m.80 hasta los 211,30, en un espesor de 74m.50, se alcanzaron capas de arena y arcilla cuya edad podría corresponder a los depósitos denominados *Mayoense* que juntamente con el anterior *Friasense* constituirían la mayor parte de la Formación

Friaseana de Kraglievich, perteneciente, posiblemente, al mioceno medio.

« Los diferentes estratos comprendidos entre los 211m.30 hasta los 136m.80 son los siguientes:

211m.30 - 194m.30 (17 m. de espesor) arena arcillosa de color amarillo pardo.

194m.30 - 193m. (1m.30 de espesor) arenisca cuarcífera ferruginosa.

193m. - 184m. (9m. de espesor) arena con arcilla.

184m. - 181m. (3m. de espesor) arcilla blanca.

181m. - 172m. (9m. de espesor) arena fina estratificada.

172m. - 161m. (11m. de espesor) arcilla rosada.

161m. - 139m 80 (21m.20 de espesor) arena fina.

139m.80 - 136m.80 (3m. de espesor) arcilla y arena amarillo-pardas.

« A los 161 metros se encontró la *cuarta napa que es también de agua salada* y asciende 140m.

« 136m.80 - 126m.80 (10m. de espesor) depósitos de arcilla azul y grisácea correspondiente a la primera ingresión marina del mar entrerriano. Estos depósitos forman el *Paranense* inferior y están distribuidos de la siguiente manera:

136m.80 - 135m.80 (1m. de espesor) arcilla azul.

135m.80 - 129m.80 (6m.) arcilla grisácea.

129m.80 - 128m 80 (1m.) arcilla blanca.

128m.88 - 126m.80 (2m.) arcilla azul.

« Sucede después una serie de capas de arcilla con algunas intercalaciones lenticulares que posiblemente corresponde al *Palmirense* de Kraglievich del Uruguay, sincrónicos a su vez al *Chasicoense,* también de Kraglievich, de la Argentina. Esta serie comprende desde los 126m.80 a los 78m. es decir, con un espesor de 48m.80.

« Los diferentes estratos de este piso están distribuídos como sigue:

126m.80 - 119m.80 (7m.) arcilla parda.

119m.80 - 118m.80 (1m.) arcilla azul.

118m.80 - 118m 50 (0m.30) arena de grano mediano.

118m.50 - 92m.50 (26m.) arcilla rosada.

92m.50 - 92m. (0m.50) capa de tosca dura.

92m. - 78m 50 (13m.50) arcilla parda.

78m.50 - 78m. (0m.50) greda parda.

« Arriba de los 78 m. hasta los 53m.50 (24m.50) hay arcilla azul y grisácea que corresponde al *Paranense* superior, segunda ingresión marina. Lo forman dos capas:

78m. - 59m 50 (18m.50) arcilla grisácea.

59m.50 - 53m.50 (6 m.) arcilla azul.

« Los depósitos que se suceden hacia arriba pertenecen al *Mesopotamiense* que en la perforación del Country Club no es muy desarrollado, en cambio en la zona del Puerto se pueden distinguir, de acuerdo a las perforaciones practicadas, 3 capas: *Mesopotamiense* inferior, 12 metros de espesor, es arena de cuarzo de color blanco amarillento; *Mesopotamiense* medio, 11 metros de espesor, arena cuarzosa de color amarillo ocráceo, a veces el hidróxido de hierro forma un cemento de unión entre los granos y el sedimento, adquiriendo así los caracteres de una arenisca no muy coherente. Corresponde a depósitos de delta. El tercer piso, el *Mesopotamiense superior*, adquiere un espesor de 6 metros y es arena fina cuarzosa fluida. La perforación del Country llega hasta esta capa y se halla comprendida entre los 53m.50 hasta los 47m.50. En este lugar el perfil está coronado, hasta esta altura, por una capa de arcilla azul de 0m.50 de espesor, entre los 47m.50 y 47m., y encima se encuentra la *tercera napa de agua también salada* que asciende 14m.

« En el lado de Entre Ríos, en las barrancas del Paraná, una de las capas citadas es de origen marino (*Mesopotamiense* medio) y corresponde a la tercera ingresión.

« El *Mesopotamiense* del litoral argentino, por los caracteres faunísticos, petrográficos y estratigráficos, hace pensar sea sincrónico a la arenisca de Río Negro denominada *Ríonegrense*.

« La topografía que ofrece la tercera napa, su inclinación y su gran extensión hace pensar que ella procede de infiltraciones producidas en los conos de deyección de las sierras pampeanas y alimenta al río Paraná. Se encuentra un poco más abajo que la napa semisurgente de agua dulce de la provincia de Buenos Aires que corre por las arenas puelchenses (1).

« En la zona de Santa Fé la tercera napa recibe por capilaridad las sales disueltas de los depósitos dejados por la ingresión marina más próxima.

« En la perforación del Country Club se descubrieron 25 metros de arena fina cuareífera, entre los 47m. y 22m. que corresponde, la parte inferior al *Entrerriense* y la superior al *Puelchense*.

« En la perforación de la Cervecería Quilmes el *Entrerriense* (51 a 35m.) tiene un espesor de 16 m. de arena cuarzosa limpia, blanca amarillenta, con concreciones de bióxido de mangane-

(1) IVANISSEVICH LUDOVICO, « Observaciones sobre el primer trabajo presentado a la División Técnica de Ingeniería Sanitaria », *La Ingeniería*, año XL, nº 4, núms. 738, pág. 257. Buenos Aires, abril de 1936.

so y óxido de hierro y el *Puelchense* (35 a 32m.) por arenas cuarcíferas de grano mediano y grueso de color blanco amarillento y rodados de calcedonia, etc. (espesor 3m.).

« Encima de estos depósitos, a partir de la perforación de La Moderna, hacia el oeste, se han encontrado dos estratos que podrían corresponder al *Preensenadense* (32 a 29m. = 3m. espesor, perfor. Cervec. Quilmes) caracterizado por un limo estratificado ferruginoso y al *Ensenadense* basal (29 a 24,50m. = 4,50m., perfor. Cervec. Quilmes) por un limo muy arcilloso, endurecido y compacto, de color amarillo rojizo con pequeñas concreciones ferruginosas. Estos estratos no se observan en la zona portuaria; el *Ensenadense* basal, involucrando en él el *Preensenadense,* ha sido fuertemente erosionado, habiendo desaparecido en la parte próxima a las márgenes del río. Sobre esta cuenca de erosión se ha depositado una serie de estratos que no se extienden hacia el oeste, puesto que la perforación del Country no los alcanzó.

« El *Inter-ensenadense* (24m.50 - 17m.50 = 7m. de espesor. perfor. Cervecería Quilmes) estaría formado principalmente por cuatro estratos:

« 1º - El más superior es arena gruesa (17m.50 - 18m., 1m.50 de espesor, perfor. Cervecería Quilmes), greda amarillo-verdosa ferruginosa (0m.70 perfor. 60, galpón nº 27, F. C. C. A.), arena amarilla oscura con nódulos calcáreos (perfor. nº 27, Refinería Argentina), etc. Al pie de las barrancas del río Paraná este estrato es un limo muy arcilloso, amarillo pardo con manchones verdes, o bien arcilla verde aceituna con concreciones calcáreas.

« 2º - Es arena cuarcífera amarillenta o verde amarillenta con concreciones y manchas de hidróxido de hierro (18 - 21m., 3m. de espesor, perfor. Cervecería Quilmes), arena semejante a la anterior en la perfor. nº 60 (galpón nº 27, F. C. C. A.), arena amarilla oscura (perfor. nº 44, galpón nº 26, F. C. C. A. y en la nº 27 de la Refinería Argentina). En las márgenes del río, al N. de la ciudad de Rosario, es un limo arcilloso amarillo-verdoso. Este estrato es el portador de la 2ª *napa de agua que es dulce*, procede de la infiltración del río. Esta napa se encuentra entre los 17 a 21 metros de profundidad, medida tomada desde la parte alta de la barranca, es semisurgente y asciende 7m. No ha sido encontrada en la perforación del Country Club en Fisherton. Es también la que proporciona agua dulce a los pozos semisurgentes de la ciudad y su nivel piezométrico desciende mucho con las bajantes del río.

« 3º - Es arenisca cuarcífera, ferruginosa, estratificada, amarilla parda (21m. a 21m.16, perfor. Cervecería Quilmes), arcilla gris verdosa con manchones de hidróxido de hierro (perfor. de La Moderna), marga verdosa con hidróxido de hierro (perfor. nº 60, galpón nº 27, F.C.C.A.), etc. y en las márgenes del río es una arcilla verde aceituna con manchones y concreciones de hidróxido de hierro.

« 4º - Es arena cuarcífera, ligeramente amarillenta (perfor. Cervecería Quilmes), arena amarillenta de grano fino (perfors. nº 60,44 y 27). En la margen del río es un limo amarillo pardo algo verdoso, otras veces domina este último color.

« Los horizontes que siguen en orden ascendente y que pertenecen a la Formación Pampeana afloran en las barrancas de las márgenes del río Paraná, constituídos en la siguiente forma: el piso más inferior, *Ensenadense* cuspidal, tiene un espesor que oscila entre los 2 y 3 metros, en algunos lugares de la costa se reduce a 1m. y en otros se oculta completamente. Es limo más bien que *loess*, de color amarillo pardo muy compacto con concreciones calcáreas en forma de nódulos grandes de tosca dura y dendritas de bióxido de manganeso.

« Los restos fósiles de este horizonte son escasos, solo se han podido extraer algunos de *Arctotherium latidens* Bravard (Punta Alvear), fragmentos de coraza de *Sclerocalyptus ornatus* (Owen) Amegh. y una rama mandibular de *Chlamytherium sp.* tal vez *typum*, cráneo y otros restos de *Palaeolama* en las barrancas del Paraná (La Florida). En un pozo practicado bajo la dirección de las Obras de Salubridad, en 1921, en la calle Catamarca de la ciudad de Rosario, se extrajo del mismo piso una coraza de *Sclerocalyptus ornatus*. Carlos Ameghino encontró también en este horizonte, pero en Arroyo Frías, *Typotherium cristatum, Ctenomys, Myocastor* y *Canis*. A esta lista debemos agregar los de Alvear mencionados por Burckhardt, determinados por Roth, que son los siguientes: *Palaeolama Weddelli* P. Gervais? (metacarpo) — *Morenelaphus brachyceros* (H. Gervais y Amegh.) Carette? (maxilar) — *Daedicurus clavicaudatus* (Owen) Burm? (placas y metatarso) y *Glyptodon* sp. (placas de coraza). Estos restos tal vez pertenezcan al estrato sobrepuesto.

« Con este horizonte termina el pampeano inferior, constituído por el *Ensenadense* con sus divisiones: basal, (comprendiendo *Preensenadense*), *Interensenadense y Ensenadense* cuspidal. Asentando

sobre este último existe el pampeano medio o *Belgranense* muy desarrollado en las barrancas del río Paraná; en la perforación del Country Club solo se propaga la parte media de este horizonte, faltan, por consiguiente, las capas de marga y arcilla verde superior e inferior.

« En las barrancas del Paraná el *Belgranense* consta, como se ha dicho, de tres estratos: el más inferior tiene 1 a 2m. de espesor y es marga verdosa con tosca; el medio 2 a 4m. es fango rojizo claro, arcilloso, que se rompe en poliedros estando sus caras recubiertas por delgadísima capa de vivianita y bióxido de manganeso; la tosca es muy abundante, se presenta en tabiques, estratos, planchas, nódulos o formas arborescentes. El más superior está constituído por arcilla verde con concreciones calcáreas, de 1 a 2m. de espesor, aproximadamente. Sobre esta capa de arcilla o marga corre la primera napa de agua dulce, que desaparece antes de llegar a las barrancas del río y se extiende a la parte oeste de la ciudad. Generalmente se encuentra entre los 6 a 15m. de profundidad, siendo lo más frecuente 7m., procede de infiltración vertical de aguas pluviales y debajo de las depresiones superficiales del terreno posee mayor espesor. Provee de agua a los pozos de balde de los alrededores de la ciudad.

« El *Belgranense* presenta en el Rincón de Grondona, sobre las barrancas de las márgenes del Paraná, un depósito de agua salobre en el que predomina la *Corbula mactroides* [1]. Los fósiles de mamíferos, en este horizonte, son también escasos solo se han encontrado restos de *Cuvieronius platensis* (Amegh.) Osborn [2],

(1) ROTH SANTIAGO, « Investigaciones en la llanura pampeana ». *Revista del Museo de La Plata*, t. XXV, pág. 283, lám. XVII. Buenos Aires, 1920.

CASTELLANOS ALFREDO, « Breve reseña sobre estratigrafía pampeana de Santa Fé ». *Sus amigos a Lucas Kraglievich. In Memoriam*. pág. 31-32. Buenos Aires, 1936.

CASTELLANOS ALFREDO, « Los sedimentos del Pampeano inferior y del Araucano en el Valle de Los Reartes ». *Publicación nº 6 de la Serie Técnico - Científica de la Facultad de Ciencias Matemáticas, Físico-Químicas*, etc., pág. 44, nota 172. Rosario, 1936.

RUSCONI CARLOS, « Contribución al conocimiento de la geología de la ciudad de Buenos Aires y sus alrededores y referencia de su fauna ». *Actas de la Academia Nacional de Ciencias de Córdoba*, t. X, entrs. 3ª y 4ª, págs. 324 y 332. Buenos Aires, 1937.

(2) OSBORN HENRY FAIRFIELD, « *Proboscidea*. A. Monograph of Discovery, Evolution, Migration and Extinction of the Mastodonts and Elephants of the World ». Vol. I, págs. 579-580, New York, 1936.

mandíbula e incisivos y otros restos (Puerto Borghi), porciones de coraza de *Glyptodon reticulatus* Owen, (Punta Alvear); *Toxodon, Cuvieronius, Glyptodon elongatus, Lomaphorus, Chlamytherium, Lestodon, Sclerocalyptus* en las barrancas de San Lorenzo; *Palaeolama y Paraceros* (Juan Ortiz). *Panochthus* (Puerto Borghi), *Smilodon*, (Embarcadero de Grondona) todos en las barrancas del Paraná.

« El pampeano superior que asienta sobre el *Belgranense* es el *Bonaerense* y también comprende tres capas: la inferior, de 3m. de espesor, es más o menos un *loess* amarillo pardo con pequeños nódulos de tosca; la media son más bien lentejas o manchones de arcilla verde que tienen aproximadamente un metro de espesor y cuya presencia no es continua ni frecuente. El estrato superior generalmente asienta sobre el inferior. Al *Bonaerense* superior lo forma una capa de 3 a 4m. de espesor de arcilla rojiza con numerosa tosca arborescente; otras veces es un limo muy arcilloso.

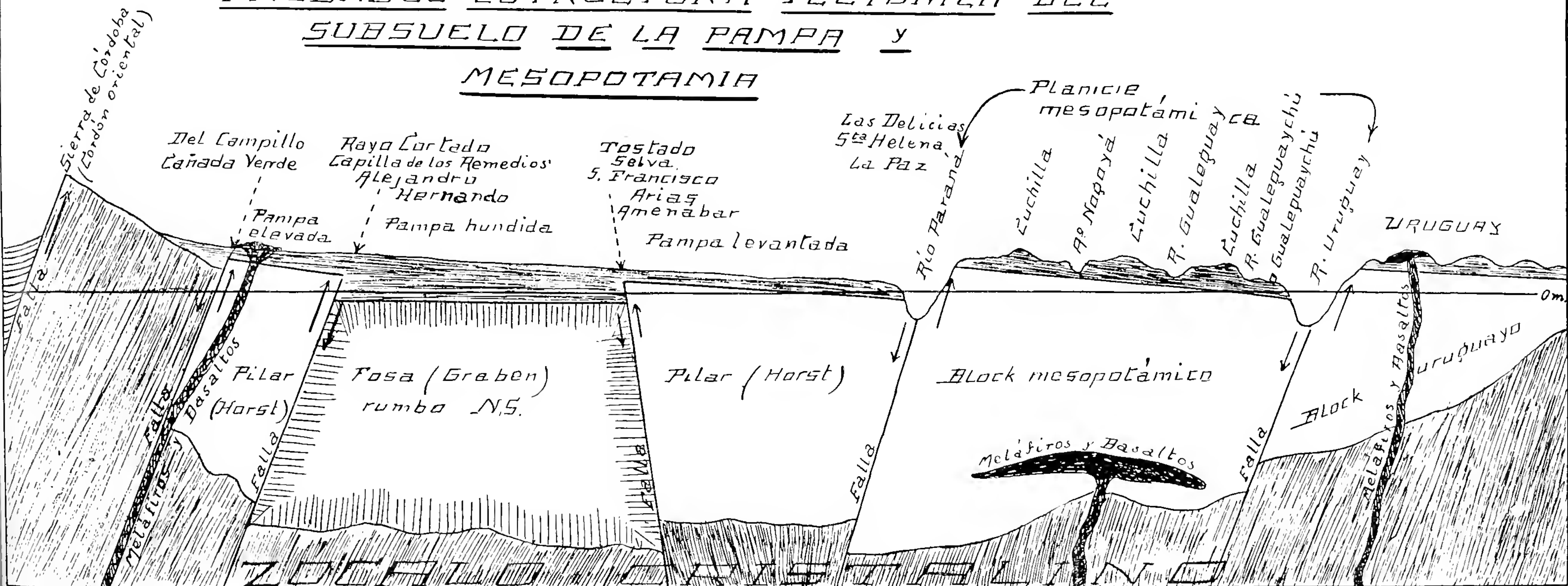
« En algunas partes de las márgenes del Paraná, en los alrededores de Rosario, especialmente en las barrancas interiores producidas por la erosión pluvial, se observa la superficie más alta del *Bonaerense*, erosionada en pequeñas cuencas lacustres de un metro de espesor y rellenadas con sedimentos de arcilla verdosa equivalente al *Lujanense* de Ameghino que no es más que una facies lacustre del *Bonaerense* superior.

« Con estos sedimentos termina la Formación Pampeana que aflora en su gran mayoría en las barrancas del río y de la que únicamente no puede observarse la parte más inferior del *Interensenadense* y el *Ensenadense* basal.

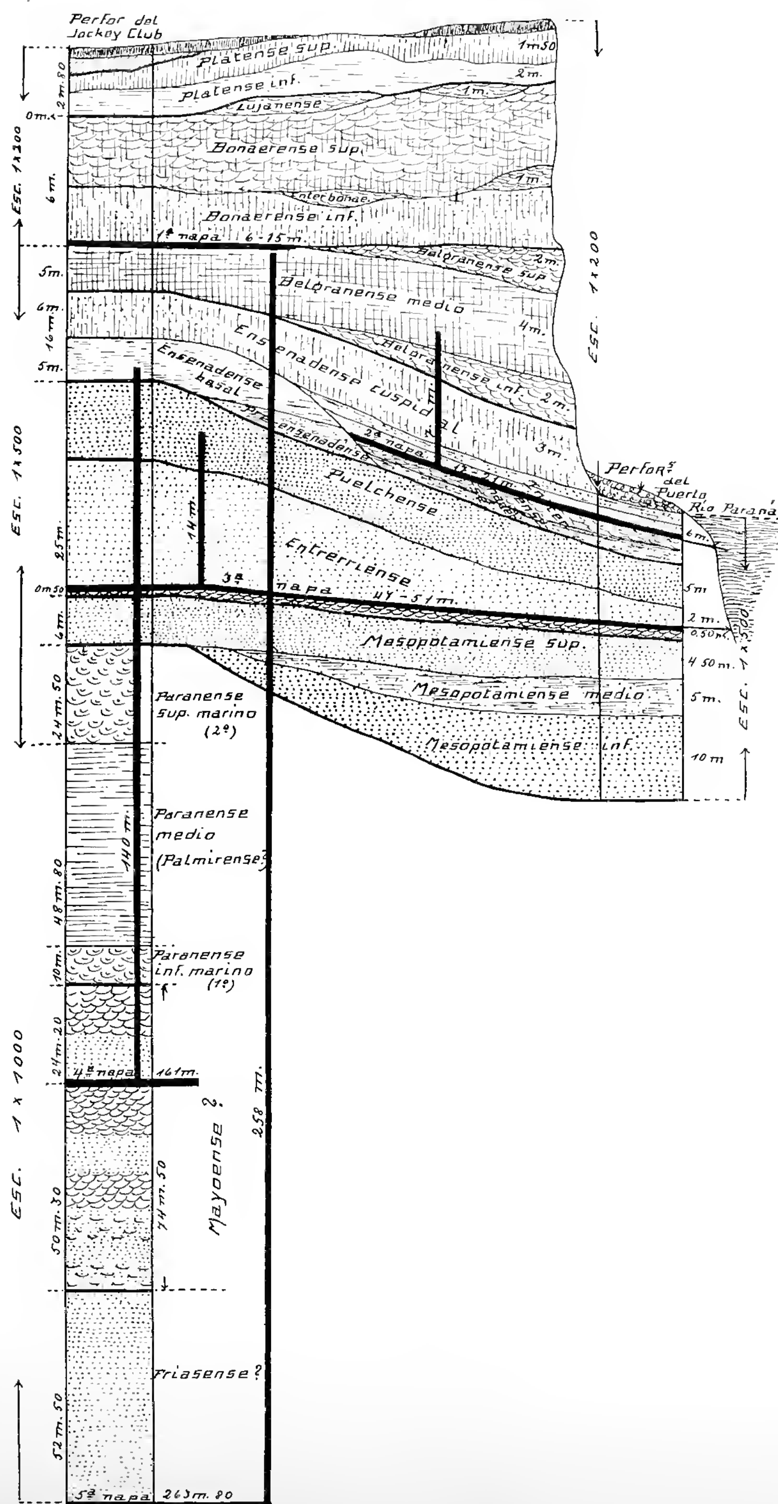
« Asentando sobre la formación citada existe otra más moderna, la denominada por Ameghino Post-Pampeana, representada por los siguientes pisos:

« *Platense* constituído en las barrancau del Paraná por tres estratos: inferior, un *loess* amarillo claro con numerosas concreciones de tosca arborescente; medio, arcilla negra fangosa; superior, limo amarillo pardo.

« En las márgenes del río Carcarañá, a la altura de Aldao, en otros puntos de la misma margen y en algunas orillas de los arroyos de la provincia de Santa Fé, existen en el *Platense* depósitos palustres formados por numerosísimos tubitos calcificados, restos de tallos de plantas acuáticas que forman una masa trabecular que engloba un sinnúmero de restos de *Littoridina Parchappei* (D'Orbigny).


PROBABLE ESTRUCTURA TECTÓNICA DEL SUBSUELO DE LA PAMPA Y MESOPOTAMIA
Sierra de Córdoba (Cordón oriental)
Del Campillo
Cañada Verde
Raya Cortado
Capilla de los Remedios
Alejandro
Hernando
Tostado
Selva
S. Francisco
Arias
Amenabar
Las Delicias
Sta Helena
La Paz
Planicie mesopotámica
Pampa elevada
Pampa hundida
Pampa levantada
Río Paraná
Cuchilla
Aº Nogoyá
Cuchilla
R. Gualeguay
Cuchilla
R. Gualeguaychú
Gualeguaychú
R. Uruguay
URUGUAY
0 m.
Falla
Falla
Meláfiros y Basaltos
Pilar (Horst)
Falla
Fosa (Graben) rumbo N.S.
Falla
Pilar (Horst)
Falla
Block mesopotámico
Meláfiros y Basaltos
Falla
Block uruguayo
Meláfiros y Basaltos
ZÓCALO CRISTALINO

PERFIL TRANSV. DEL SUBSUELO DE ROSARIO HASTA LOS 264 m.



« Coronan las barrancas del Paraná dos estratos de sedimentos recientes, el más inferior es una arcilla pardo-oscura, otras veces gris negruzca, corresponden al *Aymarense*. Asentando sobre éste se encuentra la tierra vegetal o *Arianense*.

El Instituto de Fisiografía y Geología de la Facultad de Ciencias Matemáticas, etc. de la Universidad Nacional del Litoral, estudia las numerosas perforaciones que ha podido obtener, que se realizaron en la ciudad y en sus alrededores y en los cortes naturales que pueden observarse a fin de realizar un trabajo sobre subsuelo de Rosario, bajo distintos puntos de vista. No tendrá solamente una importancia científica sino también técnica, al vincular la constitución y propiedades de las diferentes capas que forman el subsuelo con las posibles construcciones que se realicen, conocimientos indispensables para la estabilidad de las mismas. No solo se estudiarán bajo el punto de vista de su origen, composición petrográfica y química y las propiedades técnicas de los diferentes sedimentos sino de los distintos procesos diagenéticos a que han sido sometidas las capas y los que puedan producirse en el futuro.

ALGUNOS ASPECTOS MODERNOS DE LA INGENIERÍA SANITARIA

CONFERENCIA DEL DR. RICARDO A. GAIBROIS (*)

La segunda conferencia tuvo lugar el 14 del mismo mes a las 18.30 y estuvo a cargo del Dr. en Química Ricardo A. Gaibrois, quien disertó sobre el tema « Algunos aspectos modernos de la ingeniería sanitaria ». A continuación transcribimos el texto de dicha conferencia que fué ilustrada con numerosas proyecciones luminosas.

ALGUNOS ASPECTOS MODERNOS DE LA INGENIERÍA SANITARIA

En estos últimos años, la Higiene, y más particularmente la Ingeniería Sanitaria, ha adquirido una preponderancia, dentro de las ciencias aplicadas, que es verdaderamente sorprendente.

Este fenómeno es mundial, y ha venido desarrollándose paralelamente con los adelantos del confort moderno (pues al hablar de

(*) Debemos lamentar el fallecimiento de este distinguido profesional y hombre de estudio argentino, acaecido en Diciembre de 1938.

Higiene o salud puede decirse que se habla de confort), pero ha surgido especialmente en países ya tradicionalmente progresistas o emprendedores como ser los E.E. U.U. Estos que marchan a la vanguardia en cuestiones de la organización social de la salud pública, han hecho, de la Ingeniería Sanitaria la especialidad que centraliza estos temas cuando son aplicados en gran escala.

Aún países con mayor tradición histórica y a la vez con mayor experiencia, como ser las naciones de Europa, de entre las que citaremos dos, Alemania y Francia, van orientando en la actualidad sus organizaciones sanitarias de acuerdo a las líneas generales con que son trazados estos problemas en los Estados Unidos. Es decir, que podemos con toda honradez considerar las tendencias y directivas norteamericanas en cuestiones de salud pública, como las que en la actualidad representan la expresión de su aplicación práctica más destacada.

La Ingeniería Sanitaria o más correctamente la ingeniería aplicada a los problemas de la salud pública, se ocupa de una gran variedad de actividades a las cuales tiene que fiscalizar y que Prescott y Horwood han definido de la siguiente manera:

« Es la ciencia y el arte de la conservación y mejoramiento de la salud pública mediante la fiscalización del ambiente. Tiene por objeto conservar la salud, comodidad y conveniencia de las comunidades. De acuerdo a esto, se relaciona con aquellos problemas de la salud pública que son comunes a grupos o comunidades, tales como la provisión de agua, construcción de cloacas y drenajes, recolección y eliminación de basuras, provisión de leche y alimentos, saneamiento de los depósitos de víveres y de los restaurantes, provisión de hielo, acondicionamiento del aire, iluminación y protección de piletas de natación, facilidades para beber agua potable, limpieza de calles y plazas de ejercicios físicos, fiscalización de los insectos roedores, olores y ruidos molestos, gases nocivos, desecación de pantanos, inmunización de charcos y otras molestias y peligros para la salud ».

Vemos pues, que el ingeniero sanitario o como más correctamente se lo suele llamar en los Estados Unidos ahora, el ingeniero de Sanidad Pública, debe encarar o fiscalizar una variedad tan grande de actividades que lo obliga a tener conocimientos de muchas otras ciencias (especialmente de Química y Bacteriología) y que debe también relacionar sus actividades a las de otros funcionarios adiestrados en instalaciones de higiene pública, como también a

los departamentos oficiales que les van a dar la autoridad suficiente para mantener sus puntos de vista.

Uno de los ingenieros sanitarios de mayor actuación, actualmente, de ese país del Norte, el señor Charles Gilman Hyde, divide las actividades típicas del control que hace el ingeniero de la salud pública en las siguientes diez clases:

1) Fiscalización cuantitativa y cualitativa de la provisión del aire;
2) Fiscalización cuantitativa, sanitaria y estética de la provisión de agua;
3) Fiscalización de la provisión de leche, producción, transporte, pasteurización, venta y manipuleo;
4) Fiscalización de otras provisiones de alimentos; producción, transporte, preservación, venta y manipuleo de productos alimenticios crudos, conservas envasadas; refrigeración;
5) Fiscalización de los residuos líquidos; líquidos residuarios, cloacales, industriales y comerciales; cloacas, drenaje e instalaciones de tratamiento, destino de los residuos finales innocuos;
6) Fiscalización de los residuos sólidos; recolección, transporte, tratamiento y eliminación de las basuras municipales, incluyendo basuras domésticas, desperdicios, cenizas, basuras provenientes de la limpieza y riego de las calles, animales muertos, etc.;
7) Fiscalización de los animales e insectos vectores de infecciones, roedores, perros, cabras y cerdos, ganado en general, etc. Medidas preventivas y paliativas contra las moscas, mosquitos, pulgas, piojos y garrapatas, etc.;
8) Aseo de las ciudades y de las poblaciones rurales. Limpieza de calles; fiscalización del polvo; hollín y humo; protección de las piletas de natación; cuarteles y campos de ejercicios físicos;
9) Condiciones sanitarias de las fábricas, tiendas, escuelas, iglesias, teatros y casas;
10) Fiscalización de las molestias y otras condiciones perjudiciales para la salud, tales como olores y gases nocivos, ruidos excesivos, etc.

En la disertación que me cabe la honra de presentar ante ustedes, voy a tratar temas relacionados con los puntos siguientes:

1º - La fiscalización del ambiente atmosférico.
2º - El abastecimiento del agua.
3º - La eliminación de los líquidos residuales.

Ellos han sido elegidos por ser los más importantes en estas cuestiones de Ingeniería Sanitaria, como puede comprobarse por ejemplo observando las secciones en que se ha dividido el programa del Primer Congreso Sudamericano de Ingeniería, a celebrarse en Chile en Enero del próximo año, del cual tendrán ustedes ya conocimiento. De siete secciones que tiene, la cuarta está dedicada a la ingeniería sanitaria e incluye las secciones tituladas: Agua potable, Desagües y aguas servidas, y Eliminación de desperdicios.

Debo aclarar en este momento que no es mi intención agotar los temas que trato, sino presentar algunos de sus aspectos más novedosos o de más importancia para los problemas de nuestro país, con el objeto de despertar el interés por ellos, ya que están íntimamente relacionados con la salud pública.

I. — La fiscalización del ambiente atmosférico

Las normas de vida de las comunidades modernas con la acumulación de centros de población densamente habitadas; en barrios de edificaciones demasiado elevadas con relación a las áreas de terrenos que cubren y la febril actividad industrial manifestada por la gran variedad de fábricas que se van desarrollando en el mundo civilizado, hacen que las condiciones de pureza que naturalmente tiene el aire en los ambientes despoblados (en el campo o en la montaña) esté alterada en mayor o menor grado por residuos de composición física y química muy variada o por la contaminación propia de los mismos seres vivientes que tan densamente lo utilizan.

Las alteraciones pueden ser consideradas desde los puntos de vista siguientes:

1. - El de su composición física, o sea en lo que se refiere a la temperatura, grado de humedad y movimiento.

2. - El de su composición química ya sea respecto a las proporciones que normalmente debe tener en sus elementos relacionados con la función respiratoria (oxígeno y anhidrido carbónico) como también (y este punto toma importancia en los centros industriales) en lo referente a la presencia de cualquier substancia tóxica o gas nocivo, que diluyéndose en el aire sea capaz de producir cualquier perjuicio en la salud.

3. - El de su contenido en gérmenes infecciosos, como puede llevar el aire de lugares mal ventilados.

4. - El de su contenido en partículas o resíduos sólidos; como ser polvo, hollín, etc. Por su importancia sobre todo por ser las causantes de la mayor parte de las enfermedades llamadas profesionales, se coloca este caso, en esta clasificación, formando grupo aparte.

Cualquiera de estos puntos tiene importancia en la vida práctica, y han sido causa de que los ingenieros sanitarios se dediquen a corregir las anomalías que ellos producen por medio de la nueva técnica, que con el nombre de « acondicionamiento del aire », se ha popularizado en estos últimos años.

En esta forma se trata de hacer el ambiente atmosférico confortable e innocuo. Será confortable el ambiente cuando sus condiciones físicas (incluyendo un grado de pureza normal) de temperatura, humedad, movimiento y grado de renovación estén dentro de ciertos límites de lo que los técnicos han llamado *temperatura efectiva.* Será innocuo cuando no contenga ningún elemento que alterando su composición química, o bacteriológica, normal o acarreando partículas pulverulentas sea capaz de producir trastornos en la salud.

Las alteraciones químicas se manifiestan principalmente por la presencia de una gran variedad (según el origen de la contaminación) de substancias generalmente de origen industrial que producen intoxicaciones claramente definidas en la higiene industrial como ser, saturnismo, o intoxicaciones por vapores de plomo, etc.

Las partículas pulverulentas de composición muy variada y cuya acción tóxica se encuentra exaltada por la acción mecánica, producen, como ya hemos dicho, una mayoría de las enfermedades que en general deben atribuirse a estos residuos que alteran ya sea química o físicamente, el aire proveniente de actividades fabriles. Podemos citar como enfermedades de más popularidad: la *silicosis,* producida por partículas de naturaleza silicea; la *antracosis*, producida por los polvos de carbón, la *asbestosis* por polvos de asbesto y la *aluminosis* por polvos de aluminio.

Es digno de hacer notar que la silicosis ocupa un lugar preponderante en algunas estadísticas destinadas a registrar los casos de enfermedades profesionales.

En el confort pues de los ambientes domésticos, o en la higienización de un ambiente industrial, es el ingeniero sanitario el que debe prever la posibilidad de la disconformidad o alteración de la salud de los individuos de la comunidad, por medio de los nu-

merosos recursos que el arte de acondicionamiento del aire pone hoy en práctica.

II. — La calidad de las aguas de provisión y sus tratamientos

Las tendencios actuales en lo que se refiere a los problemas que suelen relacionarse con la provisión de agua para la bebida. es el vigilar atentamente las cualidades del agua que se ofrece.

En efecto, el agua utilizada para los usos domésticos y obtenida, ya sea por medio de los grandes establecimientos que se encargan de distribuirla, previo tratamiento, (si es necesario), o de fuentes particulares autorizadas o aconsejadas por las autoridades oficiales debe reunir varias condiciones de potabilidad, tanto desde el punto de vista de su composición química como bacteriológica, que permitan clasificarla como *apta* y en caso contrario tratar de efectuar su purificación o corrección de cualquiera de las cualidades que la perjudiquen. Los métodos modernos de purificación de un agua que tenga alguna o algunas deficiencias en lo que respecta a su composición microbiológica permiten corregirla con toda facilidad, la variedad y eficacia de ellos (empleo de cloro, cloraminas, ozono, etc.) y permite obtener aun de los líquidos más contaminados microbiológicamente, aguas prácticamente innocuas.

De modo que podríamos decir que en la actualidad, lo que todavía puede constituir. como realmente lo constituye (y veremos algunos ejemplos), un problema, para el encargado de dar agua a un centro de población, es hallarla en caudal suficiente para las necesidades y con una composición química, tal que pueda considerarse como apta o capaz de ser utilizada previa purificación.

La elección pues de una fuente de provisión, especialmente, si está destinada a un abastecimiento público, está supeditada a una variedad de factores entre los que hay que tener en cuenta, además de los que definen la calidad o composición del agua, otros indirectamente relacionados con ella como ser: las condiciones locales y el aspecto económico, que muchas veces puede ser el factor decisivo para una elección.

Aquí vamos a considerar, dada la índole de esta disertación, dos aspectos, que siendo de fundamental importancia, dan lugar a que el higienista se encare con problemas a veces difícilmente solubles. Es decir, vamos a hablar de: A) la composición de las aguas naturales y B) el tratamiento de purificación de las aguas destinadas a la provisión.

A) *Composición de las aguas naturales.*

No es nuestro objeto hacer ahora una clasificación de las numerosas clases o tipos de aguas que podemos encontrar en la naturaleza sino presentar algunos de los casos que más comunmente pueden presentarse al ingeniero sanitario, cuando debe elegir un agua para utilizarla como fuente de provisión, ya sea utilizándola tal cual si sus condiciones higiénicas son inobjetables o ya sea sometiéndola previamente a un tratamiento de purificación si este es necesario y factible. Tres casos pueden presentarse por lo general:

a) que el agua sea excesivamente pobre en sales.

b) que se encuentre en ella algún elemento, que aun en pequeña cantidad sea tóxico.

c) que tenga una cantidad elevada de sales.

a) *Las aguas pobres en sales:*

La pobreza de sales en el agua de bebida, especialmente peligrosa en la época del crecimiento de las personas, y sobre todo cuando la alimentación por causa de su escasez o deficiencia no es capaz de compensar esta carencia, puede manifestarse como problema al higienista. El problema parecería poderse dividir en dos casos: uno cuando hay una escasez general de todas las sales que generalmente llevan las aguas naturales y otro cuando falta algún elemento de los que se consideran necesarios (calcio, yodo, etc.).

Podemos citar al respecto los estudios del doctor Ernesto Sordelli efectuados en la zona noreste de Corrientes y Misiones en donde parecería que el bajo contenido en sales de las aguas y en general la pobreza de calcio de estas y de los alimentos de la región, hacen que la calcificación de los niños sea deficiente, lo que se manifiesta por los defectos de dentición.

Un caso típico y también relacionado con problemas de nuestro país en lo que se refiere a las aguas que carecen de algún elemento indispensable lo constituye el problema de las aguas que por carencia de yodo son causantes o contribuyentes al desarrollo del bocio. En efecto al parecer la ausencia de yodo en la alimentación o sea en las aguas y en las restantes subsistencias que el hombre consume, es la provocadora en muchas regiones del bocio o coto endémico. Debemos aclarar que no queremos decir que la carencia de yodo sea la causa obligada del bocio endémico, sino que

coincide esta enfermedad con la pobreza en yodo de los alimentos y especialmente de las aguas como sucede en las provincias de Mendoza, Tucumán, Salta, etc.

b) *Aguas con algún elemento tóxico:*

Las aguas naturales pueden llevar disueltos elementos tóxicos provenientes de los terrenos por donde pasan. Estos elementos están por lo general en cantidades pequeñas, lo que ha hecho o hace que su presencia escape desapercibida en los análisis comunes, en cambio se hallan revelados sus efectos en forma de síntomas típicos de intoxicaciones debidas a ellos y ocasionadas por la acumulación del tóxico por el uso prolongado de esas aguas.

Parecería que la experiencia confirma, para nuestras aguas en general, la ley geoquímica por la cual se establece que es en las aguas cuya composición química las ha clasificado como bicarbonatadas o sulfatadas cálcicas, más generalmente llamadas agus duras, en las que no se encuentran generalmente estos elementos tóxicos en forma apreciable, en cambio las aguas ricas en bicarbonatos o cloruro de sodio son las que suelen revelar la presencia de estos elementos. Podemos agregar de paso que para el yodo se cumple la misma ley geoquímica es decir que suelen ser aguas pobres en yodo las aguas duras.

Entre los elementos tóxicos que hasta el presente se han descubierto entre las aguas de nuestro país, podemos citar: el *fluor*, el *arsénico* y el *vanadio* de los cuales vamos a dar una sucinta relación.

El *fluor* que ya había sido señalado en otras partes del mundo (E.E. UU., Norte de Africa, Japón, etc.) ha sido revelado en nuestro país en varias regiones y es objeto de su investigación por parte de las Obras Sanitarias de la Nación, en donde la Oficina de Investigaciones Técnicas efectúa, bajo la inmediata dirección y organización personal de su jefe, el doctor Rogelio A. Trelles, un estudio del problema del fluor en nuestras aguas.

Este elemento tóxico produce cuando se encuentra en las aguas en cierta proporción (generalmente en mayor cantidad de un milígramo por litro) una alteración del esmalte de los dientes, que, según la intensidad va, desde la simple opalescencia del esmalte, hasta el manchado y deformación del diente. Esta enfermedad se llama *fluorosis dental crónica o endémica*, vulgarmente conocida con el nombre de dientes manchados o dientes veteados, y se presenta únicamente cuando la persona ha tomado agua con fluor

durante su infancia, es decir, durante el tiempo de la dentición por lo que no tiene ningún efecto en las personas que tomen esas aguas después de haber llegado a la edad de los 9 años.

La investigación llevada a cabo por la Oficina de Investigaciones Técnicas de las Obras Sanitarias permite adelantar que las aguas de lás zonas de nuestro país que tienen un contenido de fluor de 1,2 mg. producen un veteado blanco de los dientes; las de contenido de 1,6 a 2,2 dientes un veteado amarillento y teniendo de 3 a 3,5 mg. producen un amarillento negruzco. Estos límites corresponden a estudios hechos en zonas tomadas como típicas es decir, donde el contenido de las aguas, utilizadas por los pobladores tenían esas tres concentraciones de fluor.

Otro elemento tóxico perfectamente caracterizado en algunas aguas de nuestro país es el *arsénico*. Provoca una enfermedad que se le ha llamado cáncer arsenical o enfermedad de Bell Ville (por haberse encontrado abundantes aguas con arsénico en esta región), o mal de Ayerza (por haber sido uno de los primeros investigadores que la denunció) o más exactamente *arsenicismo crónico*. La intoxicación se manifiesta por alteraciones de la epidermis que comienza por tomar una pigmentación característica y termina por formar el llamado cáncer arsenical o de Hutchinson.

La concentración en este elemento más alta, registrada hasta la fecha en la zona donde se reveló por vez primera, Bell Ville, es de 4,5 mg. Siendo revelable aunque en cantidades mucho menores en muchas aguas profundas de las partes llanas de nuestra república.

Otro elemento tóxico, poco estudiado hasta la fecha desde el punto de vista que nosotros lo contemplamos, es el *vanadio*. Se presenta casi infaltablemente en todas las aguas de la zona pampeana, pero aún no se ha constatado casos de intoxicación debidas a él aunque hay quienes dudan respecto a la posibilidad de determinar fácilmente su acción sobre el organismo, considerando que a lo mejor esos efectos pasan desapercibidos. En los ensayos de toxicidad efectuados con ratas blancas en la Oficina de Investigaciones Técnicas de las Obras Sanitarias se ha comprobado su acción tóxica en estos animales. Las conclusiones se publicarán a fines de año.

Como último ejemplo de los metales tóxicos que pueden encontrarse en las aguas naturales con cierta frecuencia, y aunque no ha sido constatado aún en nuestro país citaré *el selenio*, considerado por algunos mucho más tóxico que el arsénico (unas 10 ve-

ces más) y señalado por la bibliografía Norte Americana, país donde se encontró algún caso de intoxicación por él.

e) *Exceso de sales:*

A las aguas cuyo contenido salino es elevado vamos a referirnos en pocas palabras, ya que es de todos conocida las características comunes de algunas de ellas, es decir las llamadas comunmente aguas duras. Pero como la dureza está dada por la presencia de sales de calcio y de magnesio debemos considerar que pueden encontrarse aguas de gran contenido salino pero pobres en calcio y magnesio, es decir, son aguas blandas pero ricas por ejemplo en bicarbonato de sodio, cloruro de sodio o sulfato de sodio o de potasio.

Estas aguas, caracterizadas en general por la abundancia de su residuo salino son revelables fácilmente por sus condiciones de sabor o la deficiencia para producir espuma con los jabones. Son las aguas de este tipo las que generalmente abundan en nuestras napas subterráneas, aunque en algunas regiones (por ejemplo en la provincia de Mendoza) aún muchas de las superficiales son también mineralizadas o duras. En cuanto a sus efectos fisiológicos no podemos decir que ese exceso de sales que generalmente tienen pueda llgar a sr un tóxico para el organismo, aunque hay quienes sostienen que el exceso de sales de calcio y de magnesio es un contribuyente a la formación del bocio endémico.

Existe también la opinión, comprobada en ciertos aspectos, de que la acción de las sales o elementos en el organismo está supeditada a la presencia o no de otras sales o elementos, de modo que aún la acción tóxica puede ser exaltada o no por la presencia de otras sales o elementos. Esto tiene importancia especialmente, pues, en el estudio de las condiciones de fijación de algún elemento por el organismo, por ejemplo: en la calcificación o fijación del calcio, o en la comprobación de los límites de toxicidad de otros.

B) *La purificación de las aguas naturales.*

Resuelto el problema de la elección de la fuente de provisión es decir comprobado que el agua reune las condiciones de cantidad y composición química establecidas, lo que la hace apta para la provisión, o para ser purificada por medio de un tratamiento adecuado de purificación, se procede a elegir el procedimiento que

más convenga para este fin. En esta elección intervienen muchos factores para cuya aplicación es necesario la colaboración de los conocimientos químicos (para plantear el proceso en sus líneas fundamentales) y los de Ingeniería (me permitiría decir de Hidráulica) para aplicar en la práctica esos procesos (medir y manejar esos grandes volúmenes de líquido en la forma más eficiente. tanto desde el punto de vista del proceso como de su explotación económica).

Cuando la fuente de provisión nos da un agua potable o escasamente contaminada bacteriológicamente, el problema a resolver se reduce por lo general a buscar la forma de distribuirla lo más económicamente posible; es decir que la parte que habrá que estudiarse en su transporte (bombeo para vencer los desniveles, largos conductos de conducción, organización de su distribución, etc.); o, todo lo más, proyectar las instalaciones correspondientes a uno de los sistemas de desinfección (generalmente cloro) para utilizarla. ya sea, preventivamente en aguas de composición bacteriológica sospechosa o variable, ya sea como tratamiento habitual.

Cuando el agua necesite un tratamiento más o menos intenso antes de su distribución, los problemas que debe resolver el ingeniero son diversos, y en ellos tiene amplio campo de acción, la hidráulica, la mecánica, y (no pudiéndolo dejar nunca de lado), el planteo económico.

a) *La corrección de aguas a las que le falta algún elemento.*

Hemos visto como se atribuye a las aguas carentes de yodo la causa de ciertos transtornos; esto ha hecho que se corrigieran las aguas de las provisiones públicas en algunos países (por ejemplo: Estados Unidos), por medio del agregado de yoduro de potasio a las aguas de provisión.

Otra corrección (muy común en los procesos de purificación del agua) es la de la acidez del agua clarificada por medio de la cal, con lo cual se restituye calcio al líquido, o aun más, se agrega una cantidad tal, que alcance su saturación en carbonato de calcio, punto importante, porque en esa forma se llega a prevenir las incrustaciones en la cañería de distribución.

b) *La eliminación de alguno de los elementos químicos de un agua.*

La eliminación de los elementos que pueda tener un agua requiere por lo general un método particular para cada uno de ellos

y a veces esta eliminación es técnicamente tan dificultosa que puede ser causa de que se deseche el agua como fuente de provisión.

La eliminación de los elementos que ya hemos citado, fluor, arsénico y vanadio es practicable por métodos que aunque económicamente un poco caros, son técnicamente factibles; el arsénico y el vanadio por adsorción por medio del hidróxido de aluminio, y el fluor por la filtración del agua de bauxita, cenizas de hueso, magnesia o el agregado de hidrato de magnesio.

En nuestro país se han esquivado las fuentes de provisión que contienen arsénico y vanadio aprovechando la feliz circunstancia de que estos elementos se encuentran en las aguas profundas de las regiones donde predominan y no así en las superficiales, que son pues las utilizadas. Con respecto al fluor ya se ha señalado la posibilidad de tener que encarar el problema del tratamiento de algunas aguas que lo contengan. Podemos citar como elemento no tóxico pero que debe ser eliminado del agua cuando está en ciertas proporciones el hierro a veces presente y cuyo tratamiento de purificación suele ser la oxidación del mismo por medio de una intensa aereación del líquido que lo precipite en forma de óxidos o hidróxidos férricos.

c) *La corrección de las aguas duras y excesivamente mineralizadas.*

Desde el punto de vista de la purificación son dos problemas distintos los que pueden presentarse con estas aguas, ya sea que se desee eliminar la dureza solamente o que se trate de un agua blanda pero con exceso de otras sales.

La eliminación de las sales de calcio y de magnesio cuentan con métodos ya popularizados entre los que se distinguen el llamado de la *cal y soda*, por el que se obtiene una precipitación de la mayor parte del calcio y del magnesio que se separa luego por decantación, y los procedimientos más recientes, basados en la utilización de las llamadas *zeolitas*. Estas actúan por sus propiedades de permutar algunos de sus elementos (el sodio en zeolitas sódicas) por el calcio o el magnesio del agua, fijándolo y convirtiendo las sales alcalinoterreas de la misma en sales sódicas. Esta particularidad de permutar ha dado origen al nombre de permutitas y más correctamente, se llama propiedad de cambio de bases.

Hay diversas clases de zeolitas cuyo valor desde el punto de vista técnico es distinto y que se emplean en un caso o en otro, según las características del agua o el efecto que se desee obtener. Podemos citar las siguintes clases:

La glauconita o arena verde; es un tipo de zeolita en forma de granos de porotos, del tamaño de un grano de arena mediano y de color negro verdoso. Es una de las más utilizadas en la edulcoración del agua en la actualidad y bastante resistente a la acción agresiva de las aguas.

Las zeolitas sintéticas preparadas por precipitación, proceso llamado también húmedo. Está constituído por granos de un tamaño de 3 a 6 milímetros con aspecto de arena blancuzca.

Es un tipo de zeolita muy utilizada en los dispositivos de edulcoración domésticos. Es relativamente sensible a la acción de las aguas agresivas (por ejemplo aguas de pH inferior a 6,8).

Las zeolitas sintéticas obtenidas por fusión, de características y tamaño semejantes a las preparadas por proceso de precipitación. Estas zeolitas tienen menor poder edulcorante o de intercambio por lo que en la actualidad su uso es reducido.

Las zeolitas carbonáceas son unas de las zeolitas sintéticas que más recientemente nos ha presentado la bibliografía. Se diferencia de las otras zeolitas tanto por su composición, como por sus efectos. Mientras que las antiguas zeolitas contenían de 40 a 60 % de sílice esta nueva zeolita carbonácea está constituída, como lo indica su nombre, por carbón y prácticamente no tiene sílice. En cuanto a su acción tiene una propiedad distinta de las antiguas zeolitas, por cuanto pueden ser regeneradas con ácido sulfúrico y entonces ser utilizadas como una zeolita hidrogenada, es decir, las zeolitas sódicas convierten las sales de calcio y magnesio del agua en sales de sodio que quedan solubles en el agua; en cambio la zeolita hidrogenada o carbonácea retiene el calcio y el magnesio y además el sodio dejando únicamente los ácidos correspondientes. Tratándose pues de aguas carbonatadas el anhidrido carbónico es eliminable luego por aireación o desgasificación dejando así un agua bastante pura. En el caso de que queden otros ácidos libres deberán lógicamente neutralizarse.

c) *Procesos generales de la purificación de las aguas.*

Las aguas naturales especialmente las superficiales, como sucede con las de nuestros mayores ríos suelen llevar ciertos caracteres de color, turbidez, y ciertos elementos biológicos, que dan origen a la necesidad de aplicarles los procesos generales conocidos por *clarificación, filtración y desinfección*. La *clarificación* se efectúa por lo general agregando ciertos productos químicos (sulfato de

aluminio, sulfato férrico, etc.) que formando block con las materias en suspensión hace que estas precipiten y puedan separarse por decantación. Se emplean con este objeto grandes depósitos llamados clarificadores o decantadores.

La *filtración* tiene por objeto eliminar las pequeñas partes de coágulos formados en el proceso anterior que no hubieran sido eliminados. Suele efectuarse en filtros de arena, de distintos tipos. Por último, la *desinfección* tiene por objeto destruir los microorganismos que no han quedado separados por los procesos anteriores, empleando para este fin cloro, las cloraminas (combinación de cloro y amoniaco,) etc.

En nuestro mayor establecimiento o sea en el de purificación de agua para proveer a la ciudad de Buenos Aires se utiliza el agua del río de la Plata, agua de mediana mineralización, exenta de elementos tóxicos, pero con bastante turbidez y algo de color. El proceso general de la purificación es el descripto arriba, siendo digno de indicar que en la clarificación, o proceso de coagulación de las materias en suspensión, se han introducido algunas modificaciones que redundan en la economía del proceso. Para poder apreciar la importancia de estas economías aclararé que suelen emplearse en la clarificación del agua que se provee a Buenos Aires, unas 20.000 toneladas de sulfato de aluminio por año, que representa un valor de más de dos millones de pesos.

Ahora bien, estudios del Jefe de la Oficina de Investigaciones Técnicas, hechos en colaboración con otros profesionales de la misma, han permitido efectuar el ahorro de un 20 % de coagulantes (sulfato de aluminio) por el simple hecho de agregar las cantidades necesarias para la clarificación en forma fraccionada. Se ha llamado a este procedimiento *coagulación fraccionada* y consiste en agregar la dosis que necesita el agua para su clarificación en dos porciones, dos terceras partes en un primer agregado, y la tercera parte restante al minuto o dos de la anterior, efectuando en cada agregado una violenta agitación. El resultado obtenido como ya hemos dicho redunda en beneficio del ahorro del coagulante como también se obtienen aguas mejor clarificadas.

Podemos citar aquí que las experiencias de laboratorio llevadas a cabo también por sugestión del Jefe de la Oficina de Investigaciones Técnicas, Dr. R. A. Trelles, han permitido demostrar que la *coagulación fraccionada*, con un primer agregado de sulfato de aluminio y un segundo de cloruro férrico, es aún superior.

III. — LA ELIMINACIÓN DE LOS LÍQUIDOS RESIDUALES

La eliminación de los líquidos residuales, es un problema que ha adquirido importancia especialmente en algunos países, por el aumento de densidad de la población y por el intenso desarrollo de las industrias. Estos líquidos descargados en los cursos de agua ya sean superficiales (ríos, lagos), o en los profundos (napas de agua subterráneas), los contaminan convirtiéndolos en inaptos para la bebida, peligrosos para la salud, molestos a los sentidos o dañinos para los peces. Por lo tanto para evitar eso es necesario que sean purificados aplicando algunos de los métodos conocidos en la técnica cloacal o sinó que dejen a las fuerzas naturales (como lo son la capacidad de purificación de los mismos cursos de aguas, o la de las tierras vegetales) la tarea de disponer de esos líquidos. Es decir, que podemos plantear el asunto diciendo que el problema de la eliminación de los líquidos residuales es la resultante de las actividades domésticas e industriales modernas, y que, siendo necesario la purificación de estos líquidos, puede ella efectuarse, *naturalmente*, volcándolos en cursos de agua caudalosos, o sea el procedimiento llamado por dilución; también *naturalmente*, descargándolos sobre terrenos cultivados, o sea el procedimiento llamado por *irrigación*; y por último *artificialmente*, por cualquiera de los modernos métodos de tratamiento (filtros biológicos, barros activados, etc.).

Los elementos *contaminantes* del líquido cloacal, son muy variados en su composición ya que el líquido proviene de orígenes muy distintos (aguas de lavados, deshechos humanos, residuos industriales), pero son especialmente considerados contaminantes las substancias orgánicas capaces de entrar en putrefacción y los elementos biológicos que pueden producir enfermedades.

Los *procesos generales de tratamiento* de estos líquidos tienden a separar la mayor cantidad de elementos contaminantes o de materiales residuales que son arrastrados por el líqnido, utilizando dos sistemas o fases: *el tratamiento mecánico o físico*, que incluye las *rejas*, los *tamices*, y los *tanques de sedimentación* por medio de los cuales y aprovechando procesos físicos se eliminan de los líquidos, un porcentaje elevado de las materias que llevan en suspensión (desde los trozos más grandes como ser trapos o pedazos de madera, hasta los pequeños granos de materias orgánicas); y el

tratamiento biológico que suele aplicarse a continuación, por el cual los materiales contaminantes sobre todo los de tamaño pequeño, coloidal, o disueltos son transformados por acciones oxidantes, en materias inorgánicas solubles, o en residuos floculentos, (llamados también *barros* o *humus*) que se separan otra vez por medios mecánicos (decantación). Cumplen esta acción oxidante del proceso biológico: los *filtros percoladores,* los *lechos de contacto,* los *canales de barros activados,* etc.

Es decir que en un proceso de tratamiento cloacal vamos a encontrarnos después de efectuar la purificación, con un líquido más o menos innocuo o estable, y los materiales que hemos separado (en su mayoría « barros cloacales »). El líquido puede ser dispuesto sin inconveniente volcándolo en cursos de agua, y los *barros,* residuos del proceso, hay que someterlos a atención pues pueden sufrir putrefacción fácilmente, causando malos olores, además de otros inconvenientes.

El barro retirado de los tanques de sedimentación, es un barro llamado fresco, suele tener 95 % de agua, y puede ser el asiento de procesos bioquímicos que se manifiestan por cambios del estado coloidal de su materia orgánica, fermentaciones, transformaciones químicas, abandono del agua y otras, entre las cuales se encuentran una activa producción de *gases.* En la práctica del tratamiento de los líquidos cloacales, los barros son llevados a recipientes especiales, los *digestores,* donde se trata de favorecer ese proceso fermentativo (por agitación, calentamiento, maduración, etc.) y se llama este procedimiento *digestión del barro.* Los tanques de digestión tienen dispositivos especiales que permiten recoger los gases que se desarrollan durante la digestión y utilizarlos aprovechando su poder calórico de combustión. En efecto los gases suelen tener un 70 % de metano, de modo que pueden y suelen emplearse para producir fuerza motriz y calefacción, dos cosas útiles y fácilmente aprovechables en un establecimiento cloacal y que puede llegar, bien administrado en los grandes establecimientos, a sobrepasor la cantidad de fuerza y calor necesaria para todas las operaciones del mismo.

El líquido cloacal utilizado en el riego de cultivos

En lugares donde escasea el agua o en las épocas donde la sequía es prolongada es importante aprovechar todas las fuentes de aguas, o líquidos que la contienen, y que pueden utilizarse sin peligro de contaminaciones.

Una de estas fuentes la constituyen los líquidos cloacales, pues ellos se producen obligadamente en donde haya un centro de población y como pueden ser utilizados para el riego de los vegetales y además llevan substancias que les den valor fertilizante, son en muchos casos una fuente suplementaria de provisión de agua para la irrigación *útil*, o por lo menos digna de tenerse en cuenta. Podemos decir entonces que la irrigación en algunos casos es una consecuencia de la disposición de los líquidos cloacales.

No es que pueda tomarse exactamente como substituto de cualquiera de los otros métodos de tratamiento cloacal, ya que el *objeto principal* de cualquier método de tratamiento es la purificación del líquido cloacal y el aprovechamiento de cualquiera de los subproductos que se obtengan en dicho tratamiento (ya sean los efluentes, los barros, etc.), debe figurar, desde el punto de vista sanitario, como un factor de segundo orden. Pero desde el punto de vista económico, y en relación con la mayor o menor escasez de agua en la región, puede ser considerado, este posible aprovechamiento, como importante.

El valor fertilizante de los líquidos cloacales o de sus barros, reside en su contenido en compuestos del nitrógeno, y del potasio y del ácido fosfórico, que son aprovechables por las plantas. Al parecer de acuerdo a ciertos experimentadores (Bach en Alemania), hay otros constituyentes muy importantes, que hasta ahora pasaban desconocidos, que son también estimulantes del crecimiento de las plantas, me refiero a las *hormonas* y *vitaminas* presentes en esos líquidos provenientes de las eliminaciones humanas y de animales. Bach dice que los fertilizantes artificiales aunque son ricos en constituyentes minerales no pueden competir con los líquidos domésticos, pobres en substancias nutritivas para las plantas, pero ricos en hormonas. Las materias retiradas por sedimentación de los líquidos cloacales frescos son consideradas ricas en « valores estimulantes ».

En la actualidad existen dos tendencias en lo que respecta a la utilización de los líquidos cloacales en el riego. Los alemanes defienden este sistema oficialmente con reglamentaciones que obligan a utilizar los líquidos cloacales de sus centros de población en el riego a menos que sea realmente indispensable efectuar con él cualquier otro método de tratamiento. Tienden así a no desperdiciar lo que ellos consideran valores francamente utilizables. En consecuencia utilizan los líquidos brutos o después de aplicarles un sencillo tratamiento primario.

Para la otra tendencia puede tomarse de ejemplo los Estados Unidos de Norte América, donde los autoridades sanitarias tratan de permitir el riego solamente en los lugares donde la escasez de agua se manifiesta, pero con la condición de efectuar un tratamiento preliminar apropiado y siempre que los cultivos que se rieguen con estos líquidos no sean destinados al consumo sin ser cocinados previamente, es decir crudos.

Ya enumeramos al comienzo de esta disertación las actividades a que suelen dedicarse los ingenieros sanitarios de acuerdo a las tendencias de la época. Si el tiempo lo hubiese permitido, habríamos detallado algunos de los temas que hoy solo enunciamos, y habríamos visto que, a semejanza de los tópicos tratados, « Aguas de bebida y Desagües », son muchos, y muy interesantes los problemas que pueden preocupar al ingeniero dedicado a la salud pública. En cuanto a mi intención se refiere, está cumplido lo que deseaba, pues ella era el hacer ver en forma general cuales son esos problemas, especialmente con miras a que les dediquen mayor atención los profesionales del país; por eso he citado, siempre que ha sido posible, ejemplos tomados de trabajos nacionales.

Quizás, teniendo en cuenta lo íntima relación que, como hemos visto, existe entre los conocimientos generales de Ingeniería, Química e Higiene, y suponiendo que fuera factible agregar algunas materias al plan de estudios de esta Escuela de Ingeniería Química, podría ser que la Universidad del Litoral, nos diera la primera carrera de ingeniería sanitaria.

En la Universidad de Nueva York se especializan en Ingeniería Sanitaria los estudiantes de Ingeniería Civil que, en 4º eligen esta orientación, y entonces estudian como materias básicas: Hidráulica e Ingeniería Sanitaria, Proyectos de Aguas y Desagües, Cemento Armado, Estructuras recticuladas, Finanzas e Ingeniería económica, Legislación, Arquitectura, Laboratorio aplicado a la Ingeniería Sanitaria, etc.; también son especialistas sanitarios los que recibidos de ingenieros civiles (y conste que sus estudios en general son menos extensos que los de nuestra carrera de Ingeniería Civil), que ven en un año más una serie de materias como ser: Ingeniería Sanitaria, Hidrología, Química Sanitaria y Biología, Proyectos de instalaciones sanitarias, etc.

La Universidad del Estado de Illinois (situada en Urbana, Illinois) también especializa en cuestiones Sanitarias a los ingenieros civiles cuando eligen en 4º año esa orientación estudiando: Purificación de aguas, Contratos y Especificaciones, Bacteriología, Tratamiento cloacal y Saneamiento general, Construcción de Mamposterías, Ingeniería Eléctrica Elemental. Además tiene la especialidad para los que ya se han recibido de ingenieros civiles siempre que aprueben las materias siguientes: Provisión de aguas, Alcantarillado, Ingeniería de Salud Pública, Tratamiento de los líquidos residuales, Hidrología, etc.

La Sección de Estudios Sanitarios del Instituto Nacional de Madrid, dictó hace unos años (no se si continúa en la actualidad) un curso especial sobre aguas potables, residuales y basuras, para Ingenieros y Arquitectos, incluyendo las materias siguientes: Microbiología General, Epidemiología Hídrica, Abastecimiento de aguas potables, Bacteriología de las aguas potables, Química, Saneamiento de poblaciones y depuración de aguas residuales, Limpieza y Tratamiento de basuras.

En nuestro país fuera de las Facultades que han agregado alguna materia a su plan de estudio, como es la de la Universidad de Buenos Aires, que bajo el título de « Orientación Hidráulica » y con las tres materias llamadas, Hidráulica Aplicada, Ingeniería Sanitaria y Puertos y Canales (parte hidráulica), se pretende tener la especialidad, no existen más que los Ingenieros civiles que la práctica o actividades profesionales (por lo general por pertenecer a las Obras Sanitarias de la Nación) los han consagrado peritos en Cuestiones Sanitarias.

Tenemos pues en nuestro país, los problemas planteados; nuestra población aumenta y sobre todo se industrializa, el ejemplo que nos viene del extranjero es digno de imitar, nuestros profesionales tienen a no dudarlo un ventajoso campo de acción inmediato y los temas son interesantes y de beneficio público, ¿por qué pues no pensar que pueda crearse en nuestro país la orientación Sanitaria en una forma práctica y de acuerdo con las tendencias actuales?

Si esto llegara a realizarse, cosa que sería a mi parecer factible en esta Facultad de Química Industrial y Agrícola dado los estudios que en ella se hacen, sería para mí, que tanto cariño le tengo a esta ciudad, un placer inmenso el saber que es la Universidad del Litoral la que le ha cabido el honor de dar a la Nación los primeros profesionales especializados en Sanidad Pública.

Sesión de comunicaciones del 4 de Noviembre de 1938

En una de las aulas de la Facultad de Química Industrial y Agrícola y bajo la presidencia del doctor Gustavo A. Fester, se realizó el 4 de noviembre a las 18 una sesión de comunicaciones científicas, considerándose las comunicaciones cuyos resúmenes se publican a continuación.

SOBRE UN TIPO DE ECUACIONES DIFERENCIALES LINEALES

POR J. BABINI

El autor de esta comunicación, estudia la ecuación diferencial de la forma

$$y^{(p)} = \sum_{r=0}^{n} c_r x^r y^{(r)} \qquad (p \geq n \quad ; \quad c_n \neq 0)$$

mostrando como sus integrales particulares poseen propiedades semejantes a las funciones cíclicas.

¿ PUEDE OBTENERSE HELIO MOLECULAR A PARTIR DE SUS COMPUESTOS METÁLICOS ?

POR HORACIO DAMIANOVICH

Como resultado de las investigaciones acerca de la acción del agua regia sobre los compuestos helio-platino, el autor (1) esbozó una interpretación y estableció posibilidades que se resumen a continuación: 1) El helio análogamente a otros gases químicamente activos vencería la resistencia del platino a la disolución en agua regia, destruyendo la autosaturación de las valencias principales y secundarias, para saturarlas luego con sus propias valencias (electrones periféricos de valencia) ; 2) Aun en el caso de que el helio actúe solo como catalizador en dicha reacción, se puede admi-

(1) H. DAMIANOVICH, « Inercia y actividad química de los gases raros ». IV Diferencia de propiedades entre la combinación platino-helio y el pletino puro: acción del agua regia sobre ambos cuerpos. Trabajos realizados en el Instituto de Investigaciones Científicas y Tecnológicas (Facultad de Química Industrial y Agrícola, Universidad Nacional del Litoral) durante el año 1931 y publicados en los *Anales* del Instituto, vol. II, 15, 1933.

tir (como en el caso de catalisis de sistemas gaseosos heterogéneos) que el platino contrae con el catalizador helio una combinación temporaria definida (teoría química de la catálisis) o una combinación de adsorción (teoría físico-química) capaz de dejar ambos elementos activados. La combinación o complejo de adsorción que retiene al helio por valencias secundarias o por co-valencias dejaría al platino con sus valencias libres más aptas para reaccionar de acuerdo con el esquema aproximado



$$2\,Pt_n : He + (4\,n + 1)\,Cl_2 = 2\,n\,Pt\,Cl_4 + 2\,Cl\,He$$

en el cual se prevé la combinación del *helio naciente* o *helio activo* proveniente del compuesto helio-platino con el cloro; 3) Si el platino actúa como catalizador del helio, este gas podrá salir al *estado activo* y combinarse con el cloro molecular o atómico sin excitación eléctrica previa. Esta hipótesis llevó a esbozar dos series de investigaciones: o) Averiguar por procedimientos adecuados (espectroscópicos, etc.) si el helio proveniente del compuesto helio-platino (por calefacción u otros medios) es capaz de combinarse con los elementos H, N, O, Cl, Br, I, etc. b) Ensayar calefacción simultánea de OPt y HePt, NPt y HePt, HPt y HePt, etc. con tal objeto.

Un caso particular de sumo interés es el de la formación de *helio molecular* por combinación térmica del compuesto helio-platino o de otros compuestos metálicos de este elemento. Con el objeto de someter al contralor experimental esta previsión se construye en estos momentos en el Instituto un aparato adecuado y una microbalanza de densidades (sistema Aston) de una sensibilidad tal que permita averiguar el más mínimo aumento de densidad del helio resultante de dicha descomposición térmica. Lo cual sería complementado con medidas de conductibilidad eléctrica y térmica, observaciones espectroscópicas, etc., de dicho gas en las condiciones señaladas.

CONTROL DEL ANÁLISIS MECÁNICO DEL SUELO

Por JOSUE GOLLAN (h.) y M. R. CODONI

Es necesario fijar el valor exacto, es decir el alcance y la interpretación que debe darse a un análisis mecánico del suelo.

Pueden definirse dos casos límites en la distribución de las partículas que constituyen el suelo. La que tienen en el terreno, en un

momento dado, y la que se logra luego de liberar totalmente las partículas.

Nos ocuparemos de este último caso que da una propiedad bien definida del suelo: la textura. Los datos del A. M. de textura no nos hablan del comportamiento del suelo en el terreno en cuanto a sus propiedades físicas o mecánicas. En cambio se liga con otras propiedades de importancia agrícola. La capacidad de retención hídrica, la adsorción y, hasta cierto punto el valor alimenticio, se relacionan con el tenor en arcilla y humus, pero el tenor en arcilla es el obtenido luego de dispersión total.

Para asegurar la bondad del A. M. textural y tener una propiedod bien definida del suelo es indispensable *controlar* que los agregados se hayan resuelto en sus individuos. Los medios de control pueden distinguirse en directos e indirectos.

Entre los primeros tenemos la representación logarítmica de la curva de acumulación y la observación microscópica con iluminación por reflexión o transparencia, completa por el uso de luz polarizada.

Entre los segundos, puede citarse el uso de una propiedad ligada al tenor en una fracción determinada, p. ej. la capacidad de adsorción de bases con respecto al contenido en arcilla.

De los métodos directos nos hemos ocupado con detención en otro trabajo [1]. Estamos estudiando ahora la aplicación de un método indirecto que tiene mucho interés.

Puesto que la capacidad de intercambio de bases es debida a la materia coloidal arcillosa y a la húmica, puede representarse por una expresión del tipo

$$T = \alpha A + \beta H$$

donde T es la capacidad de adsorción total del suelo expresada en miligramos equivalentes por ciento, A es el tenor arcilla y H en materia orgánica coloidal, ambos en por ciento; α y β son respectivamente las capacidades de adsorción en m. e. por gramo de arcilla y de humus.

De las determinaciones de una serie de investigaciones se desprenden que el valor de los coeficientes varía entre:

$$0{,}164 < \alpha < 1{,}102$$

$$2{,}500 < \beta < 4{,}500$$

En primera aproximación, admitiendo que la materia orgánica total contiene 59 % de C húmico, Robinson [2] toma un valor de

$$\beta = 2{,}64 \text{ m. e. por gramo de mat. org. total}$$

valor que está dentro del intervalo citado. Resulta así para α

$$\alpha = (T - 2{,}64 \text{ mat. org. total}) \,.\, 1/A \qquad \text{(a)}$$

Con esta relación, determinado el valor T en m. e. y el contenido en materia orgánica total, se puede calcular, con el valor de A encontrado por el análisis mecánico elemental, el coeficiente α.

La cifra obtenida debe caer en el intervalo considerado, y no diferir mucho de una muestra a otra en un mismo perfil de suelo.

Para utilizar este criterio con mayor rigor, continuamos el estudio de los valores de α y de β, en función de los distintos factores que los influencian: tipo de suelo, tratamiento sufrido, composición química de la arcilla y del humus, naturaleza mineralógica de aquélla, etc.

Damos a continuación dos ejemplos de aplicación de la expresión (a) al control del análisis mecánico.

CUADRO I

Muestra	Arcilla A $< 2\,\mu$ %	Mat. Org. M %	T m. e. %	2,64.M	T—2,64.M	$\alpha = \frac{T-2{,}64M}{A}$
683	44,80	2,605	27,3	6,880	20,420	0,46
684	59,32	1,144	32,5	3,020	29,480	0,50
685	59,24	0,430	28,7	1,135	27,565	0,465
686	50,66	0,135	20,0	0,356	19,644	0,39
687	29,96	0,133	30,9	0,351	30,549	1,02
688	36,15	0,269	28,9	0,710	28,190	0,78
689	43,43	0,147	26,5	0,388	26,112	0,60

En el cuadro I se nota inmediatamente que la muestra 687 da un valor que está muy cerca del límite y se aparta considerablemente de los demás. Aplicando los métodos directos de control se notó que fallaba la dispersión. Conseguida ésta totalmente, según lo

indicó el control directo, el contenido en arcilla llega a 50,90 % y el valor de α se hace

$$\alpha = 0,60$$

CUADRO II

Muestra	Arcilla A < 2 μ %	Mat. Org. M %	T m. e. %	2,64.M	T—2,64.M	$a = \frac{T-2.64M}{A}$
740	31,19	2,534	25,0	6,689	18,311	0,59
741	34,69	0,881	26,9	2,325	24,575	0,71
742	6,05	——	21,0	——	21,000	3,47

En este caso, la muestra 742 da un valor de α completamente fuera del intervalo. La aplicación de una técnica de dispersión apropiada a su caso ([1]), controlada por los métodos directos, dió un contenido en arcilla igual a 31,70 % con lo cual el valor del coeficiente se hace

$$\alpha = 0,66$$

Referencias:

(1) - J. GOLLAN (II). Y MARIO R. CODONI. — «Control de la dispersión en el análisis mecánico elemental del suelo». Trabajo presentado en las Sesiones Químicas Argentinas (IIIa. Reunión).
(2) - ROBINSON, G. W. — « Soils ». p. 121. Londres, 1936.

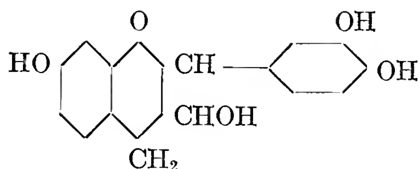
LAS MATERIAS TANANTES DEL QUEBRACHO COLORADO

POR GUSTAVO A. FESTER (1)

La investigación de la constitución del tanino del quebracho ha ocupado un número bastante grande de autores, desde los trabajos clásicos de Arata hasta los estudios modernos de Freudenberg. Para la prefase del tanino, este último ha establecido la fórmula siguien-

(1) Comunicado en parte en las « Sesiones Químicas Argentinas » de Buenos Aires, Septiembre de 1938. El estudio completo aparece en la *Revista de la Facultad de Química de Santa Fé*, vol. VII.

te de una catequina, que se formaría en las hojas, para polimerizarse luego en el tronco, formando el tanino definitivo:



El autor citado ha sintetizado esta catequina, pero no ha podido aislarla de las hojas, lo que atribuyó a una descomposición por oxidación. Nosotros, repitiendo los ensayos, hemos aislado de las hojas cantidades considerables de ácido gálico, que probablemente forma luego un galotanino en la « albura », distinto del catecotanino de la madera colorada. Por otra parte, por un dispositivo especial, que permite el trabajo bajo exclusión completa del oxígeno atmosférico, hemos eliminado por baritina la mayor parte del ácido gálico, precipitando luego la solución por acetato de plomo. El examen de las distintas fracciones reveló otra vez la presencia de ácido gálico, pero no se encontraron ni pequeñas cantidades de una catequina. Salvo el caso entonces que las hojas de otra época del año contengan esta substancia, es de suponer, que el tanino colorado se forme en el tronco, dejando por lo pronto pendiente la explicación del mecanismo de esta reacción.

DETERMINACIÓN DE LAS SINGULARIDADES DE LAS CURVAS UNICURSALES

POR

ANTONIO VALEIRAS

Résumé

Determination des singularités des courbes unicursales

L'auteur se basant systématiquement sur la théorie de l'élimination, obtient une équation qui résout rigoureusement le probleme des points multiples d'une courbe unicursale; et il démontre que l'on peut établir sur elle des criteriums permettant de déterminer la nature de chaque point singulier.

1. — Los métodos clásicos para determinar los puntos singulares de las curvas unicursales (Salmon, Clebsch, Hermite, etc.) se limitan a formar la ecuación que determina los valores del parámetro para los cuales se obtienen tales puntos y prescinden del análisis de las singularidades a tal extremo que ni siquiera se puede decidir, en base a la ecuación formada, cómo se asocian dichos valores para producir cada punto múltiple.

Pesa sobre ellos, además, desde el punto de vista del rigor, una crítica evidente: Se excluyen a priori, a causa de la definición que se da de los puntos dobles, los puntos de retroceso; y, sin embargo, dichos puntos aparecen en la ecuación de las singularidades y no son soluciones extrañas del problema.

Partiendo aquí de principios absolutamente diferentes, y utilizando sistemáticamente la teoría de la eliminación, obtenemos en forma rigurosa la ecuación efectiva de los puntos múltiples y demostramos que se pueden establecer criterios relacionados con la misma para determinar completamente la naturaleza de cada punto singular.

2. — Comenzaremos por recordar las proposiciones fundamentales sobre las cuales reposa el método de eliminación llamado de Bézout, del cual vamos a servirnos constantemente en esta exposición.

Dadas dos ecuaciones de grado n:

$$\begin{cases} \alpha_0 t^n + \alpha_1 t^{n-1} + \ldots + \alpha_n = 0 \\ \beta_0 t^n + \beta_1 t^{n-1} + \ldots + \beta_n = 0 \end{cases} \qquad [1]$$

si introducimos los símbolos (i, j) para designar al determinante $\alpha_i \beta_j - \alpha_j \beta_i$ cuando i y j son enteros comprendidos entre 0 y n inclusive, y en cambio al número 0 cuando no se cumple la condición anterior; haciendo luego todavía:

$$R_{ij} = (0, i + j - 1) + (1, i + j - 2) + \ldots + (i - 1, j)$$

entonces la expresión general del resultante entre dichas ecuaciones viene dada por el determinante:

$$R_1 \equiv \begin{vmatrix} R_{11} & R_{12} & \ldots & R_{1n} \\ R_{21} & R_{22} & \ldots & R_{2n} \\ \cdot & \cdot & \ldots & \cdot \\ R_{n1} & R_{n2} & \ldots & R_{nn} \end{vmatrix}$$

y se llama cadena de menores principales extraídos del anterior, a la sucesión de determinantes

$$R_{1+n-i} \equiv \begin{vmatrix} R_{11} & R_{12} & \ldots & R_{1i} \\ R_{21} & R_{22} & \ldots & R_{2i} \\ \cdot & \cdot & \ldots & \cdot \\ R_{i1} & R_{i2} & \ldots & R_{ii} \end{vmatrix} \qquad [\text{para} \quad n - i = 1, 2, \ldots, n - 1]$$

los cuales se deducen de aquél suprimiendo respectivamente las $n - i$ últimas filas y también las $n - i$ últimas columnas.

En estas condiciones sabemos:

1°) Que la condición para que las ecuaciones [1] sean compatibles — es decir, para que tengan al menos una raíz común — consiste en que se verifique: $R_1 = 0$.

Más generalmente:

2°) La condición para que dichas ecuaciones tengan estrictamente k raíces comunes consiste en que se verifique: $R_1 = R_2 = \ldots = R_k = 0$, siendo además: $R_{k+1} \neq 0$.

Finalmente:

3°) Si dichas ecuaciones tienen justamente $n - i$ raíces comunes, éstas vienen dadas por la ecuación:

$$\begin{vmatrix} R_{11} R_{12} \ldots R_{1i} \tau^{n-i} + R_{1,i+1} \tau^{n-i-1} + \ldots + R_{1n} \\ R_{21} R_{22} \ldots R_{2i} \tau^{n-1} + R_{2,i+1} \tau^{n-i-1} + \ldots + R_{2n} \\ \ldots \\ R_{i1} R_{i2} \ldots R_{ii} \tau^{n-i} + R_{i,i+1} \tau^{n-i-1} + \ldots + R_{in} \end{vmatrix} = 0 .$$

3. — Esto establecido, sea la curva unicursal de orden n, definida en coordenadas proyectivas por las siguientes ecuaciones paramétricas:

$$\begin{cases} \rho x = a_0 t^n + a_1 t^{n-1} + \ldots + a_n \\ \rho y = b_0 t^n + b_1 t^{n-1} + \ldots + b_n \\ \rho z = c_0 t^n + c_1 t^{n-1} + \ldots + c_n \end{cases} \qquad [2]$$

en las cuales suponemos expresamente que los polinomics que figuran en los segundos miembros no tienen ningún divisor común.

Si eliminamos entre las mismas el factor de proporcionalidad ρ, se obtienen las ecuaciones siguientes:

$$\begin{cases} (a_0 z - c_0 x) t^n + (a_1 z - c_1 x) t^{n-1} + \ldots + (a_n z - c_n x) = 0 \\ (b_0 z - c_0 y) t^n + (b_1 z - c_1 y) t^{n-1} + \ldots + (b_n z - c_n y) = 0 \end{cases} \qquad [3]$$

Ahora bien: Si atribuímos a x, y, z, en estas últimas, los valores que se deducen asignando a t un valor determinado en las fórmulas [2], las ecuaciones [3] resultan evidentemente compatibles. Recíprocamente, cuando las ecuaciones [3] son compatibles para un cierto valor de t, de ellas se deducen para x, y, z, valores particulares que encuadran en las fórmulas [2], y corresponden en consecuencia a las coordenadas de un punto de la curva.

Por lo tanto, la condición para que un punto pertenezca a la curva dada consiste en que sus coordenadas hagan compatibles a las ecuaciones [3].

Pero como la condición de compatibilidad de estas últimas consiste en la anulación del resultante, *escribiendo que dicho resultante es nulo se obtiene la ecuación de la curva dada.*

Sólo nos resta efectuar los cálculos correspondientes.

Identificando las ecuaciones [3] con las [1], se deduce para (i, j) — cuando este símbolo no es nulo por definición — el siguiente valor:

$$(i,j) = \begin{vmatrix} \alpha_i & \alpha_j \\ \beta_i & \beta_j \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_i z - c_i x & a_j z - c_j x \\ b_i z - c_i y & b_j z - c_j y \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a_i z - c_i x & a_j z - c_j x & 0 \\ b_i z - c_i y & b_j z - c_j y & 0 \\ c_i & c_j & 1 \end{vmatrix} = z \begin{vmatrix} a_i & a_j & x \\ b_i & b_j & y \\ c_i & c_j & z \end{vmatrix}.$$

Luego, si designamos por P_{ij} a los respectivos valores que adquieren las R_{ij} cuando se da a los símbolos (i, j) la nueva significación que resulta del cálculo anterior (prescindiendo todavía del factor parásito: z, el cual depende exclusivamente de la manera de conducir la demostración), se obtiene como ecuación implícita de la curva:

$$\begin{vmatrix} P_{11} & P_{12} & \dots & P_{1n} \\ P_{21} & P_{22} & \dots & P_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ P_{n1} & P_{n2} & \dots & P_{nn} \end{vmatrix} = 0, \qquad [4]$$

que, como se observa, se deduce de las ecuaciones paramétricas por una regla de fácil aplicación práctica.

4. *Ejemplo.* — Si consideramos la cisoide, cuyas ecuaciones paramétricas son:

$$x = t^2 \quad , \quad y = t^3 \quad , \quad z = t^2 + 1$$

para formar la ecuación implícita de la misma, según el procedimiento indicado, debemos comenzar por anular el resultante de las cúbicas, o sea:

$$\begin{vmatrix} (01) & (02) & (03) \\ (02) & (03) + (12) & (13) \\ (03) & (13) & (23) \end{vmatrix} = 0.$$

Ahora es cómodo, para efectuar el cálculo de los símbolos binarios, escribir la matriz de los coeficientes de los segundos miembros de las ecuaciones paramétricas, y a la que llamaremos matriz fundamental:

$$\mathcal{M} \equiv \begin{Vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{Vmatrix}.$$

Con ella a la vista se deduce inmediatamente:

$$(01) = \begin{vmatrix} 0 & 1 & x \\ 1 & 0 & y \\ 0 & 1 & z \end{vmatrix} = x - z, \quad (02) = \begin{vmatrix} 0 & 0 & x \\ 1 & 0 & y \\ 0 & 0 & z \end{vmatrix} = 0,$$

y análogamente:

$$(03) = x \quad , \quad (12) = 0 \quad , \quad (13) = -y \quad (23) = 0,$$

y por lo tanto la ecuación de la curva será — según la regla anterior:

$$\begin{vmatrix} x - z & 0 & x \\ 0 & x & -y \\ x & -y & 0 \end{vmatrix} = 0,$$

la cual desarrollada se transforma en la siguiente:

$$x(x^2 + y^2) - y^2 z = 0,$$

de forma bien conocida.

5. — Propongámonos ahora la *determinación de las singularidades* de la curva considerada.

Cuando se trata de una curva algebraica es sabido que los únicos puntos singulares que admite son siempre puntos múltiples.

Podemos dar aquí una definición directa de los mismos en la siguiente forma: Diremos que un punto de la curva es simple, cuando substituídas sus coordenadas en las ecuaciones [3] ocurre que éstas tienen una sola raíz común. En cambio, un punto será múltiple de orden k, cuando substituyendo las coordenadas del mismo en

tales ecuaciones resulta que éstas tienen exactamente k raíces comunes [1].

Resulta de esta definición que la condición necesaria y suficiente para que un punto sea múltiple consiste en que sus coordenadas verifiquen a la ecuación que se obtiene igualando a cero el primer menor principal del determinante que figura en el primer miembro de la ecuación de la curva.

Luego, si hacemos:

$$P_1 \equiv \begin{vmatrix} P_{11} \, P_{12} \dots P_{1n} \\ P_{21} \, P_{22} \dots P_{2n} \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdots \quad \cdot \\ P_{n1} \, P_{n2} \dots P_{nn} \end{vmatrix}, \quad P_2 \equiv \begin{vmatrix} P_{11} & P_{12} & \dots P_{1,n-1} \\ P_{21} & P_{22} & \dots P_{2,n-1} \\ \cdot & \cdot & \cdots \quad \cdot \\ P_{n-1,1} & P_{n-1,2} & \dots P_{n-1,n-1} \end{vmatrix},$$

entonces, la condición para que un punto sea múltiple se reduce a que sus coordenadas verifiquen al sistema formado por las ecuaciones siguientes:

$$\begin{cases} P_1 = 0, \\ P_2 = 0. \end{cases}$$

Ahora bien, si se substituyen x, y, z, en ambas ecuaciones, por sus valores dados por las fórmulas [2], la primera ecuación se verifica idénticamente, y por consecuencia, *para determinar los puntos múltiples de la curva, basta resolver la ecuación que se deduce de* $P_2 = 0$, *al reemplazar las variables coordenadas por sus expresiones paramétricas*, de acuerdo con la definición de la curva.

Llamando T_{ij} al valor que adquiere P_{ij}, después de efectuar dicha substitución, se obtiene como ecuación de los puntos múltiples:

$$\begin{vmatrix} T_{11} & T_{12} & \dots T_{1,n-1} \\ T_{21} & T_{22} & \dots T_{2,n-1} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ T_{n-1,1} & T_{n-1,2} & \dots T_{n-1,n-1} \end{vmatrix} = 0. \qquad [5]$$

[1] Esta definición, que es consecuencia natural de la manera de plantear el problema, da al concepto una precisión de la cual carecen todos los trabajos clásicos.

Se dice en aquéllos que un punto es doble cuando sus coordenadas se obtienen para dos valores del parámetro (naturalmente distintos). Y con esto deberían

Además, si designamos por T_2 al determinante que figura en el primer miembro, y por T_3, T_4, ..., a la cadena de menores principales extraídos del mismo, el punto múltiple será de orden k cuando se verifique precisamente que: $T_2 = T_3 \ldots = T_k = 0$, pero $T_{k+1} \neq 0$.

6. — Si tomamos por ejemplo la cuártica:

$$x = t^4 \ , \ y = t^3 \ , \ z = 1$$

cuyos coeficientes son bastante simples como para permitirnos una comprobación inmediata de los resultados que se deducen al aplicar la teoría, la ecuación de la curva se presenta, según nuestros métodos, bajo la forma siguiente:

$$\begin{vmatrix} z & 0 & 0 & -y \\ 0 & 0 & -y & x \\ 0 & -y & x & 0 \\ -y & x & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0 ,$$

y la ecuación de los puntos múltiples que se deduce, es:

$$T_2 \equiv \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -t^3 \\ 0 & -t^3 & t^4 \end{vmatrix} = 0 .$$

Así el único punto múltiple corresponde al valor $t = 0$ del parámetro y coincide con el origen. Y como se verifica que $T_3 = 0$, mientras que $T_4 \neq 0$, se deduce que dicho punto es triple.

7. — *La aplicación del método indicado,* simple en la práctica (si se prescinde de la extensión de los cálculos, la cual es inevitable al crecer el orden de las curvas), *tropieza, sin embargo, teóricamente, con una grave dificultad, que es necesario aclarar.*

---

eliminarse automáticamente los puntos de retroceso, que sin embargo vuelven a surgir al formar las ecuaciones. La misma crítica merece la definición de punto múltiple en la teoría de las curvas de Jordan.

Puesto que cada T_{ij} proviene de substituir: x, y, z, por polinomios de grado n respecto de t en el polinomio P_{ij} correspondiente, resulta ahora que cada elemento del determinante T_2, que figura en la ecuación de los puntos múltiples, será a su vez un polinomio de grado n respecto de t.

Pero, siendo así, la ecuación de los puntos múltiples resultará de grado: $n(n-1)$ y tendrá, por consecuencia, igual número de raíces. Admitiendo, para fijar ideas, que todos los puntos son dobles, tales raíces se asocian una a una para producir cada par uno de tales puntos, y el número de los mismos resulta por lo tanto igual a: $\dfrac{n(n-1)}{2}$.

Como una curva de orden n no puede tener sino $\dfrac{(n-1)(n-2)}{2}$ puntos dobles a los sumo, parece que el método empleado introdujera soluciones extrañas, que habría que descontar oportunamente.

Vamos a ver que esta suposición es falsa, que el raciocinio por el cual acabamos de establecer el grado de la ecuación de los puntos múltiples es realmente superficial, y que el grado de tal ecuación es efectivamente: $(n-1)(n-2)$.

Habremos logrado esto si conseguimos transformar al determinante que figura en el primer miembro de dicha ecuación en otro cuyos elementos sean polinomios de grado $n-2$ respecto de t.

8. — Se verá más claro tal vez el proceso de reducción que emplearemos en el caso general, si *comenzamos por el caso particular de una cuártica.*

Sean, pues, las ecuaciones de la curva:

$$\begin{cases} x = a_0 t^4 + a_1 t^3 + a_2 t^2 + a_3 t + a_4 \\ y = b_0 t^4 + b_1 t^3 + b_2 t^2 + b_3 t + b_4 \\ z = c_0 t^4 + c_1 t^3 + c_2 t^2 + c_3 t + c_4 \end{cases}$$

Si designamos por $[i, j]$ al valor que adquiere (i, j) cuando se reemplazan: x, y, z, por sus valores según las relaciones anteriores, la ecuación de los puntos múltiples se presenta así:

$$\begin{vmatrix} [01] & [02] & [03] \\ [02] & [03]+[12] & [04]+[13] \\ [03] & [04]+[13] & [14]+[23] \end{vmatrix} = 0.$$

Calculemos ahora los valores de los diferentes símbolos $[i, j]$ que intervienen en la misma. Tendremos:

$$[01] = \begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_0 t^4 + a_1 t^3 + a_2 t^2 + a_3 t + a_4 \\ b_0 & b_1 & b_0 t^4 + b_1 t^3 + b_2 t^2 + b_3 t + b_4 \\ c_0 & c_1 & c_0 t^4 + c_1 t^3 + c_2 t^2 + c_3 t + c_4 \end{vmatrix},$$

y si para abreviar hacemos:

$$(p, q, r) = \begin{vmatrix} a_p & a_q & a_r \\ b_p & b_q & b_r \\ c_p & c_q & c_r \end{vmatrix},$$

(cuando cada uno de los números: p, q, r, son enteros comprendidos entre 0 y n inclusive), y ponemos en cambio:

$$(p, q, r) = 0,$$

(en el caso contrario); tendremos:

$$[01] = (012)\, t^2 + (013)\, t + (014)$$

y análogamente se obtienen:

$$[02] = (023)\, t^3 + (023)\, t + (024)$$
$$[03] = (031)\, t^3 + (032)\, t^2 + (034)$$

. . . .

Substituyendo luego tales valores en la ecuación de los puntos múltiples, ésta aparece — escrita por extenso — de la siguiente manera:

$$\left| \begin{array}{l} (012)\, t^2 + (013)\, t + (014) \\ (021)\, t^3 + (023)\, t + (024) \\ (031)\, t^3 + (032)\, t^2 + (034) \\ \qquad (021)\, t^3 + (023)\, t + (024) \\ \qquad (120)\, t^4 + (031)\, t^3 + (032)\, t^2 + (123)\, t + [(034) + (124)] \\ \qquad (130)\, t^4 + (041)\, t^3 + [(042) + (132)]\, t^2 + (043)\, t + (134) \\ \qquad\quad (031)\, t^3 + (032)\, t^2 + (034) \\ \qquad\quad (130)\, t^4 + (041)\, t^3 + [(042) + (132)]\, t^2 + (043)\, t + (134) \\ \qquad\quad [(140) + (230)]\, t^4 + (231)\, t^3 + (142)\, t^2 + (143)\, t + (234) \end{array} \right| = 0$$

Se observa que los elementos de la primera fila, y también de la primera columna, son de grado 3, con excepción del primero que es de grado 2; en cambio los elementos restantes son todos de grado 4. Se trata de reducir este determinante a otro, cuyos elementos sean todos de grado 2.

La observación del mismo sugiere inmediatamente sumar a los elementos de la segunda fila los de la primera multiplicados por t y también — puesto que se trata de un determinante simétrico — la operación análoga entre las columnas del mismo rango. Y efectuadas sucesivamente estas operaciones, la ecuación adquiere la forma siguiente:

$$\left|\begin{array}{l}
(012)\,t^2 + (013)\,t + (014) \\
(013)\,t^2 + [(023) + (014)]\,t + (024) \\
(031)\,t^3 + (032)\,t^2 + (034) \\
\quad (013)\,t^2 + [(023) + (014)]\,t + (024) \\
\quad [(023) + (014)]\,t^2 + [(123) + 2\,(024)]\,t + [(034) + (124)] \\
\quad [(041) + (032)]\,t^3 + [(042) + (132)]\,t^2 + (134) \\
\qquad (031)\,t^3 + (032)\,t^2 + (034) \\
\qquad [(032) + (041)]\,t^3 + [(042) + (132)]\,t^2 + (134) \\
\qquad [(140) + (230)]\,t^4 + (231)\,t^3 + (142)\,t^2 + (143)\,t + (234)
\end{array}\right| = 0$$

En el determinante transformado, los elementos situados en las dos primeras filas, o bien en las dos primeras columnas, son ahora a lo sumo de grado 3, y precisamente los que se encuentran en la intersección de ambas filas y columnas son de grado 2.

La observación del nuevo determinante sugiere todavía sumar a la tercera fila y a la tercera columna respectivamente la segunda fila y la segunda columna multiplicadas previamente por t. Y esto efectuado *resulta como ecuación definitiva para los puntos múltiples de la cuártica,* la siguiente:

$$\left|\begin{array}{l}
(012)\,t^2 + (013)\,t + (014) \\
(013)\,t^2 + [(023) + (014)]\,t + (024) \\
(014)\,t^2 + (024)\,t + (034) \\
\qquad (013)\,t^2 + [(023) + (014)]\,t + (024) \\
\quad [(023) + (014)]\,t^2 + [(123) + 2\,(024)]\,t + [(034) + (124)] \\
\qquad (024)\,t^2 + [(034) + (124)]\,t + (134) \\
\qquad\qquad (014)\,t^2 + (024)\,t + (034) \\
\qquad\qquad (024)\,t^2 + [(034) + (124)]\,t + (134) \\
\qquad\qquad (034)\,t^2 + (134)\,t + (234)
\end{array}\right| = 0$$

en la cual todos los elementos del determinante son de grado n, como habíamos previsto.

Se nota complementariamente que las transformaciones mediante las cuales llegamos a la ecuación reducida final, no solamente dejan invariante al determinante que figura en el primer miembro, sino también a la cadena de menores principales extraída del mismo, y en consecuencia valen aquí todavía los criterios antes enunciados para determinar el orden de multiplicidad de cada punto singular.

Finalmente, el grado de la ecuación reducida no puede ser rebajado ulteriormente en el caso general, desde que tomando el ejemplo particular propuesto en el § 6, la ecuación de los puntos múltiples alcanza efectivamente el grado: (n-1) (n-2) = 6.

Por otra parte, si, como es habitual cuando se presentan dificultades de esta naturaleza, se introducen abscisas homogéneas: (u,v) para representar al parámetro t — lo cual tiene por objeto recuperar las soluciones que se pierden aparentemente por hacerse impropias — entonces la ecuación de los puntos múltiples es siempre efectivamente de grado: (n-1) (n-2) = 6. A menos que dicha ecuación se verifique idénticamente, caso absolutamente excepcional sobre el cual hemos de volver más adelante.

9. — Corresponde ahora *demostrar, en el caso general de una curva de orden*: n, *que la ecuación que determina los puntos múltiples de la misma es efectivamente de grado*: $(n-1)\ (n-2)$. Y si bien el caso particular considerado nos pone sobre la huella de esta demostración, la prueba completa va a demorarnos todavía, y nos obligará a penetrar minuciosamente en las particularidades analíticas de la ecuación.

Recordemos que *tal ecuación se presenta inicialmente bajo la forma siguiente*:

$$T_2 = \begin{vmatrix} T_{11} & T_{12} & \dots & T_{1,n-1} \\ T_{21} & T_{22} & \dots & T_{2,n-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ T_{n-1,1} & T_{n-1,2} & \dots & T_{n-1,n-1} \end{vmatrix} = 0 \qquad [5]$$

en la cual:

$$T_{ij} = [0, i+j-1] + [1, i+j-2] + \dots + [i-1, j].$$

Teniendo presente la definición de los símbolos que aparecen en el segundo miembro (véase § 8), si desarrollamos el cálculo se obtiene:

$$\begin{cases} T_{ij} = (0,i+j-1,0)t^n+(0,i+j-1,1)t^{n-1}+\ldots+(0,i+j-1,n) \\ \quad + (1,i+j-2,0)t^n+(1,i+j-2,1)t^{n-1}+\ldots+(1,i+j-2,n) \\ \quad + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \quad + (i-1,j,0)\,t^n + (i-1,j,1)\,t^{n-1} + \ldots + (i-1,j,n) \end{cases} \qquad [6]$$

de manera que si para abreviar introducimos un nuevo símbolo ternario, a saber:

$$[i,j,k] = (0,i+j-1,k)+(1,i+j-2,k)+\ldots+(i-1,j,k) \qquad [7]$$

tendremos, como expresión del término genérico del determinante [5]:

$$T_{ij} = [i,j,0]\,t^n + [i,j,1]\,t^{n-1} + \ldots + [i,j,n]. \qquad [8]$$

Vamos a someter a dicho determinante a las siguientes transformaciones — las cuales dejan invariante no solamente al mismo sino también a su cadena de menores principales:

Sumaremos a la segunda fila la primera multiplicada por t, y luego a la segunda columna la primera multiplicada por t.

En el determinante transformado, sumaremos a la tercera fila la segunda multiplicada por t, y luego a la tercera columna la segunda multiplicada igualmente por t.

Y así proseguiremos hasta agotar la totalidad de las filas y columnas.

Con lo cual, si llamamos M_{ij} al elemento genérico del determinante transformado, *le ecuación de los puntos múltiples se presentará bajo la forma siguiente*:

$$M_2 = \begin{vmatrix} M_{11} & M_{12} & \ldots & M_{1,n-1} \\ M_{21} & M_{22} & \ldots & M_{2,n-1} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ M_{n-1,1} & M_{n-1,2} & \ldots & M_{n-1,n-1} \end{vmatrix} = 0 \qquad [9]$$

a la que denominaremos ecuación reducida.

Si se siguen a través de un esquema los efectos de las operaciones mediante las cuales se obtiene la ecuación anterior, se establecen fácilmente las siguientes relaciones de recurrencia:

$$\begin{cases} M_{11} = T_{11} \\ M_{1j} = T_{1j} + t\, M_{1,j-1} \\ M_{ij} = T_{ij} + (M_{i-1,j} + M_{i,j-1})\, t - M_{i-1,j-1}\, t^2 \end{cases} \qquad [10]$$

y también la expresión general de los elementos del determinante M_2 en función de los elementos del determinante T_2, a saber:

$$\begin{cases} M_{ij} = T_{11}\, t^{i+j-2} + T_{12}\, t^{i+j-3} + \ldots + T_{1j}\, t^{i-1} \\ \quad + T_{21}\, t^{i+j-3} + T_{22}\, t^{i+j-4} + \ldots + T_{2j}\, t^{i-2} \\ \quad + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \quad + T_{i1}\, t^{j-1} + T_{i2}\, t^{j-2} + \ldots + T_{ij}\, . \end{cases} \qquad [11]$$

10. — *Busquemos ahora la expresión de los elementos M_{ij} en función de los coeficientes de las ecuaciones de la curva dada,* para lo cual vamos a utilizar los símbolos: (p, q, r).

Teniendo presente la fórmula [11] del párrafo anterior, fijémonos en el coeficiente de t^k en el desarrollo de la misma, y al cual designaremos por: m_{ijk}.

La parte de dicho coeficiente que proviene del término: $T_{11}\, t^{i+j-2}$, procede del coeficiente del monomio

$$[1, 1, \lambda]\, t^{n-\lambda+i+j-2}$$

en cuanto el exponente de t se identifica con k. Y por lo tanto, debiendo ser:

$$n - \lambda + i + j - 2 = k$$

resulta

$$\lambda = n + i + j - k - 2,$$

y así dicha contribución es igual a

$$[1, 1, n + i + j - k - 2]\, .$$

Tomando ahora un término general de la fórmula [11], la parte del coeficiente: m_{ijk} que proviene, p. ej., del término: $T_{i'j'}\, t^{i+j-i'-j'}$, viene dada por el coeficiente del monomio:

$$[i', j', \lambda]\, t^{n-\lambda+i+j-i'-j'}$$

en cuanto al exponente de t se identifica también con k, o sea cuando

$$n - \lambda + i + j - i' - j' = k$$

lo que nos da

$$\lambda = n + i + j - k - i' - j',$$

y así, dicha parte del coeficiente considerado es precisamente

$$[i', j', n + i + j - k - i' - j'].$$

Reuniendo todos los resultados, se obtiene como valor de dicho coeficiente:

$$\left\{\begin{aligned} m_{ijk} = {} & [1,1,n+i+j-k-2]+[1,2,n+i+j-k-3]+\ldots+[1,j,n+i-k-1] \\ & +[2,1,n+i+j-k-3]+[2,2,n+i+j-k-4]+\ldots+[2,j,n+i-k-2] \\ & + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ & +[i,1,n+j-k-1]+[i,2,n+j-k-2]+\ldots+[i,j,n-k]. \end{aligned}\right. \qquad [12]$$

Si reemplazamos en la fórmula anterior cada símbolo $[p, q, r]$ por la suma de los símbolos (p, q, r) correspondiente, de acuerdo con la definición de los primeros — según la fórmula [7] —, se puede descomponer la suma del cuadro anterior en una suma de cuadros análogos, que formaremos ajustándonos a las siguientes reglas:

En un primer cuadro — cuya suma designaremos por $m_{ijk}^{(0)}$ — reservaremos exclusivamente el primer término del desarrollo de cada $[p, q, r,]$ a saber: cada $(o, p + q - 1, r)$ correspondiente;

En un segundo cuadro — cuya suma designaremos por $m_{ijk}^{(1)}$ — reservaremos exclusivamente el segundo térfmino del desarrollo de cada $[p, q, r]$, a saber: cada $(1,\ p + q - 2,\ r)$ correspondiente; etc.

Tendremos de tal manera descompuesto m_{ijk} en i sumandos:

$$m_{ijk} = m_{ijk}^{(0)} + m_{ijk}^{(1)} + \ldots + m_{ijk}^{(i-1)} \qquad [13]$$

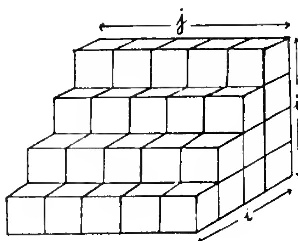
estando constituído el término genérico del segundo miembro por la expresión:

$$\left| \begin{aligned} m_{ijk}^{(h)} = {} & (h,1,n+i+j-k-h-2) + (h,2,n+i+j-k-h-3) + \ldots \\ & + (h,j-1,n+i-k-h) + (h,j,n+i-k-h-1) \\ & + (h,2,n+i+j-k-h-3) + (h,3,n+i+j-k-h-4) + \ldots \\ & + (h,j,n+i-k-h-1) + (h,j+1,n+i-k-h-2) \\ & + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \qquad [14] \\ & + (h,i-h-1,n+j-k) + (h,i-h,n+j-k-1) + \ldots \\ & + (h,i+j-h-3,n-k+2) + (h,i+j-h-2,n-k+1) \\ & + (h,i-h,n+j-k-1) + (h,i-h+1,n+j-k-2) + \ldots \\ & + (h,i+j-h-2,n-k+1) + (h,i+j-h-1,n-k) \end{aligned} \right.$$

en la cual debe darse al índice h, sucesivamente, los valores: 0, 1, ..., $(i-1)$.

Conviene observar que el rectángulo numérico del segundo miembro se compone de $i-h$ filas y de j columnas; así, p. ej.: $m_{ijk}^{(0)}$ será una suma de ij sumandos, en tanto que $m_{ijk}^{(i-1)}$ constará solamente de j sumandos (1).

(1) Las fórmulas (13) y (14) revelan en la composición formal de los símbolos m_{ijk} una estructura espacial que conviene conocer para la interpretación cómoda de los desarrollos subsiguientes.



En efecto, simbolizando cada determinante ternario por un cubo, tales fórmulas muestran que m_{ijk} es una figura prismática, cuyas dimensiones dependen de los índices i y j. En cuanto al índice k, afecta solamente al valor de los términos, y provoca — según se observa en el párrafo siguiente — nuevas descomposiciones de la figura anterior.

11. — Las fórmulas establecidas en el párrafo anterior conducen ahora rápidamente a la determinación del grado de la ecuación de los puntos múltiples.

Probaremos:

1°) *Que en el desarrollo de cada* M_{ij} *son nulos los términos de grado*: $n - 1$.

En efecto, si en la fórmula [14] hacemos: $k = n - 1$, se obtiene:

$$\begin{aligned} m_{i,j,n-1}^{(h)} = & (h,1,i+j-h-1)+(h,2,i+j-h-2)+\ldots+(h,j-1,i-h+1)+(h,j,i-h) \\ & +(h,2,i+j-h-2)+(h,3,i+j-h-3)+\ldots+(h,j,i-h)+(h,j+1,i-h-1) \\ & + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ & +(h,i-h-1,j+1)+(h,i-h,j)+\ldots+(h,i+j-h-3,3)+(h,i+j-h-2,2) \\ & +(h,i-h,j)+(h,i-h+1,j-1)+\ldots+(h,i+j-h-2,2)+(h,i+j-h-1,1). \end{aligned}$$

La observación del rectángulo numérico del segundo miembro revela que dos elementos simétricos respecto del centro del mismo son tales que: si uno de ellos está formado por el símbolo: (p, q, r), el otro está formado por el símbolo: (p, r, q), y como evidentemente (según la definición de estos símbolos, dada en el § 8)

$$(p, q, r) + (p, r, q) = 0$$

de allí se deduce:

$$m_{i,j,n-1}^{(h)} = 0,$$

cualesquiera que sean los índices variables: i, j, h, y teniendo en cuenta la fórmula [13] se deduce:

$$m_{i,j,n-1} = 0\,,$$

lo que demuestra la proposición.

2°) *También en el desarrollo de cada* M_{ij} *son nulos los términos de grado*: n.

En efecto, si en la fórmula [14] hacemos ahora $k = n$, los sumandos del segundo miembro se distribuyen naturalmente en dos grupos, que designaremos por $\mu_{ijn}^{(h)}$ y $\nu_{ijn}^{(h)}$, tales que

$$m_{ijn}^{(h)} = \mu_{ijn}^{(h)} + \nu_{ijn}^{(h)}\,.$$

El primer grupo se compone de los sumandos que figuran en las $(j-1)$ primeras columnas de la fórmula considerada, y vale:

$$\left\{\begin{array}{l} \mu_{ijn}^{(h)} = (h,1,i+j-h-2)+(h,2,i+j-h-3)+\ldots+(h,j-1,i-h) \\ \quad +(h,2,i+j-h-3)+(h,3,i+j-h-4)+\ldots+(h,j,i-h-1) \\ \quad +\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \quad +(h,i-h-1,j)+(h,i-h,j-1)+\ldots+(h,i+j-h-3,2) \\ \quad +(h,i-h,j-1)+(h,i-h+1,j-2)+\ldots+(h,i+j-h-2,1) \end{array}\right.$$

En cuanto al segundo grupo, contiene los sumandos que figuran en la última columna de la misma fórmula [14], y cuya expresión es:

$$\nu_{ijn}^{(h)} = (h,j,i-h-1)+(h,j+1,i-h-2)+\ldots+$$
$$+(h,i+j-h-2,1)+(h,i+j-h-1,0)\,.$$

Respecto del primer grupo cabe aquí una observación análoga a la que utilizamos en la demostración del lema anterior — pues es nula nuevamente la suma de dos elementos simétricos respecto del centro del rectángulo numérico correspondiente — y como de allí resulta: $\mu_{ijn}^{(h)} = 0$, se deduce:

$$m_{ijn}^{(h)} = \nu_{ijn}^{(h)}\,.$$

Substituyendo este valor en la fórmula [13] obtenemos:

$$m_{ijn} = \nu_{ijn}^{(0)} + \nu_{ijn}^{(1)} + \ldots + \nu_{ijn}^{(i-2)} + \nu_{ijn}^{(i-1)}$$

y ahora desarrollando el segundo miembro nos queda:

$$\left\{\begin{array}{l} m_{ijn} = (0,j,i-1)+(0,j+1,i-2)+\ldots+(0,i+j-2,1)+(0,i+j-1,0) \\ \quad +(1,j,i-2)+(1,j+1,i-3)+\ldots+(1,i+j-2,0) \\ \quad +\ldots\ldots+\ldots\ldots\ldots+\ldots \\ \quad +(i-2,j,1)+(i-2,j+1,0) \\ \quad +(i-1,j,0) \end{array}\right. .$$

Pero en este triángulo numérico, la suma de los elementos de cada columna es nula — por ser iguales en valor absoluto y de dis-

tinto signo los términos equidistantes de los extremos de una misma columna — de donde resulta:

$$m_{ijn} = 0$$

lo que comprueba el enunciado.

3°) *Finalmente, en el desarrollo de cada M_{ij} son nulos todos los términos de grado:* $> n - 2$.

Para demostrarlo nos basta recurrir a las fórmulas [10] del § 9, teniendo presente además que cada T_{ij} es de grado n a lo sumo.

Según la primera, el hecho es cierto para M_{11} si se recuerdan los dos lemas demostrados más arriba.

Ahora, tomando la segunda fórmula, si en ella hacemos: $j = 2$, se comprueba que el hecho subsiste para M_{12}, y razonando por inducción se establece también para todo M_{1j}, y en consecuencia igualmente para todo M_{i1}.

En fin, si se utiliza la tercera de dichas fórmulas y se razona por inducción la propiedad se verifica para cualquier M_{ij}.

Volviendo entonces sobre la ecuación [9] *deducimos que el grado de la misma — y por lo tanto también el grado de la ecuación* [5], *que es equivalente de aquélla — es:* $(n - 1)(n - 2)$.

12. — Queda completamente demostrado con lo anterior que — si se prescinde del caso excepcional, ya mencionado, en el cual la ecuación de los puntos múltiples se verifica idénticamente — tal ecuación es (para una curva unicursal de orden: n), de grado: $(n - 1)(n - 2)$.

Este resultado es aquí tan importante por sí como con relación al método estudiado, pues revela una propiedad del mismo que es verdaderamente excepcional en esta clase de cuestiones, a saber: *No introduce soluciones extrañas al problema que se trata de resolver.*

En fin, del estudio que acabamos de hacer de dicha ecuación se desprenden todavía ciertas consecuencias que podrían ser útiles para la ejecución práctica de los cálculos a los cuales conduce dicho método. y de las cuales vamos a conformarnos con esta mención, por cuanto no habremos de utilizarlas en este trabajo.

13. — Indicaremos ahora someramente, y sin pretender en modo alguno ser completos, la solución de algunos problemas estrechamente vinculados con la determinación de los puntos múltiples.

1°) *Determinar el valor del parámetro que corresponde a un punto de la curva cuyas coordenadas se conocen.*

Teniendo la ecuación de la curva bajo la forma [4], reconoceríamos el orden de multiplicidad del punto dado por el examen de la cadena de menores principales del resultante que aparece en el primer miembro.

Y luego, según los resultados consignados en el párrafo 2:

Para un *punto simple*, el valor correspondiente: τ del parámetro, vendría determinado por la ecuación de primer grado en τ:

$$\begin{vmatrix} P_{11} & P_{12} & \dots & P_{1n-1} & \tau + P_{1,n} \\ P_{21} & P_{22} & \dots & P_{2,n-1} & \tau + P_{2.n} \\ . & . & \dots & . & . \\ P_{n-1,1} & P_{n-1,2} & \dots & P_{n-1,n-1} & \tau + P_{n-1,n} \end{vmatrix} = 0 \qquad [15]$$

y sería por lo tanto:

$$\tau = -\begin{vmatrix} P_{11} & P_{12} & \dots & P_{1n} \\ P_{21} & P_{22} & \dots & P_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ P_{n-1.1} & P_{n-1,2} & \dots & P_{n-1.n} \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} P_{11} & P_{12} & \dots & P_{1,n-1} \\ P_{21} & P_{22} & \dots & P_{2,n-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ P_{n-1,1} & P_{n-1,2} & \dots & P_{n-1,n-1} \end{vmatrix} \qquad [16]$$

Para un *punto doble*, los dos valores correspondientes del parámetro vendrían dados por las raíces de la ecuación de segundo grado:

$$\begin{vmatrix} P_{11} & P_{12} & \dots & P_{1,n-2} & \tau^2 + P_{1,n-1} & \tau + P_{1.n} \\ P_{21} & P_{22} & \dots & P_{2.n-2} & \tau^2 + P_{2,n-1} & \tau + P_{2.n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ P_{n-2.1} & P_{n-2,2} & \dots & P_{n-2,n-2} & \tau^2 + P_{n-2,n-1} & \tau + P_{n-2,n} \end{vmatrix} = 0 \qquad [17]$$

etc.

2°) *Dado un valor del parámetro, correspondiente a un punto múltiple, determinar los restantes valores del parámetro que corresponden al mismo punto múltiple.*

Si para simplificar la exposición suponemos que al valor t del parámetro corresponde un punto doble, reemplazando en la ecuación [17] las coordenadas: x, y, z, por sus expresiones en función de t, según las ecuaciones de la curva, entonces las P_{ij} se convertirán — de acuerdo con las notaciones que usamos — en las T_{ij} correspon-

dientes. Con lo cual la ecuación considerada adquirirá la forma siguiente:

$$\begin{vmatrix} T_{11} & T_{12} & \dots & T_{1,n-2}\,\tau^2 + T_{1,n-1}\,\tau + T_{1,n} \\ T_{21} & T_{22} & \dots & T_{2,n-2}\,\tau^2 + T_{2,n-1}\,\tau + T_{2,n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ T_{n-2,1} & T_{n-2,2} & \dots & T_{n-2,n-2}\,\tau^2 + T_{n-2,n-1}\,\tau + T_{n-2,n} \end{vmatrix} = 0. \quad [18]$$

Como esta ecuación debe verificarse idénticamente si tomamos: $\tau = t$, resulta que el primer miembro será divisible por el binomio: $\tau - t$, y como el cociente debe ser de primer grado respecto de τ, al simplificar por dicho binomio la ecuación tomará la forma siguiente:

$$A\ (t)\ .\ \tau + B\ (t) = 0 \quad [19]$$

en la cual A y B son polinomios en t, que pueden siempre suponerse de grado menor que: $(n-1)\ (n-2)$.

Y al resolver la ecuación [19] respecto de τ, quedaría determinado el segundo valor del parámetro — que corresponde al punto doble considerado — en función racional del primero.

Si se tratara de un punto triple, la aplicación de consideraciones análogas nos llevaría a la determinación de los dos valores restantes mediante una ecuación de segundo grado respecto de τ; etc.

Notemos incidentalmente, que el problema de álgebra que nace de esta cuestión puede ofrecer un gran interés en la teoría de las ecuaciones, aún independientemente del tema que tratamos.

Pues cuando todos los puntos son dobles ocurre que, en la ecuación que los determina, una cierta función racional de cada raíz — a saber: $\tau = -\dfrac{B\ (t)}{A\ (t)}$ — conduce a otra raíz de la misma ecuación. Y así, degún las memorables investigaciones realizadas por Abel en la teoría de las ecuaciones algebraicas, la ecuación de los puntos dobles se puede resolver apelando a otras de grado inferior.

Pero para los puntos múltiples, cuyo orden de multiplicidad es mayor que 2, se plantea aquí un problema mucho más general, y que no sabemos si ha sido abordado.

3°) *Determinación de las tangentes singulares.*

Sean: $(x_0\ y_0\ z_0)$, las coordenadas de un punto múltiple de la curva, obtenido atribuyendo al parámetro el valor: $t = t_0$.

La ecuación de la secante que une dicho punto con el punto arbitrario de la curva, cuyas coordenadas son: $(a_0 t^n + \ldots + a^n \mid b_0 t^n + + \ldots + b_n \mid c_0 t^n + \ldots + c_n)$, y que para abreviar representaremos por: $[x(t) \mid y(t) \mid z(t)]$ será:

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ x_0 & y_0 & z_0 \\ x(t) & y(t) & z(t) \end{vmatrix} = 0$$

es decir:

$$[y_0 z(t) - z_0 y(t)]\, x + [z_0 x(t) - x_0 z(t)]\, y + [x_0 y(t) - y_0 x(t)]\, z = 0.$$

Pero, siendo dicho punto múltiple de orden p, p. ej., y si los valores conjugados de t_0 son: $t_1, t_2, \ldots, t_{p-1}$, los corchetes que figuran como coeficientes de las variables coordenadas son divisibles por la expresión:

$$p(t) = (t - t_0)(t - t_1) \ldots (t - t_{p-1})$$

y, si hacemos

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{y_0 z(t) - z_0 y(t)}{p(t)} &= \xi(t) \\ \frac{z_0 x(t) - x_0 z(t)}{p(t)} &= \eta(t) \\ \frac{x_0 y(t) - y_0 x(t)}{p(t)} &= \zeta(t) \end{aligned} \right.$$

entonces, la ecuación de dicha secante podrá escribirse también así:

$$\xi(t)\, x + \eta(t)\, y + \zeta(t)\, z = 0$$

la cual ofrece la ventaja, sobre la primera forma, de no ser indeterminada para ningún valor de t.

Ahora, si suponemos que $t \longrightarrow t_0$, la secante tenderá hacia una posición límite, en la cual se confundirá con la recta:

$$\xi(t_0)\, x + \eta(t_0)\, y + \zeta(t_0)\, z = 0$$

que no es otra cosa que la tangente a aquella rama de la curva que se obtiene considerando un entorno convenientemente pequeño del valor: $t = t_0$ del parámetro.

Es claro que habrá así tantas tangentes diferentes, en cada punto singular, cuantos sean los distintos valores del parámetro para los cuales se deduce dicho punto. Es claro que quedan comprendidas también en estas consideraciones las tangentes ordinarias en los puntos simples de la curva.

14. *Ejemplo.* — Sea la cuártica definida por las ecuaciones siguientes:

$$\begin{cases} x = t^4 + 2\,t^3 + 2\,t^2 + 2\,t + 1, \\ y = 2\,t^4 + 2\,t^2, \\ z = 2\,t^4 + 4\,t^3 + 2\,t^2. \end{cases}$$

La ecuación implícita de la misma es aquí:

$$\begin{vmatrix} 8\,x - 4\,z & 2\,y - 2\,z & 4\,y - 4\,z & 2\,y - 2\,z \\ 2\,y - 2\,z & -8\,x + 8\,y & 10\,y - 2\,z & 4\,y \\ 4\,y - 4\,z & 10\,y - 2\,z & 8\,y - 4\,z & 2\,y - 2\,z \\ 2\,y - 2\,z & 4\,y & 2\,y - 2\,z & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

y de ella se deduce como ecuación de los puntos múltiples:

$$\begin{vmatrix} t^2 + 2\,t + 1 & 2\,t^2 + t & t^2 \\ 2\,t^2 + t & t^2 - 2\,t - 1 & -t \\ t^2 & -t & 0 \end{vmatrix} = 0$$

la cual desarrollada nos da:

$$t^2\,(t + 1)^2\,(t^2 + 1) = 0,$$

cuyas raíces son:

$$t_1 = 0, \quad t_2 = 0, \quad t_3 = -1, \quad t_4 = -1, \quad t_5 = i, \quad t_6 = -i.$$

Como ninguna de tales raíces satisface a la ecuación:

$$\begin{vmatrix} t^2 + 2t + 1 & 2t^2 + t \\ 2t^2 + t & t^2 - 2t - 1 \end{vmatrix} = 0,$$

(que se obtiene igualando a cero el menor principal subsiguiente), esto significa que los puntos múltiples de la curva son exclusivamente puntos dobles.

La ecuación que determina el valor del parámetro correspondiente a un punto simple es aquí la siguiente:

$$\tau = - \frac{\begin{vmatrix} 8x - 4z & 2y - 2z & 2y - 2z \\ 2y - 2z & -8x + 8y & 4y \\ 4y - 4z & 10y - 2z & 2y - 2z \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 8x - 4z & 2y - 2z & 4y - 4z \\ 2y - 2z & -8x + 8y & 10y - 2z \\ 4y - 4z & 10y - 2z & 8y - 4z \end{vmatrix}}$$

habiéndose omitido las reducciones finales pues el resultado no ofrece mayor interés para nuestra cuestión.

Más importante es la ecuación que determina los valores del parámetro correspondientes a los puntos dobles en función de las coordenadas.

Según los resultados del párrafo anterior, esta ecuación se presenta aquí bajo la forma siguiente:

$$\begin{vmatrix} 8x - 4z & (2y - 2z)\tau^2 + (4y - 4z)\tau + (2y - 2z) \\ 2y - 2z & (-8x + 8y)\tau^2 + (10y - 2z)\tau + 4y \end{vmatrix} = 0$$

y substituyendo las coordenadas por sus expresiones paramétricas, queda:

$$\begin{vmatrix} 8t^2 + 16t + 8 & -8t^3\tau^2 & -16t^3\tau \\ -8t^3 & (8t^4 - 16t^3 - 16t - 8)\tau^2 + (16t^4 - 8t^3 + 16t^2)\tau + (8t^4 + 8t^2) & \end{vmatrix} = 0$$

la cual desarrollada, y después de suprimir el factor banal: $\tau - t$ nos da la ecuación:

$$(3\,t^4 + 4\,t^3 + 5\,t^2 + 4\,t + 1)\,\tau + (2\,t^4 + 2\,t^3 + 2\,t^2 + t) = 0$$

que determina, para cada valor del parámetro correspondiente a un punto doble, el valor conjugado respectivo.

Así, para $t = 0$, resulta $\tau = 0$; para $t = -1$, $\tau = -1$, y para $t = i$, $\tau = -i$. Los tres puntos dobles correspondientes son, respectivamente: $D_1 \equiv (1\,|0|\,0\,)$; $D_2 \equiv (0\,|1|\,1\,)$; $D_3 \equiv (0\,|0|\,1)$.

Busquemos, en fin, las ecuaciones de las tangentes singulares.

La secante trazada por D_1, tiene como ecuación:

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ 1 & 0 & 0 \\ (t+1)^2\,(t^2+1) & 2\,t^2\,(t^2+1) & 2\,t^2\,(t+1)^2 \end{vmatrix} = 0$$

o sea

$$2\,t^2\,(t+1)^2\,y - 2\,t^2\,(t^2+1)\,z = 0$$

y se observa que el primer miembro tiene el divisor — previsto por la teoría— : $2\,t^2$. Eliminado éste, dicha ecuación queda bajo la forma siguiente:

$$(t+1)^2\,y - (t^2+1)\,z = 0$$

y, para: $t = 0$, obtenemos

$$y - z = 0$$

que es la ecuación de la tangente única en dicho punto doble: éste es por lo tanto una cúspide.

Análogamente, la secante trazada por D_2, tiene como ecuación:

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ 0 & 1 & 0 \\ (t+1)^2\,(t^2+1) & 2\,t^2\,(t^2+1) & 2\,t^2\,(t+1)^2 \end{vmatrix} = 0$$

o sea desarrollando y después de simplificar el factor: $(t + 1)^2$:

$$2\,t^2\,x - (t^2 + 1)\,z = 0$$

en la cual, al hacer: $t = -1$, obtenemos

$$x - z = 0$$

que corresponde a la tangente única en D_2, el cual resulta ser también una cúspide.

Por último la ecuación de la secante que pasa por D_3 se presenta después de toda simplificación bajo la forma siguiente:

$$2\,t^2\,x - (t + 1)^2\,y = 0.$$

Como esta vez hay dos valores del parámetro: $+i$ y $-i$, que determinan al punto doble, se obtienen también dos tangentes singulares distintas, a saber:

$$x + i\,y = 0, \quad x - i\,y = 0$$

y, por lo tanto, el punto doble es un nodo, o, más bien — cuando se distinguen elementos reales y complejos — un punto aislado.

15. — Finalmente, la cuestión relativa a la *reducción de las representaciones impropias de tales curvas a otras representaciones propias*, a la cual hemos aludido varias veces, y que aparece dominada en los métodos clásicos por un teorema famoso de Lüroth, no es independiente de la teoría que aquí venimos desarrollando, y se presenta más bien como un caso particular de la misma.

Para no alargar demasiado la exposición mostremos sobre un ejemplo que es familiar en los tratados (1), las consideraciones mediante las cuales se resuelve esta cuestión.

Sea la cuártica definida por las ecuaciones:

$$\begin{cases} x = t^4 + 2\,t^2 + 1 \\ y = t^3 + t \\ z = t^4 + 3\,t^2 + 1 \end{cases}$$

(1) Véase, p. ej.: Appell et Goursat, *Fonctions algebriques*, t. I, pág. 284; y también: Bertini, *Geometria proiettiva degli iperspazi*, Cap. XIV.

Aplicando los resultados obtenidos, se tiene como ecuación de la curva:

$$\begin{vmatrix} z-x & -y & z-x & 0 \\ -y & 2x-z & 0 & x-z \\ z-x & 0 & z-2x & y \\ 0 & x-z & y & x-z \end{vmatrix} = 0$$

la cual desarrollada nos da

$$(x^2 + y^2 - xz)^2 = 0,$$

y se observa en esta forma (si se supone que las coordenadas son cartesianas y ortogonales) que se trata de una circunferencia computada dos veces.

Independientemente de esta consideración, si formamos la ecuación de los puntos múltiples de tal curva, obtenemos:

$$\begin{vmatrix} t^2 & -t^3-t & t^2 \\ -t^3-t & t^4+t^2+1 & 0 \\ t^2 & 0 & -t^4-t^2-1 \end{vmatrix} = 0$$

y, al desarrollarla, nos encontramos con una identidad, lo cual significa que todos los puntos son al menos dobles.

Pero como la ecuación que se obtiene igualando a cero al menor principal subsiguiente de la anterior, o sea

$$\begin{vmatrix} t^2 & -t^3-t \\ -t^3-t & t^4+t^2+1 \end{vmatrix} = 0$$

no se satisface sino para particulares valores de t, esto significa que todos los puntos son generalmente dobles.

Ahora, formando la ecuación según la cual se asocian los dos valores del parámetro que determinan cada punto, obtenemos:

$$\begin{vmatrix} z-x & -y\tau^2 + (z-x)\tau \\ -y & (2x-z)\tau^2 + (x-z) \end{vmatrix} = 0$$

y, al reemplazar: x, y, z, por sus valores en función de t, se deduce:

$$\begin{vmatrix} t^2 & -(t^3+t)\,\tau^2 + t^2\,\tau \\ -t^3 - t & (t^4+t^2+1)\,\tau^2 - t^2 \end{vmatrix} = 0$$

o sea, desarrollando y simplificando:

$$t\,\tau^2 - (t^2+1)\,\tau + t = 0.$$

Esta ecuación coincide — tanto en este caso particular, como en el caso general que nos abstenemos de tratar — con la ecuación que sirve de base a Lüroth para deducir el cambio de variable que convierte dicha representación impropia en otra propia. Concretándonos aquí simplemente al ejemplo propuesto, se pueden substituir las consideraciones teóricas por el siguiente raciocinio:

Después de dividir el primer miembro de la ecuación anterior por el binomio: $\tau - t$, dicha ecuación se convierte en

$$t\,\tau - 1 = 0.$$

Este resultado significa que cada valor del parámetro: t, se asocia con su inverso: $\frac{1}{t}$, para producir un mismo punto de la curva.

Pero entonces, las expresiones simétricas de la misma deben ser — a menos de un factor racional — funciones simétricas de las variables: t y $\frac{1}{t}$, esto es, funciones racionales de

$$t + \frac{1}{t} \quad \text{y} \quad t \,.\, \frac{1}{t} = 1$$

y, puesto que la segunda se reduce a una constante, funciones racionales simplemente de

$$t + \frac{1}{t} = u$$

Y, en efecto, si dividimos cada coordenada por: t^2, nos quedan como ecuaciones de la curva:

$$x = t^2 + 2 + \frac{1}{t^2} \quad ; \quad y = t + \frac{1}{t} \quad ; \quad z = t^2 + 3 + \frac{1}{t^2} \; ;$$

o sea

$$x = u^2 \quad ; \quad y = u \quad ; \quad z = u^2 + 1;$$

que constituyen la representación propia de la misma.

16. — En lo que precede nos hemos ocupado exclusivamente de los puntos singulares y deberíamos ahora completar la exposición tratando de las tangentes múltiples.

Esta cuestión, como se sabe por las memorias clásicas, no es esencialmente diferente de la anterior. Pero el análisis hecho aquí contribuye a poner en los resultados conocidos una precisión mucho mayor.

Buenos Aires, abril 21 de 1938.

DISPOSITIVO PARA LA TÉCNICA CON ELECTRODO GOTERO DE MERCURIO (POLAROGRAFÍA DE HEYROVSKÝ)

POR

REINALDO VANOSSI

El empleo de un electrodo gotero de mercurio como medio de investigación en química, y particularmente en el campo del análisis, ha sido introducido por Heyrovský, desde 1922 a 1923, aplicando el tipo de electrodo ya empleado por Kucera en 1903. El sistema constituído sobre esta base ha sido designado « polarografía », por su fundador, y constituye un excelente instrumento de trabajo, sin llegar a ser, naturalmente, para la química analítica, un medio de aplicación general, como a veces podría hacerse aparecer.

Sus diversas aplicaciones están descritas en la numerosa bibliografía existente, y de ello dan cuenta, en particular, las obras de Heyrovský ([1], [1 bis]), Hohn ([3]) y Semerano ([5]).

La presente nota se refiere a varias modificaciones en el sistema electrolítico, en particular; las cuales, en el pensamiento del autor, introducen alguna mejora en la técnica general operatoria. Por otra parte debe agregarse que se ha trabajado por método visual directo y con los siguientes elementos en el circuito eléctrico: Acumulador 4 V, potenciómetro tipo tambor de Kohlrausch, voltímetro 3 V, galvanómetro de sensibilidad máxima 3.10^{-9} A; resistencias: reguladoras de la tensión del potenciómetro, para shunt y serie del galvanómetro; llave inversora (para poder hacer actuar al electrodo gotero como cátodo o ánodo); todo del tipo común, de buena calidad, empleado en radiotelefonía, montados sobre una plancha de « bakelita ». El potencial del electrodo impolarizable, se ha medido, cuando se ha considerado necesario, mediante un voltímetro a válvula, sobre la base del doble triodo, que fué aplicado por Hiltner ([2]) y luego adaptado al tipo americano N° 19, por el autor ([6]); con este aparato no se altera la forma de las curvas polarográficas y se obtiene una aproximación de 1-2 mV (cuidando la aislación, incluso del sistema

polarográfico), leyéndose directamente, durante todo el curso de las operaciones, el valor del potencial del electrodo mencionado, y también, si interesa, al iniciar la operación, y antes de cerrar el

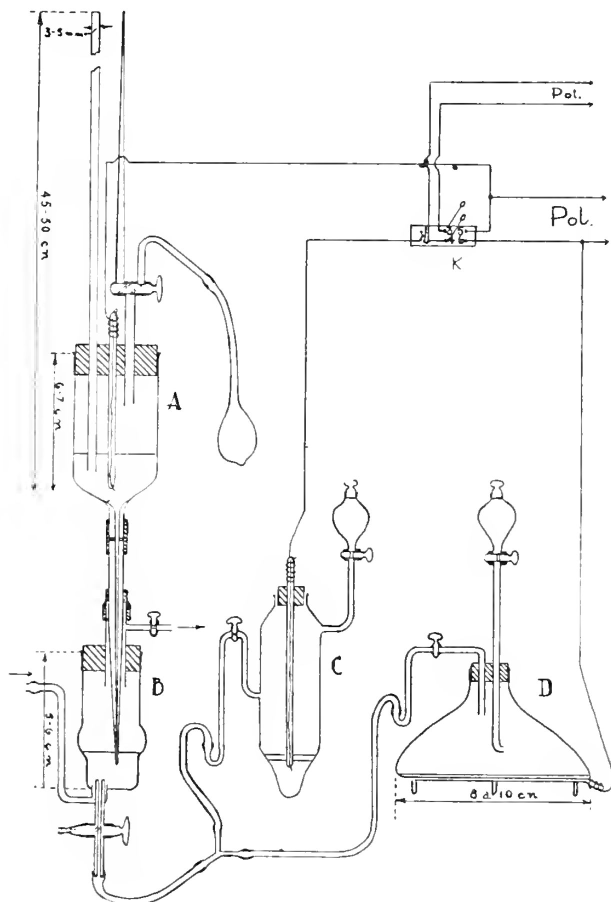


Fig. 1.

A - Depósito de Hg del electrodo gotero.
B - Cuba para el líquido a analizar.
C - Electrodo de referencia (Hg/Cl_2Hg_2, ClK sat.).
D - Electrodo externo de base (Hg/Cl_2Hg_2, ClK sat. o sino Ag/ClAg, ClK sat.).
Pot - Conductores para el potenciómetro a válvula (doble triodo N° 19), que permitirá medir el potencial de los electrodos (llave K).
Pol - Conductores al circuito potenciométrico polarográfico.

circuito, el potencial del electrodo gotero (contactos 1-3 y 4-6 para el primero; 3-5 y 2-4 para el segundo, mediante el conmutador *K* de la figura 1).

La sensibilidad del galvanómetro se determina, en los casos necesarios, mediante una resistencia adecuada (p. ej. de 1 mega Ω) y previamente controlada, interpuesta en el lugar de la cuba electrolítica: dando un cierto valor al voltaje se lee la desviación del galvanómetro con la escala a 1 m.; por otra parte, simultáneamente con esta operación se estudia si las oscilaciones están debidamente amortiguadas y también, moviendo en toda su extensión el potenciómetro tambor, si hay exacta proporcionalidad entre los potenciales aplicados y las desviaciones, y si los contactos son perfectos.

Refiriéndonos al sistema electrolítico, la figura 1 indica su aspecto general. En *A* se tiene el electrodo gotero con el depósito de mercurio al cual se le aplica una presión adecuada mediante una pera de goma. El capilar gotero se une al depósito mediante grueso y elástico tubo de goma, de modo que fácilmente puede cambiarse. El tubo largo de vidrio, con una serie de marcas en su parte superior, permite vigilar la constancia de la presión que se da al depósito, la cual se regula haciendo girar la llave de modo que estableciéndose la comunicación con la atmósfera por intermedio del tubo estirado a capilar muy fino, es posible hacer descender la presión muy regularmente. Para que la presión se conserve constante, dentro de 1-3 mm de Hg, por lo menos, durante 15-30 min. (esas variaciones no introducen modificación apreciable de las corrientes de difusión) debe fijarse fuertemente el tapón (puede convenir soldar al frasco-depósito ganchos de vidrio para unirlo con fuerza mediante un alambre grueso) y engrasarse convenientemente la llave. En todo caso, para mayor estabilidad, el ideal es construir el todo en una sola pieza de vidrio.

La disposición indicada es de cómodo manejo y particularmente evita la impurificación del Hg, por el largo tubo de goma que se emplea en los dispositivos habituales, lo cual sólo se evita, en parte, por el uso de goma especial. Ultimamente ha sido propuesto [4] otro medio para eliminar el tubo de goma, con el objeto de obtener un conjunto rígido; su construcción es menos simple y no permite medir tan exactamente la presión de Hg, que regula la velocidad de goteo.

En *B*, *C*, *D* tenemos la unidad que constituye la cuba electrolítica, donde *B* es el recipiente que lleva la solución a analizar; *D*, el electrodo externo impolarizable, y *C*, el electrodo de referencia, el que sólo es necesario si se trata de medir o vigilar el grado de constancia del potencial del anterior durante el funcionamiento. Aquí se emplea, por lo tanto, el tipo de disposición con electrodo externo,

como método de trabajo completamente general y cuyas ventajas indicaremos más adelante.

En detalle: El recipiente *B*, se ha manifestado muy conveniente; permite operar comúnmente con 2-4 ml. de solución y hasta menos, reduciendo las dimensiones; ese volumen exige 3-5 min. de corriente gaseosa rápida, para eliminar el O_2. El tapón permite el paso del capilar dentro de un tubo concéntrico que a la vez sirve para la salida del gas indiferente que se emplea para desalojar el O_2 del electrolito; también puede aplicarse al tapón un pequeño tubo que se conecta a una bureta conteniendo la solución que se desea agregar sucesivamente a la cuba. En este caso, después de cada agregado nuevo se hace pasar gas indiferente para eliminar el O_2 incorporado, lo cual exige, para pequeños volúmenes, apenas 1-2 min., uniformándose a la vez el contenido de la solución; este método ahorra el dispositivo más complejo empleado por algunos, para conseguir que la solución que se va agregando, sea previamente tratada por el mismo gas que sale de la cuba.

En la parte inferior de la cuba está el tubo de entrada del gas y concéntricamente el tubo de una llave de tres vías (con salida lateral) que permitirá efectuar la unión electrolítica con el electrodo externo. No disponiendo del recipiente indicado, puede ser suficiente un trozo de tubo de vidrio de unos 20 mm. de diámetro, en cuya parte inferior, mediante tapón, se le adapta la llave indicada, preferiblemente capilar, de unos 2 mm. de luz, y en cuyo caso, el gas se hará pasar por la parte superior. El empleo de la llave indicada impide la impurificación de la solución a analizar con la del electrodo externo (*). Para operar, se introduce la solución a analizar, y antes del pasaje del gas, y estando la llave de tres vías toda interrumpida, se abre la llave del electrodo externo y luego se hace pasar el líquido de éste hasta la llave de la cuba, la que se dispone en posición tal que se desplace el aire de la tubería por el tubo lateral de esa llave; en seguida, moviéndola muy lentamente hasta posición vertical, se llena también el conducto recto de la misma sin pasar más de 1-2 mm. dentro del tubo, que conduce a la cuba (se supone que, como la cuba fué cargada estando previamente seca y con la llave completamente cerrada, dentro del tubito de la llave sólo hay aire), luego se cierra la llave del electrodo externo y se vuelve a poner la de la cuba en posición tal que se elimine por el tubo lateral el pequeño

(*) Este tipo de recipiente es también muy conveniente para determinaciones de pH, con distintos tipos de electrodo.

exceso de presión que pueda existir; se gira rápido 180° de modo que ahora se escurra el líquido contenido en la cuba hacia el exterior, y enseguida se interrumpirán todas las comunicaciones, hasta que después de haber pasado el gas para desalojar el O_2 y al comenzar la medición se girará la llave de modo que se ponga en comunicación el electrodo externo con el exterior para eliminar todo nuevo exceso de presión que se hubiera producido, y luego se pondrá definitivamente en comunicación directa la cuba con el electrodo (*). Procediendo convenientemente el líquido del electrodo (de mayor densidad) queda dentro del tubo de la llave y la difusión es suficientemente lenta como para que se puedan hacer las mediciones sin que llegue a impurificarse la solución que se analiza. (Pero si el cierre de *B* no es bueno, y empleándose H_2 como gas indiferente, puede producirse un cierto vacío por difusión, lo cual permitirá entrada de electrolito del electrodo externo; igualmente debe cuidarse el cierre de la llave de *D*).

El dispositivo indicado aumenta poco la resistencia interna del sistema, ya que por el tipo de electrodo externo que se emplea, con electrolito ClK saturado, sólo gravita la columna de solución a analizar que va desde la cuba hasta la llave: las corrientes de difusión (polarográficas) obtenidas son prácticamente de la misma altura que las que resultan con electrodo impolarizable interno, de modo que la sensibilidad no se halla afectada.

El electrodo de calomel saturado externo *D*, es de forma semejante a la indicada por Hohn (3) para el electrodo de Hg/SO_4Hg_2, con la variante que en lugar de emplear agar se adapta un embudo depósito para poder maniobrar convenientemente y de paso eliminar impurezas del conducto después de cada operación. Este electrodo tiene las ventajas de la constancia de su concentración, bajos potenciales de contacto, alta densidad del electrolito, alta conductibilidad y facilidad de construcción.

También empleamos ventajosamente un electrodo de Ag/ClAg, ClK sat., el cual consiste en una lámina de plata pura de 0.1 mm., o poco menos, de espesor, y 10 por 100 cm, lo cual da una superficie de 2000 cm², arrollada convenientemente, dentro de un recipiente cilíndrico, con hilo de plata remachado, para el contacto externo.

(*) Es aconsejable ensayar previamente, una vez por todas, el manejo, introduciendo en la cuba una sol. de NO_3Ag, para observar si el precipitado de ClAg llega a invadir el interior de aquélla. Este ensayo debe hacerse en las mismas condiciones que una operación polarográfica.

La lámina se trata previamente con sol. caliente de (HO) Na, se lava con agua pura, escurre y sumerge en sol. sat. de ClK y ClAg; polarizándola anódicamente, unos minutos. Su potencial, que varía ligeramente con las impurezas, ha sido, en nuestro caso, de + 0.2120 V, a 20°, respecto al electrodo normal de hidrógeno (*). Cuando se usa simultáneamente el electrodo de referencia *C* (fig. 1) se emplea un recipiente de paso con sol. sat. de ClK.

Para corrientes que pasan por el sistema hasta de 10^{-5} A, hemos notado variaciones en el potencial del electrodo Ag/ClAg, de pocos milivolts.

El empleo de modo normal y general de un electrodo impolarizable externo, no figura, según mi conocimiento, en la bibliografía; y sin embargo sus ventajas son evidentes en las operaciones polarográficas: 1) no se requiere empleo de mercurio nuevo para cada operación (varios ml. generalmente), lo que significa economía en la purificación periódica de las cantidades que se van empleando cada vez; 2) se eliminan las reacciones posibles entre la solución analizada y el Hg, lo que conduce a variaciones en el potencial y de ahí curvas anormales, incluso, a menudo, altas corrientes residuales (yoduros, sulfatos, etc.); 3) se obtiene un potencial básico estable desde el comienzo de la operación, lo que no sucede a menudo cuando este electrodo es interno, debido a que se requiere cierto pasaje de corriente antes de estabilizarse. El potencial se conserva sensiblemente estable, a través de la operación, lo que permite una gran reproductividad. Esto no sucede, en general, con electrodo interno, de mucho menor superficie, como lo exige el hecho de tener que operar generalmente con cantidades no muy grandes de líquido; 4) no es necesario hacer determinaciones del potencial del electrodo de base (funcione como ánodo o cátodo), pues su valor es conocido una vez por todas; con electrodo interno esas determinaciones son indispensables, salvo casos particulares; y complican la operación, o, en el mejor de los casos, impurifican la solución de análisis si se opera por agregado de una sustancia indicadora, de potencial de depósito conocido (Tl^{+}, p. ej.); 5) no se mezcla el mercurio que proviene del gotero con el otro, lo que a veces produce variaciones de potencial del electrodo de base; 6) no hay tampoco variaciones de este potencial por acción del H_2 que se emplea a menudo, para

(*) Consideramos conveniente expresar en polarografía, los potenciales, con referencia al electrodo normal de H, en vez del calomel N, como se acostumbra hasta ahora.

eliminar el O_2 del electrolito, evitándose así la necesidad de agregar Cl_2Hg_2 o $SO_4 Hg_2$, p. ej. para hacer más estable el potencial de base, lo que no siempre es conveniente; 7) se puede operar con soluciones de composición tal, p. ej. percloratos, nitratos, etc. que no dan buen resultado con electrodo interno debido a las variaciones de potencial que producen, al actuar como depolarizadores; 8) se puede operar, mediante una cuba adecuada, con menores cantidades de líquido de las que exige un electrodo interno, si es que a éste se le exige un grado algo aceptable de impolaribilidad; es natural, sin embargo, que no sería posible hacer microdeterminaciones, con 0.01 ml ([1]), lo que exige recipiente especial, con electrodo de base interno de muy pequeña superficie, y que sólo permite operar con intensidades de corriente muy pequeñas para que ese electrodo no sufra variaciones exageradas; 9) hace posible operar con independencia de temperatura entre la cuba y el electrodo externo.

BIBLIOGRAFÍA

(1) Heyrovský, J. — *Polarographie*; *Böttger - Physikalische Methoden der Analytischen Chemie*, **2**, (1936).

(1 bis) Heyrovský, J., y Klumpar, J. — *Coll. Trav. Chim. Tchecosl.*, **10**, 153 (1937).

(2) Hiltner, W. — *Chem. Fabr.*, **6**, 111 (1933).

(3) Hohn, H. — *Chemische Analysen mit dem Polarographen*, (1937).

(4) Muller, R.; Garman, R.; Droz, M., y Petras, J. — *Ind. and Engin. Chemistry* (*Analyt. Ed.*), **10**, 339, (1938).

(5) Semerano, G. — *Il Polarografo*, (1933).

(6) Vanossi, R. — *Anales Asoc. Química Argentina*, **25**, 54 (1937).

Facultad de Ciencias
Exactas, Físicas y Naturaees
Buenos Aires

NOTICIARIO

POR E. R.

Entre los diversos homenajes que las asociaciones científicas extranjeras han tributado últimamente a miembros de la *Sociedad Científica Argentina*, nos es particularmente grato señelar la acordada al Sr. P. Magne de la Croix, activo colaborador de estos *Anales*, donde se han publicado muchas de sus interesantes notas sobre el paso, « andares » y formas típicas de marcha propias de distintos animales. La « Société de Pathologie Comparée » de París, en su sesión del 14 de junio último, lo ha designado miembro correspondiente. En varias revistas científicas de la capital francesa, el Sr. Magne de la Croix ha publicado en estos últimos meses, varios trabajos sobre « corrientes eléctricas con hilos y sin hilos en el organismo humano » y sobre « generalidad y vinculación de leyes naturales », a base de investigaciones experimentales hechas en Buenos Aires.

La Academia Nacional de Medicina de la Facultad de Ciencias Médicas de Buenos Aires, ha incorporado a su seno al profesor Dr. Gonzalo Bosch, actual Vicepresidente de la *Sociedad Científica Argentina*. La recepción del nuevo académico tuvo lugar en la solemne sesión celebrada el 24 de octubre próximo pasado. El Profesor Dr. Mariano R. Castex tuvo a su cargo el discurso de recepción. Por su parte, el Dr. Gonzalo Bosch, de acuerdo con las cláusulas estatutarias que rigen para estos casos, pronunció uǹ discurso de recuerdo y elogio para la personalidad del Dr. Nicolás Lozano, ex Presidente de la *Sociedad Científica Argentina*, cuyo reciente fallecimiento dejó vacante el sillón académico que pasa a ocupar el Dr. Gonzalo Bosch.

El 24 de noviembre próximo pasado, se cumplió el primer aniversario de la muerte del Dr. Eduardo Ladislao Holmberg. La fecha fué recordada por diversas instituciones científicas, entre ellas la Academia Nacional de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales, de la que el Dr. Holmberg había sido Presidente Honorario.

En este acto pronunció el discurso de apertura su actual Presidente, ingeniero Agustín Mercau, significando el deseo que ha tenido la Aca-

demia de rendir un justiciero homenaje a la memoria del sabio desaparecido.

« Verdadero sabio — dijo más adelante, — admirado por su genio y querido por su atrayente afectuosidad, su palabra misma era así profunda por el destellante fondo de su acervo científico y bellamente amena por su espontáneo poder de darle carácter festivo aún a los más áridos razonamientos de la ciencia, su nombre es y será siempre recordado en nuestra Academia con respetuoso afecto, porque sus condiciones personales y de hombre de ciencia eran justamente las que dan nacimiento y crean esos sentimientos ».

Expresó luego que la Academia resolvió, también, que en este mismo acto se hiciera entrega del premio Holmberg, correspondiente al año 1934, instituído por el Concejo Deliberante, para ser discernido al autor del mejor trabajo sobre ciencias naturales dentro de los publicados cada año por autor nacional o extranjero, con residencia mínima de dos años en esta ciudad.

El premio correspondiente a este año ha sido otorgado por el voto unánime de la Academia al Dr. Juan Bacigalupo, por su trabajo: « Distomatosis por fasciola hepática »; su ciclo evolutivo en la República Argentina ».

Después de hacer referencia el ingeniero Mercau a los antecedentes científicos del Dr. Bacigalupo, le hizo entrega del premio, consistente en un diploma, una medalla de oro y la suma de 2000 pesos.

A continuación, el académico Martín Doello Jurado se ocupó de la obra del Dr. Eduardo Ladislao Holmberg en una extensa y erudita conferencia desarrollada de acuerdo con el siguiente sumario:

Introducción. Holmberg y Cristóbal M. Hicken; Holmberg y los hermanos Lynch Arribálzaga. « El naturalista Argentino » (1878). Resumen de los trabajos científicos de Holmberg: Zoología, Botánica, geología; obras didácticas y de divulgación. « El joven coleccionista de historia natural »; Holmberg y Ameghino. Una discusión a propósito de « Filogenia ». La actuación de Holmberg como profesor de la Escuela Normal. Su actuación como profesor de botánica en la Universidad. Holmberg y Gallardo. Su desempeño en la Inspección de Enseñanza Secundaria. El ministerio de Joaquín V. González. Holmberg en el primer Congreso de Naturalistas Argentinos: Tucumán (1916). El homenaje en el 75° aniversario de su nacimiento (1927). Holmberg, el enciclopedismo y la especialización. Conferencias y discursos de Holmberg. « Pinceladas descriptivas », « Mimetismo », « Los peces », discurso en las exequias del Dr. Rawson, etc. Las obras literarias de Holmberg. Un párrafo de Avellaneda. Holmberg y Sarmiento. Su crítica a la estatua de Rodin. Holmberg, Lugones, Rubén Darío y el poema « Lin-Calel ».

El Dr. Doello Jurado, haciendo la síntesis de la personalidad de Holmberg, al finalizar su interesante conferencia, expresó:

« En síntesis, es evidente que nos hallamos en presencia de una de las personalidades más originales y notables que haya producido la América latina. Hombre de ciencia, con una vasta labor en todas las ramas de la historia natural y, en especial, en la zoología; médico,

profesor en la enseñanza normal y en la Universidad, creador del Jardín Zoológico, académico, viajero, conferenciante eximio, escritor, poeta.. ¿Qué más puede pedirse a un hombre?

« Deja una obra intelectual digna del mayor respecto, por más que ella no sea todo lo que pudo haber producido aquella cabeza excepcional, en que estuvicron reunidos tantos talentos distintos que llegaban a estorbarse. En esa obra hay tres rasgos esencialísimos: su amor de patriota al suelo, que estudiaba como sabio; su amor de ciudadano a las instituciones republicanas, a la libertad de las ideas, que exaltó sobre todas las cosas; a la justicia social, en cuyo triunfo confiaba con la fe de un creyente; a la enseñanza, en el más amplio sentido, pues es el instrumento necesario del progreso intelectual y moral, y, finalmente, su amor de artista al lenguaje, que era el vehículo de su pensamiento.

« Puede, pues, nuestra Academia estar orgullosa de haberlo contado en su seno muchos años como miembro titular y luego como presidente.

« Puede también la República estar orgullosa de haber tenido hijos tales como estas grandes figuras de nuestras ciencias, que son: el ilustre y precursor Francisco Javier Muñiz, Florentino Ameghino, Angel Gallardo y Eduardo Ladislao Holmberg.

« La vida de estos hombres — finalizó el Dr. Doello Jurado — ofrece todavía tema inagotable. Por ellas y por la consideración de las profundas reflexiones que nos sugieren se siente a veces el íntimo estremecimiento de quien está aproximándose con emoción a las fuentes sagradas de la vida y a las raíces del espíritu humano ».

Finalizado el discruso, el Dr. Juan Bacigalupo hizo una síntesis de su trabajo de investigación relativa a las condiciones de vida y estructura del parásito llamado Fasciola hepática. Explicó el desarrollo que experimenta en un pequeño caracol denominado « Limnaea viatrix »; ha comprobado así que el embrión se localiza preferentemente en el pulmón del animal, se inicia allí su evolución en forma de masas celulares que se multiplican y organizan constituyendo la boca, faringe y esófago del futuro organismo que acaba de abandonar el caracol para desplazarse en el agua, y resulta así un agente infectante; la ingestión de berros, ensaladas o aguas con tales elementos provocan la infección en el hombre y en los animales. El Dr. Bacigalupo ha estudiado después cómo el parásito llega al hígado, para pasar a los canalículos biliares, sitio en que vive habitualmente; ha establecido la distribución geográfica del parásito en el país y ha verificado la acción eficaz de inyecciones de emetina como medio práctico y corriente en el tratamiento terapéutico de la enfermedad; ilustró su exposición con una serie de proyecciones y con la exhibición de una película cinematográfica referente al mismo asunto.

El 27 de noviembre último, tuvo lugar en una de las dependencias del Museo Argentino de Ciencias Naturales, donde funciona la Secretaría de la Sociedad Ornitológica del Plata, una sesión de homenaje a la memoria del Dr. Ricardo Dabbene.

Después de descubrirse un retrato del Dr. Dabbene, el Presidente de la entidad, contraalmirante Pedro S. Casal, trazó una semblanza del extinto naturalista, recordando su actuación como primer Presidente de la Sociedad Ornitológica del Plata y como director del órgano oficial de la sociedad, la revista « El Hornero ».

Más adelante se ocupó de los viajes que realizó el Dr. Dabbene por todo el país, a fin de perfeccionar sus conocimientos y para ampliar las colecciones de aves del Museo Argentino de Ciencias Naturales.

A continuación habló la Dra. en ciencias naturales señorita María Juana Pergolani, adscripta a la sección ornitología del museo antes citado. La oradora hizo un elogioso comentario de la obra del Dr. Dabbene, titulada « Ornitología argentina, catálogo sistemático y descriptivo de las aves de la República Argentina », así como de otros de sus trabajos científicos.

El Sr. Angel R. Zotta, encargado de la sección ornitología del Museo de Ciencias Naturales, pronunció después una conferencia sobre uno de los primeros estudios ornitológicos del extinto: « Distribución de los pájaros en la Argentina », que, dijo, fué publicado en la revista « Physis », entre el 30 de septiembre de 1913 y el 31 de marzo de 1914. Este trabajo, dijo el Sr. Zotta, es una crítica muy interesante a la obra de lord Brabourne y Chubb titulada: « Los pájaros de Sud América », que fué editada en Londres en 1912.

Con diversas citas, el orador demostró la superioridad del estudio del Dr. Dabbene sobre el otro.

El 6 de diciembre, realizó una sesión especial la Academia de Ciencias de Buenos Aires, en la cual esa corporación entregó el diploma de miembro correspondiente a monseñor Federico Lunardi, arzobispo de Side y nuncio apostólico en Honduras.

Presidió la ceremonia el Dr. Mario A. Rivarola, quien, al declarar abierto el acto, expresó la satisfacción de la corporación al recibir en su seno, en su carácter de miembro correspondiente, a monseñor Lunardi, y al escuchar el saludo enviado por la Sociedad Geográfica de Lima, del cual era portador el Sr. Cavero Egusquiza, delegado oficial de esa entidad en viaje por América del Sur.

Entre los aplausos de los circunstantes, el Dr. Rivarola entregó al nuevo académico su diploma, y en seguida cedió la palabra al secretario del cuerpo, arquitecto Héctor Greslebin, quien se refirió extensamente a la personalidad de monseñor Lunardi.

Después de breves palabras de agradecimiento que pronunció monseñor Lunardi, el Sr. Cavero Egusquiza leyó el saludo de la Sociedad Geográfica de Lima, y pronunció con ese motivo un discurso, subrayando interesantes conceptos de americanismo.

En seguida, el nuevo académico correspondiente, monseñor Lunardi, presentó una comunicación titulada « Cosas de los indios », en la cual, después de considerar la manera de hacer la guerra de los Tupí-Guaraní, detallando sus diversas formas de realizar el ataque, por sorpresa o en cerco, las características de sus fortalezas y empalizadas y el sistema

defensivo de las barreras de espinas, describió la forma en que usaban las flechas de fuego y los gases asfixiantes, recursos ambos muy utilizados en la práctica de la guerra.

Trató el fuego americano como arma de guerra, describiendo las características de los dardos de fuego de los Mundurucús y de los Tupinambás del Guanabara; citó el comprobado detalle de la destrucción de la primera instalación de la ciudad de Buenos Aires por el fuego, desprendiendo de ello una influencia Tupí-Guaraní, y se ocupó del sitio de la ciudad del Cuzco, describiendo también las flechas incendiarias de los indios modernos.

Finalmente estudió la forma cómo los Tupinambás practicaban la guerra con el humo y de qué manera esta práctica continúa en los pueblos modernos, así como el uso de la pimienta malagueta, sacando útiles conclusiones de estos estudios; dedicó algunas consideraciones a la mitología astronómica de los Sirionós y de los Guarayos, hijos estos últimos de la luna hombre; se ocupó de la leyenda del tigre y de la luna y de aquella referente a las dos piedras rasgadas que se muestran en la mitología de los guarayos, y en materia de alfarería Chiriguana, de los Chiquitos, Guarayos, Sirionós y Chiquitanos, explicó diversas curiosidades inéditas, especialmente la forma cómo se cuecen los vasos y cómo se obtienen el lustre y los colores.

A continuación, el Dr. Juan U. Carrea comunicó su « Nota previa sobre rugoestenografía », siguiendo los estudios presentados a la Academia en 1937 sobre identificación humana por las rugosidades del paladar. Presentó una nueva notación estenográfica para la clasificación de las rugosidades, denominándola, por consiguiente, rugoestenografía.

El 23 de diciembre clausuró el ciclo de sus sesiones correspondientes al año 1938, la Academia Nacional de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales. En dicho acto, el académico Dr. Claro C. Dassen pronunció una erudita conferencia, en la que expuso la primera parte de su trabajo de crítica e investigación histórica sobre « La Facultad de Matemáticas de Buenos Aires », instituto creado por el gobierno provincial el 25 de marzo de 1874, y mantenido en ese carácter hasta 1880, en cuya época, por la federalización de la ciudad de Buenos Aires, la Universidad pasó a ser dependencia nacional y fué reorganizada.

En la misma sesión se resolvió reiniciar la publicación de los « Anales » de la academia, continuando asimismo la aparición de la revista «Darwiniana » como órgano oficial del instituto de botánica « Darwinion », que posee la Academia en San Isidro.

El 24 de diciembre, los académicos se reunieron en el salón biblioteca de « Darwinion », para asistir al acto de incorporar a las colecciones del mismo las muestras de minerales y rocas que pertenecieron al Dr. Eduardo L. Holmberg, donadas por su familia a la Academia, como igualmente un retrato de Darwin, con autógrafo, en marco de ébano, también donado por los deudos del Dr. Holmberg.

BIBLIOGRAFIA

FOLLETOS RECIBIDOS EN LA ACADEMIA NACIONAL DE CIENCIAS

POR C. C. D.

Nº 581. — MILTON THEO, HANKE, *Nutrition et Dentition*. Folleto de 76 páginas con figuras y 4 láminas fuera del texto; 20 francos; 1937. Constituye el nº XI de la serie « Nutrition ».

Entre las consecuencias que trae este trabajo anotamos las siguientes: Una nutrición adecuada contribuye a producir el mejor estado de salud en una boca dada; los fungicidas y germicidas reducen los ataques a los tejidos y suprimen las fuentes de irritación y de destrucción. Parece posible, siguiendo ese tratamiento asociado, reducir la aparición de enfermedades dentarias de una manera tan notable que ellas no constituyan ya un problema inquietante para la salud. Las siete figuras que traen las cuatro láminas fuera del texto reproducen 6 microfotografías del « film » raspado en la superficie proximal de dientes en seis personas distintas. Este « film » consiste siempre en fungos y bacterias con algunas células epiteliales y una pequeña cantidad de detritus alimenticios. La séptima figura trae la fotografía de la boca de una joven de 19 años, que, cuando niña, sufrió gravemente por causa de una nutrición deficiente.

Nº 582. — POTEL (PIERRE), *Le Problème du Pain*. 45 páginas; 10 francos; 1937.

Fascículo XII de la serie « Nutrition », dirigida por Emilio F. Terroine. El autor es ex jefe de trabajos del Centro Nacional Francés de investigaciones agronómicas e Ingeniero de la Sociedad comercial de Potasas de Alsacia.

Después de una introducción en la que trae consideraciones generales sobre la cuestión del pan, del gluten, del trigo, etc., entra en materia desarrollando en cuatro capítulos los siguientes temas: las cualidades del trigo francés; los factores de la calidad de los trigos. La calidad de los trigos del punto de vista bioquímico; las mejoras de la calidad de los trigos. En las conclusiones que trae después, asegura ser posible

orientar la investigación relativa a la apreciación de la calidad de los trigos hacia bases nuevas, así como dar una interpretación biológica a las observaciones hechas sobre las cosechas de los cultivos experimentales; y que el estudio de las calidades del trigo es una cuestión agronómica que afecta, por un lado, a la fisiología vegetal en el sentido lato, y, por otro, a la fitogenética. Al final un apéndice y una bibliografía; aquél trae observaciones sobre la diferenciación de los trigos del punto de vista tecnológico.

N° 583. — Selic Hecht, *La Base Chimique et Structurale de la vision.* 100 páginas con varias figuras; 25 francos; 1938.

Fascículo IV de « Exposés de Biophysique », serie dirigida por René Wurmser, director del « Laboratoire de Biophysique de l'Ecole des Hautes-Etudes ». El autor es profesor de Biofísica en la « Columbia University » (N. Y.).

Una Introducción trata la naturaleza de los órganos sensoriales, las calidades específicas y el significado de la visión.

Los temas expuestos en el curso del trabajo son: Dualidad de la función visual; la visión en el espectro; adaptaciones a la oscuridad; discriminación de la intensidad; estimulación intermitente y pestañeo; umbral instantáneo; acuidad visual; la naturaleza de la operación fotoreceptora; comparaciones entre la teoría y las medidas. Al final una copiosa bibliografía.

Nos. 589, 590, 591. — Lautman (Albert), *Essai sur l'unité des Sciences Mathématiques dans leur développement actuel* (N° 589). *Essai sur les notions de Structure et de Existence en mathématiques* (Nos. 590, 591). en total, 164 páginas 82 páginas cada folleto, 20 francos cada uno. N° 589, 62 págiuas, 15 francos; 1938.

Constituyen los fascículos IV, V y VI de la serie « Le Progrés del'Esprit » recién mencionada. El autor es ex alumno de la « Ecole Normale Supérieure ». Agregado de Filosofía y Doctor en Letras.

El primero de estos folletos trata las siguientes cuestiones: Distinción entre dos matemáticas. Estructra de un dominio de grandores y descomposición de sus elementos. Las consideraciones dimensionales en análisis. El dominio y los números; las métricas no euclídeas en la teoría de las funciones analíticas. El algebra de los grandores no conmutativos; las formas de Plaff y la teoría de las ecuaciones diferenciales. Lo continuo y lo discontinuo; el análisis y la teoría de los números.

El autor se esfuerza en poner a la vista analogías de estructura y adaptaciones de existencia entre el análisis y el álgebra, con el objeto de contribuir a poner de manifiesto la existencia, en el seno de las matemáticas, de esquemas lógicos sólo reconoscibles al través de las mismas matemáticas, afirmando a la vez la unidad intelectual y el interés espiritual.

En el folleto n° 590 se ocupa de los « esquemas de estructura ». En la Introducción trata la naturaleza de lo real en matemáticas. Luego se ocupa de los temas siguientes: Lo local y lo global. Propiedades intrínsecas y propiedades inducidas. La ascensión hacia lo absoluto.

Deja establecida la variedad de los vínculos lógicos que se manifiestan en el seno de las matemáticas; la solidaridad entre el todo y sus partes; la reducción de las propiedades de relación a propiedades intrínsecas; el pasaje de la imperfección a lo absoluto.

El último folleto trata la « Esencia y existencia »; « los mixtos »; del « carácter excepcional de la existencia ».

Nos. 594 a 597 y 600. — Th. Cahn J. I. Houget, *Glucides*. E. Aubel, *Eeau et Sels*; Jean Roche, *Protides*; Emile F. Terroine, *Substances Nucléiniques*; Idem, *Créatine et Créatinine*. Cinco folletos respectivamente de 68, 28, 56, 32 y 42 páginas. Precios respectivos: 15, 8, 12, 8 y 12 francos. 1938.

El profesor Emilio F. Terroine, dirige una revista anual titulada « Physiologie », de la que son secretarios, T. Cain y P. Lelu. Estos cinco folletos corresponden al período 1936-37. La revista, en vez de ser presentada en la forma de un grueso volumen, está dividida en tantos fascículos cuantos capítulos esenciales abarca la fisiología; cada dos semanas se ofrece una monografía.

1. *Glúcidos*. Sus autoret Cahn y Houget son, respectivamente, maestro uno y encargado el otro, de investigaciones. Después de una Introducción se encara el estudio de la degradación de los glúcidos; síntesis y constitución de los hidratos de carbono natural; metabolismo de los glúcidos en el animal. Bibliografía.

2. *Agua y sales*. El autor E. Aubel, es profesor de química biológica en la Facultad de Ciencias de París. Trata los temas siguientes: Permeabilidad y Osmosis: células y tejidos aislados, organismos neutros; Repartición de los elementos minerales; Papel desempeñado por las vitaminas, por las hormonas y glándulas de secreción interna. Absorción y eliminación. Perspiración. Estudios varios. Bibliografía.

3. *Prótidos*. Su autor Roche, es profesor de química biológica en la Facultad de Medicina y de Farmacia de Marsella. Después de una Introducción, se ocupa de: Las necesidades de azoados y la manera de satisfacerlas. Metabolismo de los ácidos amínicos. Metabolismo y papel fisiológico del azufre proteídico. Bibliografía.

4. *Sustancias nucleídicas*. Se ocupa del tenor en cuerpos púricos de los organismos y tejidos. El catabolismo púrico endógeno. Degradación y síntesis de los compuestos púricos. Agentes ejecutantes y agentes reguladores del catabolismo púrico. Procesos anormales del metabolismo púrico. Catabolismo de las pirimidinas. Bibliografía.

5. *Creatina y creatinina*. La primera parte trata la creatina de los tejidos y la creatinuria. La segunda, la creatinina de la sangre y de los tejidos, la excreción de la creatinina y el valor del gasto energético; los precursores de la creatinina con el catabolismo protídico. Contralor hormonal de la excreción de creatinina. Termina el libro con las técnicas del dosaje, y con la bibliografía del tema.

SOCIOS ACTIVOS

Abrines, Héctor Aníbal
Aguilar, Félix
Albizzati, Carlos M.
Alessi, Juan M.
Alvarez, Raúl J.
Alvarez de Toledo, Belisario
Allende Lezama, Luciano P.
Anastasi, Camilo
Anchorena, Juan E.
André, Enrique de
Andrioletti, Juan Luis
Añón Suárez, Vicente
Aparicio, Francisco de
Aráoz Alfaro, Gregorio
Arce, Manuel J.
Armani, Aquiles
Arnaudo, Silvio J.
Avila Méndez, Delfín
Bado, Atilio A.
Bachmann, Ernesto
Baglietto, Eduardo E.
Balbiani, Atilio
Baliani, Luis M.
Bancalari, Agustín
Bandoni, Alfredo J.
Barabino Amadeo, S.
Bargna, Juan L.
Barilari, Mariano J.
Barral Souto, José
Barrancos, Leónidas A.
Becke, Alejandro von der
Berrino, Juan B.
Bertino, José Carlos
Besio Moreno, Nicolás
Bianchi Lischetti, A.
Biggeri, Carlos
Blaquier, Juan
Boaglio, Santiago
Bolognini, Héctor
Bonanni, Cayetano A.
Bontempi, Luis
Bordas, Alejandro F.
Bordenave, Pablo E.
Borzacov, Vladimir
Borruat, Luis A.
Borzi, Ana María
Bosch, Gonzalo
Bosisio, Anecto J.
Bottaro, Juan C.
Bozzini, Luis (h.)
Briano, Juan A.
Bulch, Raúl
Bunge, Juan C.
Buontempo, Guillermo
Burkart, Arturo
Busso, Eduardo B.
Butty, Enrique
Buzzo, Alfredo
Calliet Bois, Teodoro
Calandra, Raúl E.
Canale, Humberto
Canal Feijoo, Bernardo
Capelli, Pedro F.
Carabelli, Juan José
Carbia, Rómulo D.
Carbone, Esteban
Carbonell, José J.
Cárcova, Enrique de la
Carelli, Antonio
Carelli, Humberto H.
Caride Massini, Pedro
Carman, Ernesto
Carrea, Juan Ubaldo
Casacuberta, Antonio
Castellanos, Alberto
Castello, Manuel F.
Castiñeiras, Julio R.
Celasco, Juan L.
Ceppi, Héctor
Cernuschi, Félix
Clos, Enrique C.
Cock, Guillermo E.
Coni Bazán, F. A.
Curti, Orlando P.
Curutchet, Luis
Chanourdie, Enrique
Chizzini Melo, Aníbal F.
D'Ascoli, Lucio
Dassen, Claro C.
Dasso, Héctor
Dasso, Ricardo L.
De Cesare, Elías A.
De Fina, Armando L.
De la Iní, Juan E.
Dellepiane, Luis J.
Deulofeu, Venancio
Díaz, Emilio C.
Dieulefait, Carlos E.
Doello-Jurado, Martín
Dobranich, Jorge W.
Domínguez, Juan A.
Dubecq, Raúl E.
Dueñas, José
Duhau, Luis
Dupont, Enrique
Durañona y Vedia, A.
Durrieu, Mauricio
Escudero, Antonio
Escudero, Pedro
Faré, Santo S.
Fernández, Alberto J.
Fernández Díaz, A.
Fernández Long, S.
Figini, Angel
Figuerero, Hernando W.
Fischer, Gustavo Juan
Flores, Emilio M.
Floriani, Luis
Florit Carlos J.
Fossa Mancini, E.
Franceschi, Alfredo
Fürnkorn, Divico A.
Gadda, Carlos Manuel
Galmarini, Alfredo G.
Gando, Alfredo R.
Gandolfi Herrero, Augusto
Gandolfo, José S.
Gascón, Alberto
Gaspar, Fernando L.
Géneau, Carlos E.
Gerardi, Donato
Ghigliazza, Sebastián
Giagnoni, Bartolomé E.
Giannone, José
Gradín, Carlos
Grieben, Arturo
Gutiérrez, Ricardo J.
Haussler, Emilio
Herbin, Luis A.
Hermitte, Enrique
Herrera Vegas, M.
Herzer, Bernardo
Hickethier, Carlos F.
Hofmann, Herbert
Hortal, José Angel
Houssay, Bernardo A.
Hoyo, Arturo
Igartúa, Luis María
Irigoyen, Luis H.
Isetta, José
Ivanissevich, Ludovico
Jorge, José M.
Jakob, Cristofredo
King, Diarmid O.
Kinkelin Pelletán, J. C. de
Knoche, Walter
Kraglievich, Nicolás T.
Krapf, Eduardo
Labarthe, Julio
Lagunas, Simón
La Menza, Francisco
Laporte, Luis B.
Larco, Esteban
Lasso, Alfredo L.
Latzina, Eduardo
Ligniéres, Roberto
Lizer y Trelles, C. A.
Lombardi, Alberto
Loudet, Osvaldo
Loyarte, Ramón G.
Lugones, Arturo M.
Llauró, José
Mac Donagh, E. J.
Magnin, Félix J.
Magnin, Jorge
Mainini, Carlos
Maliol, Emilio
Mamberto, Benito
Marcó del Pont, E.
Marchionatto, Juan B.
Maresca, Antonio J.
Martignone, Eduardo
Marotta, F. Pedro
Marotta, R. Armando
Mata, Leopoldo
Méndez, Julio
Meoli, Gabriel
Meoli, Humberto
Mercau, Agustín
Meriggi, Juan C.
Mermoz, Francisco A.
Molfino, José F.
Molina Carranza, L.
Molle, Clotilde C.
Montes, Vicente E.
Moragues Bernat, Jaime
Moreno, Evaristo V.
Nágera, Juan José
Natale, Alfredo
Natale, Ernesto
Negrete, Lucía
Negri, Mario L.
Nielsen, Juan
Novelli, Armando
Oliveri, Alfredo B.
Ortega Belgrano, Raúl
Ortiz, Aníbal A.
Ortiz de Rosas, Jorge
Otamendi, Gustavo
Ottonello, Héctor
Páez, José María
Page, Franklin Nelson
Paitovi y Oliveras, A.
Parodi, Edmundo
Parodi, Lorenzo R.
Parodi, Rodolfo
Pasman, Raúl G.
Pasman, Rodolfo E.
Pastore, Franco
Paz Anchorena, José M.
Pérez Hernández, A.
Perrone, Cayetano
Pestalardo, Agustín
Pini, Aldo S.
Platz, Hubert
Podestá, Juan Carlos
Posadas, Carlos
Quinos, José Luis
Quinterno, Bruno F.
Quiroga, Pedro R.
Raimondi, Alejandro
Raffo, Bartolomé M.
Ramaccioni, Danilo
Ramallo, Carlos M.
Ratto, Héctor R.
Rebuelto, Antonio
Rebuelto, Emilio
Recce, William Asher
Repetto, Blas Angel
Repossini, José
Ringuelet, Emilio J.
Rissotto, Atilio A.
Rivarola, Rodolfo

Robles, Angel A.
Rodríguez Aravena, S.
Rodríguez, Germinal
Rodríguez, Miguel
Roffo, Angel H.
Roffo, Juan
Roldán, Raimundo
Romero Brest, Enrique
Rokotnitz, Otto
Rospide, Juan
Rossell Soler, Pedro
Ruata, Luis E.
Ruíz Moreno, Isidoro
Ruiz Moreno, Adrián
Rumi, Tomás J.
Sabaria, Enrique
Salomón, Hugo
Sánchez, José Ricardo
Sánchez, Gregorio L.
Sánchez Díaz, Abel
Sánchez Sorondo, M. G.
Sanromán, Iberio
Santángelo, Rodolfo
Sarhy, Juan F.
Sarrabayrouse, Eugenio
Savon, Marcos A.
Schnack, Benno J.
Schulz, Guillermo
Selva, Domingo
Selzer, Samuel
Sesma,, Angel
Sheahan, Juan F.
Silva, Leónidas L.
Simonoff, Miguel
Simons, Hellmut
Siri, Luis
Sobral, Arturo
Solari, Emilio F.
Solari, Miguel A.
Sordelli, Alfredo
Soler, Frank L.
Spinetto, David J.
Spota, Víctor J.
Storni, Segundo R.
Taiana, Alberto F.
Taiana, Jorge
Tarragona, José
Tello, Eugenio
Torre Bertucci, Pedro
Torello, Pablo
Tossini, Luis
Trelles, Rogelio A.
Trucco, Sixto E.
Valeiras, Antonio
Valentini, Argentino
Valentinuzzi, Máximo
Vallebella, Colón B.
Vanossi, Reinaldo
Varela, Rufino
Varela Gil, José
Vecchi, Arístides de
Vela Huergo, Julio
Verdaguer, Juan
Veyga, Francisco de
Vidal, Eduardo
Vignati, Milcíades A.
Villalobos D., C.
Vignaux, Juan C.
Vinardell, Alberto
Volpatti, Eduardo
Wainer, Jacobo
Wauters, Carlos
Wernicke, Raúl
White, Guillermo J.
Williams, Adolfo T.
Wysztelewski, W. de
Zamboni, Agustín
Zappi, Enrique V.
Zavalia, Carlos M.
Zuloaga, Angel M.

SOCIOS ADHERENTES

Bazzanella, José
Cotlar, Mischa
Devoto, Carlos Alberto
Ferramola, Raúl
Folcini, Martín L. G.
García, Eduardo D.
Goyena, Ricardo J.
Gorchs, Agustín C.
Laclau, Juan Pedro
Magne de la Croix, P. A.
Mailhos, Luis E.
Milesi, Emilio Angel
Quevedo Capdevila, Eduardo A.
Recoder, Roberto F.
Repetto, Cayetano
Rusconi, Carlos
Sadosky, Manuel
Somonte, Eduardo
Vistalli, Alina M.
Wechsler, Wolf

CASAS ADHERENTES

Angel Estrada y Cía.
Benvenuto y Cía.
Lutz, Ferrando y Cía.
Hijos de Atilio Massone
Otto Hess, S. A.
T. Gr. "Tomás Palumbo"
Jacobo Peuser, S. A. Ltda.

SOCIO VITALICIO

Huergo, Eduardo María

MIEMBROS PROTECTORES DE LA ORGANIZACION DIDACTICA DE BUENOS AIRES

Anchorena, Juan E.
Besio Moreno, Nicolás
Tornquist, E. y Cía. (Lda.)

SECCION CORDOBA

COMISION DIRECTIVA

Presidente, Dr. Juan Olsacher; Vice-presidente, Dr. Miguel Fernández; Vice-presidente, Ing. Daniel A. García; Secretario de actas, Dr. Guillermo V. Stuckert; Secretario de correspondencia, Prof. Tulio Mácola; Tesorero, Sr. Bernardo Pilotto; Pro-tesorero, Dr. Carlos C. Hosseus; Vocales: Ing. Clodoveo Pascualini; Ing. Jorge E. Bobone; Ing. Luis Chechi; Ing. Ambrosio L. Taravella; Dr. Federico Padula; Dr. José Carlomagno; Dr. Meade L. Zimmer; Sr. Enrique Sparn.

SOCIOS ACTIVOS

Aguiar, Henoch D.
Bobone, Jorge E.
Brandan, Ramón A.
Broglia, Alberto A.
Buteler, Jesús E.
Camilloni, Carlos
Carlomagno, José
Chaudet, Enrique
Checchi, Luis
Deheza, Eduardo
Esteban, Fernando
Fernández, Miguel
Fontana, Lorenzo P.
García, Daniel
Godoy, Salvador A.
Gordillo, Pedro N.
Hosseus, Carlos Curt
Larrauri, Agustín C.
Mácola, Berardo A.
Mácola, Tulio
Mirizzi, Pablo Luis
Ninci, Raúl T.
Olaf Lützow, Holm
Olsacher, Juan
Padula, Federico
Pasqualini, Clodoveo
Peláez J. Gambastiani de

Pilotto, Bernardo
Ponce Laforgue, Carlos
Rothlin, Edwin
Schmiedecke, Augusto
Sparn, Enrique
Stuckert, Guillermo V.
Taravella, Ambrosio L.
Trebino, Natalio
Urciolo, Victorio
Vercello, Carlos
Yadarola, Mauricio L.
Zimmer, Mesde L.

SECCION SANTA FE

COMISION DIRECTIVA

Presidente, Dr. Gustavo A. Fester; Vice-presidente, Dr. José Piazza; Secretario de correspondencia, Ing. Quím. Francisco A. Bertuzzi; Secretario de actas, Ing. Quím. José Cruellas; Tesorero, Ing. Quím. Enrique Virasoro; Vocal 1º, Ing. José Babini; Vocal 2º, Prof. Rolando Hereñú; Vocal suplente 1º, Prof. Julio Salaber; Vocal suplente 2, Ing. Quím. Guillermo Berraz; Encargado de Biblioteca y Canje, Ing. Quím. Rodolfo Rouzaut; Encargado de Publicaciones, Ing. José Babini.

SOCIOS ACTIVOS

Anadón, Leónidas
Ariotti, Juan Carlos
Babini, José
Benet, Pedro José
Berraz, Guillermo
Bertuzzi, Francisco A.
Bonazzola, César J.
Borzone, Rodolfo
Bossi, Celestino
Caballero, Martín A.
Cerana, Miguel
Claus, Guillermo
Cohan, Marcos
Courault, Pablo
Crouzeilles, A. L. de
Cruellas, José
Christen, Carlos
Christen, Rodolfo G.
Damianovich, Horacio
Falco, Federico
Fester, Gustavo A.
Frenguelli, Joaquín
Golián, Josué (h.)
Gschwind, Eduardo P.
Hereñú, Rolando
Hotschewer, Curto
Juliá, Tolrá Antonio
Kleer, Gregorio
Lachaga, Dámaso A.
Mai, Carlos
Mántaras, Fernando
Marelli, Hipólito
Martino, Antonio E.
Montpellier, Luis Marcos
Mounicr, Celestino
Muzzio, Enrique
Nigro, Angel
Niklison, Carlos A.
Oliva, José
Peresutti, Luis
Piazza, José
Piñero, Rodolfo
Pozzo, Hiram J.
Ragonese, Arturo E.
Reinares, Sergio
Rouzaut, Rodolfo
Salaber, Julio
Salgado, José
Santini, Bruno L. P.
Schivazappa, Mario
Simonutti, Atilio A.
Tissembaum, Mariano
Urondo, Francisco E.
Virasoro, Enrique

SECCION MENDOZA

COMISION DIRECTIVA

Presidente, Dr. Juan B. Lara; Vice-presidente, Ing. Agr. José Raúl Ponce; Secretario, Ing. Agr. Julio Tolosa (h); Tesorero, Ing. Cayetano C. Piccione; Bibliotecario, Sr. Adrián Ruíz Leal; Vocales: Dr. Eduardo Carette; Dr. Mario Bidone; Ing. Alfredo Rosenthal; Sr. Manuel Tellechea; Ing. Agr. Rafael E. Pontis.

SOCIOS ACTIVOS

Aiurralde, Juan Carlos
Anzorena, Jacinto
Ayala Castagnino, G.
Basso, Germinal
Benegas, Raúl
Bidone, Mario
Borsani, Carlos Pablo
Burgoa, Pedro A.
Carette, Eduardo
Castillo, José
Croce, Francisco M.
Espinosa, Norberto A.
Flor Alvarado, José M.
Gabrielli, Francisco J.
Galeano, Edgardo
García, José Federico
Godoy Vergelin, G.
Gomensoro, José N.
Granzella, Sinibaldo
Guevara, José R.
Guiard, Ricardo
Jofré, Alberto L.
Lara, Juan B.
Lucero, Braulio G.
Lugones, Manuel G.
Magistretti, Guillermo
Maneschi, Ernesto
Maroso, José Angel
Maveroff, Aquiles
Mayorga, Santiago C.
Miyara, Salomón
Navarro Correas, José A.
Paganotto, Juan P.
Pelaia, Dante
Piccione, Cayetano C.
Ponce, José Raúl
Pontis, Rafael E.
Richard, Alfonso E.
Rosales, Ranulfo S.
Rosenthal, Alfrado
Ruíz, Aníbal
Ruíz Leal, Adrián
San Martín, José Benito de
Serra, Luis Angel
Silvestre, Tomás
Stura, Angel C.
Tellechea, Manuel
Tolosa, Julio (h)
Toso, Juan F.
Villanueva, Miguel Angel

SECCION LA PLATA

COMISION DIRECTIVA

Presidente, Dr. Carlos A. Sagastume; Secretario, Ing. Adolfo P. Grissi; Tesorero, Dr. Carlos Teobaldo; Vocales: Dr. Hilario Magliano, Dra. Juana Cortelezzi; Ing. Juan Sabato; Dr. Federico E. Christmann.

SOCIOS ACTIVOS

Alsina Fuertes, Fidel
Amarante, Pedro C.
Angil, Jerónimo
Arroyo Basaldúa, Víctor M.
Basualdo, Washington S.
Bauer, Conrado
Bonet, Luis A.
Canals Frau, Salvador
Cortelezzi, Juana
Crespi Gherzi, Rodolfo A.
Christmann, Federico E
Daló, Héctor R.
Ferrari, Obdulio J. F.
Gascón, Jorge
Gershánik, Simón
Giovambattista, Humberto
Grisi, Adolfo P.
Loedel Palumbo, Enrique
Mc Loughlin, Rogelio P.
Magliano, Hilario
Marmonti, Angel
Massimino, Blas
Méndez, José D.
Micheletti, Luis A.
Nico, Raúl
Oliva, Virgilio
Paternosto, Pedro G.
Pera, Tomás Carlos
Platzceck, Ricardo P.
Rodríguez, Marcelo R. N.
Sabato, Juan
Sáez, Francisco A.
Sagastume Berra, A. E.
Sagastume, Carlos A.
Scheggia, Eduardo R.
Teobaldo, Carlos
Toranzos, Fausto L.
Trejo, César A.
Ucha Udabe, Manuel
Vucetich, Danilo C.
Wilkens, Alejandro

SOCIOS CORRESPONDIENTES

Aguilar y Santillán, R.	México
Alvarez, Antenor	Sgo. del Estero
Amaral, Afranio de	San Pablo (Br.)
Avendaño ,Leónidas	Lima
Bachmann, Carlos J.	Lima
Bodenbender, Guillermo	Córdoba
Bolivar, Ignacio	Madrid
Bonarelli, Guido	Gubbio (It.)
Borel, Emile	París
Bragg, William Henry	Londres
Bruch, Carlos	Olivos (B. A.)
Cabrera, Blás	Madrid
Campos Porto, Pablo	Río de Janeiro
Carabajal, Melitón M.	Lima
Darmois, Eugenio	Nancy (Fr.)
Darmois, Georges	París
Dávila, Rubén	Santiago (Ch.)
Escomel Edmundo	Arequipa (P.)
Fiebrig, Carlos	Munich (Al.)
Fontecilla Larrain, Arturo	Santiago (Ch.)
Fort, Michel	Lima
González del Riego, Felipe	Lima
Greve, Germán	Santiago (Ch.)
Guinier, Philibert	Nancy (Fr.)
Hadamard, Jacques	París
Hauman, Luciano	Bruselas
Hernández, Juvenal	Santiago (Ch.)
Hijar y Haro, Luis	México
Janet, Pierre	París
Jiménez de Asúa, Luis	Madrid
Keiper, Guillermo	Berlín
Kinart, Fernando	Amberes
Lahille, Fernando	Tarn (Fr.)
Langevin, Paul	París
Levi Civita, Tulio	Roma
Lobo, Bruno	Río de Janeiro
Mardones, Francisco	Santiago (Ch.)
Molina, Enrique	Concepc. (Ch.)
Monjaráz, Jesús E.	México
Moretti, Gaetano	Milán
Oliver Schneider, Carlos	Santiago (Ch.)
Pereira d'Andrade, Lencastre	Nova Goa (I. P.)
Perrin, Tomás G.	México
Perrine, Carlos D.	Córdoba
Pi y Suñer, Augusto	Barcelona
Porter, Carlos E.	Santiago (Ch.)
Reyes Cox, Eduardo	Santiago (Ch.)
Rowe, Leo S.	New York
Shepperd, William R.	Wáshington
Tello, Julio C.	Lima
Valle, Rafael H.	México
Vélez, Daniel M.	México
Villarán, Manuel V.	Lima
Vitoria, Eduardo	Barcelona
Volterra, Vito	Roma

ANALES

DE LA

SOCIEDAD CIENTIFICA ARGENTINA

ADOPTADOS PARA SUS PUBLICACIONES POR LA

ACADEMIA NACIONAL DE CIENCIAS EXACTAS, FISICAS Y NATURALES

DIRECTOR: EMILIO REBUELTO

FEBRERO 1939 — ENTREGA II — TOMO CXXVII

SUMARIO

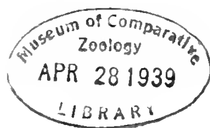
BUENOS AIRES
CALLE SANTA FE 1145

1939

SOCIEDAD CIENTIFICA ARGENTINA

ADVERTENCIA. — Los colaboradores de los Anales son personalmente responsables de la tesis sustentada en sus escrito. Tienen derecho a la corrección de do pruebas. Los que deseen tirada aparte de 50 ejemplares de sus artículos, deben solicitarla por escrito. Los manuscritos, correspondencia, etc. se enviarán a la sede social, Santa Fe 1145.

Impreso en los Talleres Gráficos "TOMAS PALUMBO" - La Madrid 321-325 - Buenos Aires



ESTUDIO ELEMENTAL DEL COMPLEJO BIHIPERBÓLICO

POR

JUAN M. ALESSI

Generalidades. — Al estudiar los números complejos cuyas componentes son números reales se presentan los casos siguientes (*):

$a + ib$, con $i^2 = -1$: complejos ordinarios o elípticos

$a + jb$, con $j^2 = +1$: complejos hiperbólicos

$a + kb$, con $k^2 = 0$: complejos duales o parabólicos

y resulta de interés considerar los números bicomplejos que se forman cuando las componentes son, a su vez, números complejos de cada una de las formas antedichas. Resultan así las siguientes expresiones bicomplejas:

I) Si $i^2 = -1$

$$a + i\,b \quad , \quad \text{donde} \begin{cases} a = x_1 + i' \,.\, x_2 \\ b = x_3 + i' \,.\, x_4 \end{cases} , \text{ con } i'^2 = -1$$

bicomplejo ordinario (o elíptico) de componentes ordinarias, o número bielíptico, o, simplemente, bicomplejo ordinario (1).

$$m + i\,n \quad , \quad \text{donde} \begin{cases} m = y_1 + j' \,.\, y_2 \\ n = y_3 + j' \,.\, y_4 \end{cases} , \text{ con } j'^2 = +1$$

(*) Stölz-Gmeiner, *Theoretische Arithmetik*, II T. Berlín (1915); L. Van der Waerden, *Moderne Algebra*, II T. Berlín (1935); J. C. Vignaux, *Anales de la Soc. Cient. Argentina*, CXXI (1936), y *Contribución al Estudio de las Ciencias Fisicomatemáticas*, E. I (1935) y E. 3 (1936).

(1) C. Segré, *Math. Annalen*, t. 40 (1892), p. 419-67, nº 28.

bicomplejo ordinario de componentes hiperbólicas, o número elíptico-hiperbólico.

$$p + i\,q \quad , \quad \text{donde} \begin{cases} p = z_1 + k' \,.\, z_2 \\ q = z_3 + k' \,.\, z_4 \end{cases} , \text{ con } k'^2 = 0$$

bicomplejo ordinario de componentes duales, o número elíptico-dual.

II) Si $j^2 = +1$, y con las mismas componentes $a, b;\ m, n;\ p, q$ que en el caso anterior:

$a + jb$ bicomplejo hiperbólico de componentes ordinarias, o número hiperbólico-elíptico, o, simplemente, bicomplejo hiperbólico (1).

$m + jn$ bicomplejo hiperbólico de componentes hiperbólicas, o número bihiperbólico.

$p + jq$ bicomplejo hiperbólico de componentes duales, o número hiperbólico-dual.

III) *Si* $k^2 = 0$

$a + k.b$ bicomplejo dual de componentes ordinarias, o número dual-elíptico (2), o, simplemente, bicomplejo dual.

$m + k.n$ bicomplejo dual de componentes hiperbólicas, o número dual-hiperbólico.

$p + k.q$ bicomplejo dual de componentes duales, o número bidual.

(1) M. Futagawa, *On the theory of functions of a quaternay variable.* The Tohokn Math. Journal. v. 29 (1928), v. 35 (1932).

(2) Study *Geometrie der Dynamen;* Agostinelli, Atti del R. Ist. Veneto, XCIV, 1935.

La teoría general de los hipercomplejos abarca el estudio de estos distintos tipos ([1]); pero, independientemente de esa teoría, puede encararse el desarrollo del álgebra de cada uno de ellos en forma más elemental.

El objeto de este trabajo es la consideración, bajo este aspecto, de los números bihiperbólicos, esto es, de los números

$$\alpha = c_1 + j\,c_2 \quad , \quad \text{con} \quad j^2 = +1$$

donde $\begin{cases} c_1 = r_1 + h\,r_2 \\ c_2 = r_3 + h\,r_4 \end{cases}$, siendo $\begin{cases} h^2 = +1 \\ \text{pero } h \neq j \end{cases}$

y r_1, r_2, r_3, r_4 números reales.

Es decir, que

$$\alpha = (r_1 + h\,r_2) + j\,.\,(r_3 + h\,r_4) =$$

$$= r_1 + h\,r_2 + j\,.\,r_3 + j\,h\,.\,r_4$$

y si llamamos

$$l = h\,j = jh$$

resulta $\qquad \alpha = r_1 + h\,r_2 + j\,r_3 + l\,r_4$

es decir, un número complejo de 4 unidades

$$1, \quad h, \quad j, \quad l$$

las cuales cumplen, por definición, las condiciones

$$h^2 = +1 \qquad ; \quad h\,.\,j = j\,.\,h = l$$

$$j^2 = +1 \qquad ; \quad h\,.\,l = l\,.\,h = h\,.\,(h\,.\,j) = h^2\,.\,j = j$$

$$l^2 = j^2\,.\,h^2 = +1\,(*) \quad ; \quad j\,.\,l = l\,.\,j = j\,.\,(h\,.\,j) = h\,.\,j^2 = h\,(**)$$

Teniendo en cuenta estas relaciones entre las unidades pueden realizarse las operaciones entre los números bihiperbólicos como si

([1]) G. Scorza, *Corpi numerici e algebre*. Messina, 1921.

(*) Se verifica, sin embargo, que $l \neq j$ y $l \neq h$.

(**) Cumpliéndose la propiedad conmutativa entre las unidades queda asegurado que el producto entre dos números de esta clase gozará así mismo de dicha propiedad.

ellos fueran polinomios; pero prescindiremos de este método por la excesiva extensión de sus desarrollos y trataremos de edificar la teoría partiendo de la *forma isótropa* de estos bicomplejos.

Llamaremos *unidades isótropas* a los números complejos hiperbólicos conjugados

$$j_1 = \frac{1+j}{2} \quad , \quad j_2 = \frac{1-j}{2}$$

que cumplen las siguientes condiciones:

a) $$j_1^2 = \frac{1+2j+j^2}{4} = \frac{1+j}{2} = j_1$$

b) $$j_2^2 = \frac{1-2j+j^2}{4} = \frac{1-j}{2} = j_2$$

c) $$j_1 \cdot j_2 = \frac{1-j^2}{4} = 0$$

d) $j_1 - j_2 = j$ (o sea la unidad hiperbólica)

e) $j_1 + j_2 = 1$ (o sea la unidad real)

Dado el número bihiperbólico

$$\alpha = c_1 + j \cdot c_2$$

es posible escribir

$$\alpha = (c_1 + c_2) \cdot \frac{1+j}{2} + (c_1 - c_2) \frac{1-j}{2}$$

o sea

$$\alpha = (c_1 + c_2) \cdot j_1 + (c_1 - c_2) \cdot j_2$$

y llamando

$$c_1 + c_2 = a \quad , \quad c_1 - c_2 = b$$

resulta

$$\alpha = a j_1 + b j_2$$

que es la forma isótropa del número bihiperbólico, siendo los números complejos hiperbólicos a, b sus *componentes isótropas*.

Dados los complejos hiperbólicos c_1 y c_2, componentes del número bihiperbólico

$$\alpha = c_1 + j\, c_2$$

quedan determinadas, pues, sus componentes isótropas a y b; y recíprocamente ya que, siendo

$$a = c_1 + c_2 \quad , \quad b = c_1 - c_2$$

resulta

$$c_1 = \frac{a+b}{2} \quad , \quad c_2 = \frac{a-b}{2}$$

IGUALDAD. — Dos números bihiperbólicos

$$\alpha = a j_1 + b j_2$$

$$\alpha' = a' . j_1 + b' j_2$$

son iguales cuando se verifican las condiciones

$$a = a' \quad , \quad b = b'$$

y en tal caso se escribe

$$\alpha = \alpha'$$

Reducida la condición de igualdad a la igualdad simultánea entre dos pares de números complejos hiperbólicos, resultará que la igualdad entre dos números bihiperbólicos es *reflexiva, simétrica y transitiva.*

Dos números bihiperbólicos

$$\alpha = a j_1 + b j_2 \quad , \quad \alpha' = a' j_1 + b' j_2$$

cuyas componentes isótropas no cumplen alguna de las condiciones

$$a = a' \quad , \quad b = b'$$

se dicen *desiguales,* y se anota $\alpha \neq \alpha'$.

Un número bihiperbólico es *nulo* únicamente cuando sus componentes isótropas son ambas nulas.

A un número bihiperbólico de la forma $\alpha = aj_1$ en el cual la segunda componente isótropa es nula lo llamaremos bihiperbólico *incompleto de 1er. orden*, y llamaremos *bihiperbólico incompleto de 2º orden* cuando sea nula la primera componente isótropa, es decir, cuando el número sea de la forma $\beta = bj_2$.

SUMA. — Dados los números bihiperbólicos

$$\alpha = aj_1 + bj_2 \quad , \quad \alpha' = a'j_1 + b'j_2$$

llamaremos *suma* al número bihiperbólico cuyas componentes isótropas sean, respectivamente, las sumas de las componentes isótropas del mismo orden; es decir, que

$$\alpha + \alpha' = (a + a')\, j_1 + (b + b')\, j_2$$

La suma es, pues, *conmutativa y asociativa* ya que de tales propiedades goza la suma de complejos hiperbólicos que son sus componentes isótropas.

DIFERENCIA. — Los números bihiperbólicos.

$$\alpha = aj_1 + bj_2 \quad , \quad \beta = -aj_1 - bj_2$$

se llaman *opuestos.*

La diferencia de dos bihiperbólicos es otro que sumado al sustraendo reproduzca el minuendo. Por consiguiente, para restar dos números bihiperbólicos se suma al minuendo el contrario del sustraendo

$$\therefore \quad \alpha - \alpha' = (aj_1 + bj_2) + (-a'j_1 - b'j_2)$$

$$= (a - a')j_1 + (b - b')j_2$$

PRODUCTO. — Llamaremos *producto* del número bihiperbólico $\alpha = aj_1 + bj_2$ por el complejo hiperbólico c al número bihiperbólico

$$\beta = c \,.\, \alpha = ac \,.\, j_1 + bc \,.\, j_2$$

Recordando las propiedades de las unidades isótropas

$$j_1 + j_2 = 1 \quad ; \quad j_1 - j_2 = j$$

resulta que el complejo hiperbólico c expresado como número bihiperbólico toma la forma

$$c\,(j_1 + j_2) = cj_1 + cj_2 \ (*)$$

y llamaremos *bihiperbólico puro* a todo número de la forma

$$aj = aj_1 - aj_2$$

Dados dos números bihiperbólicos

$$\alpha = aj_1 + bj_2 \quad , \quad \alpha' = a'j_1 + b'j_2$$

llamaremos *producto* de ambos al número bihiperbólico

$$\beta = \alpha \,.\, \alpha' = aa'j_1 + bb'j_2 \ (**)$$

Es decir, que las componentes isótropas del producto se obtienen multiplicando las componentes isótropas homólogas de los factores. El producto es, pues, *conmutativo, asociativo y distributivo,* o sea que

$$\alpha \,.\, \alpha' = \alpha' \,.\, \alpha \quad ; \quad (\alpha \,.\, \alpha') \,.\, \alpha'' = \alpha' \,(\alpha \,.\, \alpha'') \quad ;$$
$$(\alpha \pm \alpha') \,.\, \alpha'' = \alpha \,.\, \alpha'' \pm \alpha' \,.\, \alpha''$$

Aplicando esta definición de producto nos resulta que:

a) *El producto de dos bihiperbólicos incompletos del mismo orden es otro bihiperbólico incompleto del mismo orden que los factores.*

(*) En lo dicho queda incluído el caso de multiplicar un número bihiperbólico por uno real, o la expresión de uno de éstos en forma de bihiperbólico, pues el número real es un caso particular del complejo hiperbólico.

En cambio, no consideramos el caso de multiplicar un número bihiperbólico por un complejo ordinario, pues resultaría un bicomplejo hiperbólico para cada una de las componentes, y el conjunto vendría a ser un número de orden superior a los bicomplejos que consideramos.

(**) A esta definición de producto llegamos fácilmente considerando la operación como el producto de los binomios

$$(a\,j_1 + b\,j_2) \,.\, (a'\,j_1 + b'\,j_2)$$

y recordando las propiedades de los productos

$$j_1^2 = j_1 \quad ; \quad j_2^2 = j_2 \quad ; \quad j_1 \,.\, j_2 = 0$$

ya establecidas

En efecto; si

$$\alpha = aj_1 \quad , \quad \alpha' = a'j_1 \qquad (b = b' = 0)$$

será

$$\alpha \, . \, \alpha' = aa'j_1$$

y si

$$\beta = bj_2 \quad , \quad \beta' = b'j_2 \qquad (a = a' = 0)$$

será

$$\beta \, . \, \beta' = bb'j_2$$

b) El producto de dos números bihiperbólicos incompletos de distinto orden, es nulo.

c) El producto de un número bihiperbólico completo por uno incompleto, es otro bihiperbólico incompleto del mismo orden que el dado.

Si

$$\alpha = aj_1 + bj_2 \quad \text{y} \quad \begin{cases} \alpha' = a'j_1 \\ \beta' = b'j_2 \end{cases}$$

resulta

$$\alpha \, \alpha' = aa'j_1 \quad ; \quad \alpha \, . \, \beta' = bb'j_2$$

ANULACIÓN DEL PRODUCTO. — Sea el producto

$$\beta = \alpha \, \alpha'$$

donde

$$\alpha = aj_1 + bj_2 \quad \text{y} \quad \alpha' = a'j_1 + b'j_2$$

Si, por ejemplo,

$$\alpha = 0$$

deberá ser

$$a = b = 0$$

y como

$$\beta = aa'j_1 + bb'j_2$$

será

$$\beta = 0$$

Es decir, que si uno de los factores es nulo, el producto también lo es.

Esta es *condición suficiente,* pero no necesaria para la anulación del producto, pues ya hemos visto que el producto puede anularse sin que se anule ninguno de los factores cuando ellos son, por ejemplo, números bihiperbólicos incompletos de distinto orden.

Veamos qué ocurre con el producto $\beta = \alpha\,\alpha' = 0$ cuando uno de los factores, el α' por ejemplo, es incompleto de 1er. orden cuya componente isótropa no sea un complejo hiperbólico anulante (*).

En ese caso

$$a' \neq 0 \quad \text{y} \quad b' = 0$$

y como

$$\beta = \alpha\,\alpha' = aa'j_1 + bb'j_2 = 0$$

[lo cual significa que simultáneamente

$$aa' = 0\ (.)\ \text{y}\ bb' = 0\ (..)]$$

deberá ocurrir necesariamente que

$$a = 0$$

(pues está descartada la nulidad de a' así como su condición de anulante) pudiendo ser

$$b = 0 \qquad \text{ó} \qquad b \neq 0$$

Es decir, que: ó α tiene por componentes isótropas $a = b = 0$ (ésto es, $\alpha = 0$), ó α tiene por componentes isótropas $a = 0$, $b \neq 0$ (ésto es, α es un número bihiperbólico incompleto de 2º orden).

Análogamente se prueba que si

$$\alpha\,\alpha' = 0$$

y α' es un número bihiperbólico incompleto de 2º orden cuya componente isótropa no sea anulante, deberá ocurrir que: ó $\alpha = 0$, ó α es un bihiperbólico incompleto de 1er. orden.

Si el producto

$$\beta = \alpha\,\alpha' = 0$$

(*) Los complejos hiperbólicos anulantes o divisores de cero tienen por expresión general

$$c = r \pm rh$$

y expresados en forma isótropa son complejos hiperbólicos incompletos; en ambas maneras de expresarlos sus componentes son números reales.

y el factor α', por ejemplo, es incompleto de 1er. orden de componente isótropa anulante, de (. .) y de (.) resulta que, ya sea

$$b = 0 \qquad \text{ó} \qquad b \neq 0$$

deberá ocurrir que a sea *anulante combinado* con a' (*) y, por consiguiente, α resultará un número bihiperbólico (completo o incompleto) cuya primera componente isótropa sea anulante combinada con la de α'.

Análogamente; si α' es un bihiperbólico incompleto de 2º orden de componente isótropa anulante, resultará α un bihiperbólico cuya 2ª componente isótropa sea un anulante combinado con aquélla (siendo la 1ª componente nula o no).

Por último: si α y α' son completos y $\alpha\alpha' = 0$, por la expresión (.) deberá ocurrir que a y a' son anulantes combinados ya que $a \neq 0$ *y* $a' \neq 0$ *y* simultáneamente debe ocurrir que también b y b' sean anulantes combinados.

Resumiendo, podemos establecer que la condición de nulidad de uno de los factores para que el producto se anule *es necesaria* cuando ambos factores son bihiperbólicos completos que no tienen ninguna componente isótropa anulante.

COCIENTE. — Diremos que un número bihiperbólico α no nulo es *anulante o divisor de cero* cuando existe otro número bihiperbólico β distinto de cero tal que

$$\alpha \,.\, \beta = 0$$

y se expresa así

$$\frac{0}{\alpha} = \beta$$

Por lo ya expuesto resulta que son anulantes todos los números bihiperbólicos incompletos, de uno u otro orden, y los bihiperbólicos completos que tengan alguna de sus componentes isótropas que sea un divisor de cero (en el campo de los números complejos hiperbólicos).

(*) Diremos que dos complejos hiperbólicos son *anulantes combinados* cuando son de las formas $r_1 + r_1 h$ y $r_2 - r_2 h$; expresados en forma isótropa resultarían complejos hiperbólicos incompletos de distinto orden. J. C. VIGNAUX los llama también « complejos de distinta especie ».

Llamaremos *inverso o recíproco* de un número bihiperbólico

$$\alpha = aj_1 + bj_2$$

a otro número

$$\beta = xj_1 + yj_2$$

tal que

$$\alpha \,.\, \beta = 1$$

Pero siendo

$$\alpha \,.\, \beta = axj_1 + byj_2$$

y

$$1 = j_1 + j_2$$

será

$$ax\, j_1 + by\, j_2 = j_1 + j_2$$

lo cual exige que

$$\left\{ \begin{array}{l} ax = 1 \\ by = 1 \end{array} \right. \quad \text{por lo cual} \quad \left\{ \begin{array}{l} x = \dfrac{1}{a} \\ y = \dfrac{1}{b} \end{array} \right.$$

y el número bihiperbólico inverso del

$$\alpha = aj_1 + bj_2$$

toma la forma

$$\beta = \frac{1}{\alpha} = \frac{1}{aj_1 + bj_2} = \frac{1}{a} j_1 + \frac{1}{b} j_2$$

Para que $\dfrac{1}{a}$ y $\dfrac{1}{b}$ tengan significado en el campo complejo hiperbólico no deben ser a y b nulos ni anulantes, lo cual significa que no existe el recíproco de los números bihiperbólicos nulos o divisores de cero.

El *cociente* de dos bihiperbólicos (dividendo y divisor) es otro número bihiperbólico tal que su producto por el divisor reproduzca el dividendo; por consiguiente, para hallar el cociente basta multiplicar el dividendo por el inverso del divisor.

Es decir, que

$$\frac{\alpha}{\alpha'} = \frac{aj_1 + bj_2}{a'j_1 + b'j_2} = (aj_1 + bj_2) \cdot \frac{1}{a'j_1 + b'j_2} =$$

$$= (aj_1 + bj_2) \left(\frac{1}{a'} \cdot j_1 + \frac{1}{b'} \cdot j_2 \right)$$

o sea que

$$\therefore \quad \frac{\alpha}{\alpha'} = \frac{a}{a'} j_1 + \frac{b}{b'} j_2$$

La división es, pues, posible y unívoca salvo los casos en que el divisor sea nulo o anulante.

NÚMEROS BIHIPERBÓLICOS CONJUGADOS. — Llamaremos *números bihiperbólicos conjugados* aquéllos en los cuales la primera componente isótropa de uno sea igual a la segunda componente isótropa del otro. Es decir, que son conjugados los números bihiperbólicos

$$\alpha = aj_1 + bj_2$$
$$\overline{\alpha} = bj_1 + aj_2$$

y de acuerdo con las definiciones ya establecidas, resulta

a) $$\alpha + \overline{\alpha} = (a + b) j_1 + (b + a) j_2 = a + b$$

Es decir que *la suma de dos números bihiperbólicos conjugados es un complejo hiperbólico igual a la suma de las componentes isótropas de los números dados.*

b) $$\alpha - \overline{\alpha} = (a - b) j_1 + (b - a) j_2$$
$$= (a - b) j_1 - (a - b) j_2$$
$$= (a - b)\ (j_1 - j_2)$$

y como $j_1 - j_2 = j$ resulta que *la diferencia de dos números bihiperbólicos conjugados es un bihiperbólico puro.*

c) $$\alpha \,.\, \overline{\alpha} = abj_1 + baj_2 = ab,$$

o sea que:

El producto de dos bihiperbólicos conjugados es el complejo hiperbólico que se obtiene al multiplicar las componentes isótropas de uno de los números dados.

MÓDULO. — Llamaremos *módulo* del número bihiperbólico

$$\alpha = aj_1 + bj_2$$

al número real, positivo o nulo

$$|\alpha| = \sqrt{\frac{|a|^2 + |b|^2}{2}} \quad (*)$$

Cuando $\alpha = 0$ debe ser

$$a = b = 0 \quad \therefore \quad |\alpha| = 0 ;$$

y recíprocamente, si

$$|\alpha| = \sqrt{\frac{|a|^2 + |b|^2}{2}} = 0$$

lo que exige que

$$|a|^2 + |b|^2 = 0$$

debe ser

$$|a|^2 = |b|^2 = 0$$

y finalmente

$$a = b = 0$$

(*) Si consideramos el número bihiperbólico $\alpha = aj_1 + bj_2$ en la forma ordinaria, esto es, como un hipercomplejo de 4 unidades

$$\alpha = r_1 . 1 + r_2 . h + r_3 . j + r_4 . l$$

(siendo $h^2 = +1$, $j^2 = +1$, $l = ij$) podemos establecer (según la definición de SPAMPINATO (1) que

$$|\alpha| = \sqrt{r_1^2 + r_2^2 + r_3^2 + r_4^2}$$

y como

$$\begin{cases} r_1 + hr_2 = c_1 \\ r_3 + hr_4 = c_2 \end{cases} \quad \text{y} \quad \begin{cases} a = c_1 + c_2 \\ b = c_1 - c_2 \end{cases}$$

resulta

$$\begin{cases} a = (r_1 + r_3) + h\,(r_2 + r_4) \\ b = (r_1 - r_3) + h\,(r_2 - r_4) \end{cases}$$

$$|a|^2 = (r_1 + r_3)^2 + (r_2 + r_4)^2 = r_1^2 + r_3^2 + 2\,r_1 r_3 + r_2^2 + r_4^2 + 2\,r_2 r_4$$

$$|b|^2 = (r_1 - r_3)^2 + (r_2 - r_4)^2 = r_1^2 + r_3^2 - 2\,r_1 r_3 + r_2^2 + r_4^2 - 2\,r_2 r_4$$

$$\therefore \quad |a|^2 + |b|^2 = 2\,(r_1^2 + r_2^2 + r_3^2 + r_4^2)$$

o sea

$$r_1^2 + r_2^2 + r_3^2 + r_4^2 = \frac{|a|^2 + |b|^2}{2} = |\alpha|^2$$

que nos lleva asimismo a la definición propuesta.

(1) N. SPAMPINATO, *Sulle funzioni di una variabili in un algebra complessa a n unitá.* (Rendiconti del C. M. de Palermo, t. LVII, 1933).

(según lo estudiado en el campo de números complejos hiperbólicos). Es decir que *la condición necesaria y suficiente para que un número bihiperbólico sea nulo es que lo sea su módulo*.

Sean los números bihiperbólicos

$$\alpha = aj_1 + bj_2 \qquad \beta = a'j_1 + b'j_2$$

cuyos módulos son

$$|\alpha| = \sqrt{\frac{|a|^2 + |b|^2}{2}} \qquad |\beta| = \sqrt{\frac{|a'|^2 + |b'|^2}{2}}$$

y sabemos que

$$\alpha + \beta = (a + a')j + (b + b')j_2$$

$$\therefore \quad |\alpha + \beta| = \sqrt{\frac{|a + a'|^2 + |b + b'|^2}{2}}$$

Pero, en el campo complejo hiperbólico

$$|a + a'|^2 \leq [|a| + |a'|]^2$$

$$\therefore \quad |a + a'|^2 \leq |a|^2 + |a'|^2 + 2 \,.\, |a| \,.\, |a'|$$

y análogamente

$$|b + b'|^2 \leq |b|^2 + |b'|^2 + 2\, |b| \,.\, |b'|$$

$$\therefore \quad \frac{|a + a'|^2 + |b + b'|^2}{2} \leq \frac{|a|^2 + |b|^2}{2} + \frac{|a'|^2 + |b'|^2}{2} +$$

$$+ |a| \,.\, |a'| + |b| \,.\, |b'|$$

de donde resulta que

$$(.) \qquad |\alpha + \beta|^2 \leq |\alpha|^2 + |\beta|^2 + |a| \,.\, |a'| + |b| \,.\, |b'|$$

Por otra parte, sabemos también que

$$(..) \qquad [|\alpha| + |\beta|]^2 = |\alpha|^2 + |\beta|^2 + 2\, |\alpha| \,.\, |\beta| =$$

$$= |\alpha|^2 + |\beta|^2 + \sqrt{[|a|^2 + |b|^2] \,.\, [|a'|^2 + |b'|^2]}$$

Para relacionar .) y ..) supongamos que

$$|a| \,.\, |a'| + |b| \,.\, |b'| > \sqrt{[|a|^2 + |b|^2] \,.\, [|a'|^2 + |b'|^2]}$$

de donde (recordando que los módulos de los complejos hiperbólicos son números reales positivos)

$$|a|^2 \cdot |a'|^2 + |b|^2 \cdot |b'|^2 + 2|a| \cdot |a'| \cdot |b| \cdot |b'| >$$
$$> |a|^2 \cdot |a'|^2 + |b|^2 \cdot |a'|^2 + |a|^2 \cdot |b'|^2 + |b|^2 \cdot |b'|^2$$

y simplificando

$$|a'|^2 \cdot |b|^2 + |a|^2 \cdot |b'|^2 - 2|a| \cdot |a'| \cdot |b| \cdot |b'| < 0$$

o sea

$$[|a| \cdot |b'|]^2 + [|a'| \cdot |b|]^2 - 2|a| \cdot |b'| \cdot |a'| \cdot |b| < 0$$

es decir que

$$[|a| \cdot |b'| - |a'| \cdot |b|]^2 < 0$$

lo cual es absurdo ateniéndonos a la recordada propiedad de los módulos de los números complejos hiperbólicos. Ello prueba que

$$|a| \cdot |a'| + |b| \cdot |b'| \leq \sqrt{[|a|^2 + |b|^2] \cdot [|a'|^2 + |b'|^2]}$$
$$\therefore\ |\alpha|^2 + |\beta|^2 + |a| \cdot |a'| + |b| \cdot |b'| \leq |\alpha|^2 + |\beta|^2 +$$
$$+ \sqrt{[|a|^2 + |b|^2] \cdot [|a'|^2 + |b'|^2]}$$

y recordando .) y ..) resulta

$$|\alpha + \beta|^2 \leq [|\alpha| + |\beta|]^2$$

de donde, por último

$$|\alpha + \beta| \leq |\alpha| + |\beta|$$

Es decir, que *el módulo de la suma de dos números bihiperbólicos es menor o igual que la suma de los módulos de los sumandos;* y razonando análogamente se deduce que

$$|\alpha - \beta| \leq |\alpha| + |\beta|$$

Estableceremos ahora una acotación del módulo del producto de dos números bihiperbólicos, independientemente del método general debido a N. SPAMPINATO (*).

(*) Véase N. SPAMPINATO, *loc, cit.*

Consideremos, para ello, a los números bihiperbólicos α y β, y a sus módulos respectivos; sabemos que

$$\alpha \,.\, \beta = aa'j_1 + bb'j_2$$

y por consiguiente

$$|\, \alpha \,.\, \beta \,| = \sqrt{\frac{|\, aa' \,|^2 + |\, bb' \,|^2}{2}} \qquad [1]$$

y como

$$|\, \alpha \,| \,.\, |\, \beta \,| = \sqrt{\frac{|\, a \,|^2 + |\, b \,|^2}{2}} \,.\, \sqrt{\frac{|\, a' \,|^2 + |\, b' \,|^2}{2}}$$

es

$$4\, [|\, \alpha \,| \,.\, |\, \beta \,|]^2 = [|\, a \,| \,.\, |\, a' \,|]^2 + [|\, b \,| \,.\, |\, a' \,|]^2 + [|\, a \,| \,.\, |\, b' \,|]^2 + [|\, b \,| \,.\, |\, b' \,|]^2 \quad [2]$$

Además, en el campo complejo hiperbólico ocurre que

$$|\, a \,.\, a' \,| \leq \sqrt{2} \,.\, |\, a \,| \,.\, |\, a' \,|$$

$$|\, b \,.\, b' \,| \leq \sqrt{2} \,.\, |\, b \,| \,.\, |\, b' \,|$$

$$\therefore \quad [|\, a \,| \,.\, |\, a' \,|]^2 + [|\, b \,| \,.\, |\, b' \,|]^2 \geq \frac{|\, aa' \,|^2 + |\, bb' \,|^2}{2}$$

y recordando [2] resulta

$$4 \,.\, [|\, \alpha \,| \,.\, |\, \beta \,|]^2 \geq \frac{|\, aa' \,|^2 + |\, bb' \,|^2}{2}$$

y, por [1] es

$$4 \,.\, [|\, \alpha \,| \,.\, |\, \beta \,|]^2 \geq |\, \alpha\beta \,|^2$$

$$\therefore \qquad |\, \alpha \,.\, \beta \,| \leq 2 \,.\, |\, \alpha \,| \,.\, |\, \beta \,|$$

expresión que nos da una acotación del módulo del producto de dos números bihiperbólicos.

El signo = corresponde en dicha expresión al caso en que

$$[|\, b \,| \,.\, |\, a' \,|]^2 + [|\, a \,| \,.\, |\, b' \,|]^2 = 0$$

para lo cual

$$|\, b \,| \,.\, |\, a' \,| = 0 \qquad \text{y} \qquad |\, a \,| \,.\, |\, b' \,| = 0$$

es decir que:

$$\text{ó} \quad |\, b \,| = 0 \qquad\qquad \text{ó} \quad |\, a' \,| = 0$$

lo que significa que

$$\text{ó} \quad b = 0 \qquad\qquad \text{ó} \quad a' = 0$$

y simultáneamente

$$\text{ó} \quad a = 0 \qquad\qquad \text{ó} \quad b' = 0$$

Estudiaremos las condiciones para que esa expresión se verifique:

a) Si α es un número bihiperbólico completo, es

$$a \neq 0 \quad \text{y} \quad b \neq 0$$

y debe ocurrir, pues, que

$$b' = 0 \quad \text{y} \quad a' = 0$$

$$\therefore \quad \beta = 0$$

caso en el cual el producto $\alpha \, . \, \beta$ se anula.

b) Si α es incompleto de 1er. orden es

$$a \neq 0 \quad \text{y} \quad b = 0$$

$$\therefore \quad b' = 0$$

que se combina: o con $a' = 0$ (caso que descartamos, pues nos llevaría también a que $\beta = 0$) o con $a' \neq 0$.

$\therefore$ β es también un bihiperbólico incompleto de 1er. orden.

c) Si α es incompleto de 2º orden, se demuestra análogamente que: o α' es nulo (caso descartado), o α' es un incompleto de 2º orden.

Es decir, *que el módulo del producto de dos números bihiperbólicos alcanza su valor máximo (que es igual al duplo del producto de los módulos de los factores) cuando ambos son incompletos del mismo orden.*

Potencia y raíz. — Dado un número bihiperbólico

$$\alpha = aj_1 + bj_2$$

y el número entero y positivo n definiremos la n-sima potencia de α por la relación

$$\alpha^n = (aj_1 + bj_2)^n = (aj_1 + bj_2) \, . \, (aj_1 + bj_2) + \overset{(n}{\ldots} + (aj_1 + bj_2)$$

o sea que

$$(aj_1 + bj_2)^n = a^n j_1 + b^n j_2 \qquad (.)$$

Calculemos, como aplicación, las potencias sucesivas de las unidades isótropas y de la unidad hiperbólica.

$$j_1^n = (1\, j_1)^n = 1^n \,.\, j_1 = j_1$$

$$j_2^n = j_2$$

y como

$$j = j_1 - j_2 = 1\,.\,j_1 + (-1)\, j_2$$

es

$$j^{2m} = 1^{2m}.\, j_1 + (-1)^{2m}.\, j_2 = j_1 + j_2 = 1$$

y

$$j^{2m+1} = 1^{2m+1}\,.\, j_1 + (-1)^{2m+1}\,.\, j_2 = j_1 - j_2 = j$$

Y podemos establecer también que: *La potencia par de un bihiperbólico puro es un número real y la potencia impar es otro bihiperbólico puro.*

En caso de ser el exponente entero y negativo, la potencia se define por

$$\alpha^{-n} = (aj_1 + bj_2)^{-n} = \frac{1}{(aj_1 + bj_2)^n} = \frac{1}{a^n j_1 + b^n j_2} =$$

$$= \frac{1}{a^n}\, j_1 + \frac{1}{b^n}\, j^n$$

es decir que

$$(aj_1 + bj_2)^{-n} = a^{-n} j_1 + b^{-n} j_2$$

que generaliza la expresión (.) para el exponente entero y negativo.

Es inmediato que esta última expresión carece de sentido cuando alguno de los números a y b es nulo o anulante, pues sabemos que en el campo complejo hiperbólico las potencias n-simas de los anulantes lo son a su vez y de ellos no puede definirse el número inverso. Es decir que *no puede definirse la potencia de exponente entero y negativo de los números bihiperbólicos anulantes.*

Llamaremos *raíz n-sima* de un número bihiperbólico $\alpha = aj_1 + bj_2$ a otro número tal que su n-sima potencia sea α. Es decir que

$$\sqrt[n]{\alpha} = \sqrt[n]{aj_1 + bj_2} = \beta = a'j_1 + b'j_2$$

cuando

$$\beta^n = \alpha$$

o sea que

$$(a'j_1 + b'j_2)^n = a'^n j_1 + b'^n j_2 = aj_1 + bj_2$$

lo que exige que

$$\begin{cases} a'^n = a \\ b'^n = b \end{cases}$$

es decir que

$$\begin{cases} a' = \sqrt[n]{a} \\ b' = \sqrt[n]{b} \end{cases}$$

y por consiguiente

$$\sqrt[n]{aj_1 + bj_2} = \sqrt[n]{a} \,.\, j_1 + \sqrt[n]{b} \,.\, j_2$$

Distingamos los siguientes casos (*):

a) Si n es impar

$$\sqrt[n]{a} \quad \text{y} \quad \sqrt[n]{b}$$

son raíces únicas

$$\therefore \quad \beta = \sqrt[n]{a} \,.\, j_1 + \sqrt[n]{b} \,.\, j_2$$

existe siempre y es raíz única.

b) Si n es par y existen

$$\sqrt[n]{a} \quad \text{y} \quad \sqrt[n]{b}$$

cada una de ellas toma alguno de los cuatro valores posibles

$$\sqrt[n]{a} \begin{cases} \delta_1 = j_1 . \sqrt[n]{A} + j_2 \sqrt[n]{B} \\ \delta_2 = j_1 . (-\sqrt[n]{A}) + j_2 \sqrt[n]{B} \\ \delta_3 = j_1 . \sqrt[n]{A} + j_2 (-\sqrt[n]{B}) \\ \delta_4 = j_1 . (-\sqrt[n]{A}) + j_2 (-\sqrt[n]{B}) \end{cases} \quad \text{y} \quad \sqrt[n]{b} \begin{cases} \lambda_1 = j_1 . \sqrt[n]{A'} + j_2 . \sqrt[n]{B'} \\ \lambda_2 = j_1 . (-\sqrt[n]{A'}) + j_2 . \sqrt[n]{B'} \\ \lambda_3 = j_1 . \sqrt[n]{A'} + j_2 . (-\sqrt[n]{B'}) \\ \lambda_4 = j_1 . (-\sqrt[n]{A'}) + j_2 . (-\sqrt[n]{B'}) \end{cases}$$

(*) Véase: «Sobre las funciones polígenas de variable compleja hiperbólica», J. C. VIGNAUX.

donde A y B son las componentes isótropas del complejo hiperbólico a; A' y B' son las componentes isótropas del complejo hiperbólico b; y β será cualquiera de los números bihiperbólicos que se puede formar teniendo como primera componente isótropa alguno de los complejos hiperbólicos δ y como segunda componente isótropa alguno de los números λ.

Es decir que

$$\sqrt[n]{aj_1 + bj_2}$$

puede tomar 16 valores.

c) Si al ser n par no existe alguna de las raíces

$$\sqrt[n]{a} \quad , \sqrt[n]{b}$$

no existe la raíz

$$\sqrt[n]{aj_1 + bj_1}$$

Sucesiones. — Dada una sucesión de números bihiperbólicos

$$\alpha_n = a_n j_1 + b_n j_2 \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots)$$

diremos que tiene por límite el número bihiperbólico

$$\alpha = aj_1 + bj_2$$

(o que « tiende al número α ») si, prefijado un número real $\varepsilon > 0$ tan pequeño como se quiera, existe un rango p a partir del cual

$$|\alpha - \alpha_n| < \varepsilon$$

y en ese caso se indica que

$$\alpha_n \longrightarrow \alpha \qquad \text{o} \qquad \lim_{n \to \infty} \alpha_n = \alpha$$

La condición necesaria y suficiente para que una sucesión de números bihiperbólicos $\alpha_n = a_n j_1 + b_n j_2$ *tenga por límite el número* α *es que las sucesiones de sus respectivas componentes isótropas tengan por límites las componentes isótropas de dicho* α.

En efecto, como

$$\alpha - \alpha_n = (a - a_n) \cdot j_1 + (b - b_n)\, j_2$$

es

$$|\alpha - \alpha_n| = \sqrt{\frac{|a - a_n|^2 + |b - b_n|^2}{2}}$$

y si

$$\alpha_n \longrightarrow \alpha$$

resulta por definición que

$$|\alpha - \alpha_n| \longrightarrow 0$$

$$\therefore \quad \sqrt{\frac{|a - a_n|^2 + |b - b_n|^2}{2}} \longrightarrow 0$$

y siendo los módulos números reales positivos, ello significa que

$$\begin{cases} |a - a_n| \longrightarrow 0 \\ |b - b_n| \longrightarrow 0 \end{cases}$$

y en el campo complejo hiperbólico resulta

$$a_n \to a \quad \text{y} \quad b_n \to b$$

o sea que *la condición es necesaria.*

Y recíprocamente, si la condición se cumple

$$|a - a_n|^2 \longrightarrow 0 \quad \text{y} \quad |b - b_n| \longrightarrow 0$$

$$\therefore \quad \frac{|a - a_n|^2 + |b - b_n|^2}{2} \longrightarrow 0$$

$$\therefore \quad \sqrt{\frac{|a - a_n|^2 + |b - b_n|^2}{2}} = |\alpha - \alpha_n| < \varepsilon$$

o sea que

$$\alpha_n \to \alpha$$

es decir que *la condición es suficiente.*

Por consiguiente, la expresión

$$\lim_{n \to \infty} \alpha_n = \alpha$$

puede expresarse diciendo que

$$\lim_{n \to \infty} (a_n j_1 + b_n j_2) = j_1 \cdot \lim_{n \to \infty} a_n + j_2 \cdot \lim_{n \to \infty} b_n$$

Cuando la sucesión α_n tiene por límite al número α se dice que es *convergente;* es *divergente* cuando $a_n \rightarrow a$ pero $b_n \rightarrow \infty$, o cuando $a_n \rightarrow \infty$ pero $b_n \rightarrow b$, o cuando $a_n \rightarrow \infty$ y $b_n \rightarrow \infty$; y es *oscilante* cuando lo es alguna de las sucesiones de sus componentes isótropas.

Si

$$\alpha_n \rightarrow \alpha \quad \text{y} \quad \beta_n \rightarrow \beta \quad (.)$$

ocurre que

$$|\alpha - \alpha_n| < \frac{\varepsilon}{2}$$

$$|\beta - \beta_n| < \frac{\varepsilon}{2}$$

$$\therefore \quad |\alpha + \beta - \alpha_n - \beta_n| \leq |\alpha - \alpha_n| + |\beta - \beta_n| < \varepsilon$$

$$\therefore \quad |(\alpha + \beta) - (\alpha_n + \beta_n)| < \varepsilon$$

es decir que

$$\alpha_n + \beta_n \longrightarrow \alpha + \beta$$

o sea que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (\alpha_n + \beta_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n + \lim_{n \rightarrow \infty} \beta_n$$

Análogamente se prueba que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (\alpha_n - \beta_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n - \lim_{n \rightarrow \infty} \beta_n$$

Siendo

$$\alpha_n = a_n j_1 + b_n j_2$$

$$\beta_n = a'_n j_1 + b'_n j$$

la expresión (.) indica que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n\, j_1 + b_n\, j_2) = j_1 . \lim_{n \rightarrow \infty} a_n + j_2 . \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = a\, j_1 + b\, j_2$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a'_n\, j_1 + b'_n\, j_2) = j_1 . \lim_{n \rightarrow \infty} a'_n + j_2 . \lim_{n \rightarrow \infty} b'_n = a' j_1 + b' j_2$$

y como

$$\alpha_n . \beta_n = a_n . a'_n\, j_1 + b_n . b'_n\, j_2$$

resultará que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (\alpha_n . \beta_n) = j_1 . \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n . a'_n) + j_2 . \lim_{n \rightarrow \infty} (b_n . b'_n)$$

y en el campo complejo hiperbólico

$$\lim_{n \to \infty} (a_n \, . \, a'_n) = \lim_{n \to \infty} a_n \, . \lim_{n \to \infty} a'_n = a \, . \, a'$$

$$\lim_{n \to \infty} (b_n \, . \, b'_n) = \lim_{n \to \infty} b_n \, . \lim_{n \to \infty} b'_n = b \, . \, b'$$

$$\therefore \quad \lim (\alpha_n \, . \, \beta_n) = a \, . \, a' \, . \, j_1 + b \, . \, b' \, . \, j_2 =$$

$$= (aj_1 + bj_2) \, . \, (a'j_1 + b'j_2)$$

$$= \alpha \, . \, \beta$$

o sea que

$$\lim_{n \to \infty} (\alpha_n \, . \, \beta_n) = \lim_{u \to \infty} \alpha_n \, . \, \lim_{n \to \infty} \beta_n$$

Y análogamente se demuestra que

$$\lim_{n \to \infty} (\alpha_n : \beta_n) = \lim_{n \to \infty} \alpha_n : \lim_{n \to \infty} \beta_n$$

teniendo la precaución de agregar a la hipótesis que β_n y β no pueden ser iguales a cero ni anulantes.

Si

$$\alpha_n = a_n j_1 + b_n j_2 \to \alpha = a j_1 + b j_2$$

y h es un número entero calculemos el

$$\lim_{n \to \infty} (\alpha_n)^h \, .$$

Como sabemos que

$$(\alpha_n)^h = a^h{}_n \, j_1 + b^h{}_n \, j_2$$

resultará que

$$\lim_{n \to \infty} (\alpha_n)^h = j_1 \, . \lim_{n \to \infty} (a_n)^h + j_2 \, . \lim_{n \to \infty} (b_n)^h$$

y como en el campo complejo hiperbólico

$$a^h{}_n \longrightarrow a^h \quad \text{y} \quad b_n{}^h \longrightarrow b^h$$

$$\lim_{n \to \infty} (\alpha_n)^h = j_1 \, . \, a^h + j_2 \, . \, b^h = (aj_1 + bj_2)^h$$

$$= \alpha^h$$

En el caso de ser h un número negativo esta expresión carece de sentido cuando α es un bihiperbólico anulante.

LA POTENCIA e^{α}. — Dado el número hiperbólico completo $\alpha = aj_1 + bj_2$ calculemos

$$\lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{\alpha}{n}\right)^n$$

y como

$$1 = j_1 + j_2$$

será

$$1 + \frac{\alpha}{n} = j_1 + j_2 + \frac{a}{n} j_1 + \frac{b}{n} j_2$$

$$= \left(1 + \frac{a}{n}\right) j_1 + \left(1 + \frac{b}{n}\right) j_2$$

y por consiguiente

$$\left(1 + \frac{\alpha}{n}\right)^n = \left(1 + \frac{a}{n}\right)^n . j_1 + \left(1 + \frac{b}{n}\right)^n . j_2$$

Hagamos $n \to \infty$ y tomemos límites; será

$$\lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{\alpha}{n}\right)^n = j_1 . \lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{a}{n}\right)^n + j_2 . \lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{b}{n}\right)^n$$

y, siendo e la base de los logaritmos neperianos, sabemos que

$$\lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{a}{n}\right)^n = e^a$$

y

$$\lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{b}{n}\right)^n = e^b$$

por lo cual

$$\lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{\alpha}{n}\right)^n = j_1 . e^a + j_2 . e^b$$

y *pondremos por definición* que

$$\lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{\alpha}{n}\right)^n = e^{\alpha}$$

(siendo α un número bihiperbólico completo) o sea que

$$e^{\alpha} = e^{aj_1 + bj_2} = e^a j_1 + e^b j_2$$

Si consideramos análogamente que

$$e^{\beta} = e^{a'j_1+b'j_2} = e^{a'}\,j_1 + e^{b'}\,j_2$$

resultará que

$$e^{\alpha}\,.\,e^{\beta} = [e^{a}\,j_1 + e^{b}\,j_2]\,.\,[e^{a'}\,j_1 + e^{b'}\,j_2]$$

$$= e^{a}\,.\,e^{a'}\,j_1 + e^{b}\,.\,e^{b'}\,j_2 = e^{a+a'}\,j_1 + e^{b+b'}\,.\,j_2$$

y como

$$e^{\alpha+\beta} = e^{(aj_1+bj_2)+(a'j_1+b'j_2)} = e^{(a+a')j_1+(b+b')j_2}$$

$$= e^{a+a'}\,.\,j_1 + e^{b+b'}\,.\,j_2$$

resulta que

$$e^{\alpha}\,.\,e^{\beta} = e^{\alpha+\beta}$$

es decir que la definición aceptada *cumple la propiedad fundamental.*

Cumple asimismo las otras propiedades conocidas:

$$e^{1} = e^{j_1+j_2} = e\,.\,j_1 + e\,.\,j_2 = e$$

$$e^{0} = e^{0.j_1+0.j_2} = e^{0}\,.\,j_1 + e^{0}\,.\,j_2 = j_1 + j_2 = 1$$

$$e^{\alpha} : e^{\beta} = (e^{a}\,.\,j_1 + e^{b}\,.\,j_2) : (e^{a'}\,j_1 + e^{b'}\,j_2) = (e^{a} : e^{a'})\,j_1 + (e^{b} : e^{b'})\;j_2$$

$$= e^{a-a'}\,.\,j_1 + e^{b-b'}\,.\,j_2 = e^{(a-a')j_1+(b-b')j_2} = e^{\alpha-\beta}$$

En el caso de ser incompleto el número bihiperbólico que figura como exponente, será por ejemplo,

$$\alpha = aj_1$$

y

$$e^{\alpha} = e^{aj_1} = e^{aj_1+0.j_2} = e^{a}\,j_1 + e^{0}\,j_2 = e^{a}\,j_1 + j_2$$

y análogamente

$$e^{\beta} = e^{bj_2} = j_1 + e^{b}\,j_2$$

En el caso de ser el exponente un número complejo hiperbólico (y queda aquí incluído el caso de que sea real) recordando que

$$c = c(j_1 + j_2) = cj_1 + cj_2$$

resulta que

$$e^{cj_1+cj_2} = e^{c}\,.\,j_1 + e^{c}\,j_2 = e^{c}$$

y el resultado coincide con la exponencial de exponente complejo hiperbólico ya conocida.

LOGARITMO NEPERIANO. — Dado el número hiperbólico.

$$\alpha = aj_1 + bj_2$$

su *logaritmo neperiano* es el bihiperbólico β que cumpla la condición $e^{\beta} = \alpha$ y se representa así:

$$L(\alpha) = \beta$$

Siendo

$$\beta = a'j_1 + b'j_2$$

deberá ser

$$e^{a'j_1 + b'j_2} = aj_1 + bj_2$$

$$\therefore \quad e^{a'} j_1 + e^{b'} j_2 = aj_1 + bj_2$$

es decir que

$$\begin{cases} e^{a'} = a \\ e^{b'} = b \end{cases}$$

o sea que

$$\begin{cases} a' = L(a) \\ b' = L(b) \end{cases}$$

y por consiguiente

$$L(\alpha) = L(aj_1 + bj_2) = j_1 . L(a) + j_2 . L(b)$$

expresión que es válida cuando existen $L(a)$ y $L(b)$ lo cual ocurre cuando, dados a y b a su vez en forma isótropa, sus componentes de tal clase son reales y positivos.

Los logaritmos neperianos así definidos gozan de las mismas propiedades que en el campo complejo ordinario. Comprobémoslo verificando, por ejemplo, la regla para calcular el logaritmo del producto.

En efecto, siendo

$$\alpha = aj_1 + bj_2 \quad , \quad \beta = a'j_1 + b'j_2$$

es

$$\begin{aligned} L(\alpha . \beta) &= L(aa'j_1 + bb'j_2) \\ &= j_1 . L(aa') + j_2 . L(bb') \\ &= j_1 [L(a) + L(a')] + j_2 [L(b) + L(b')] \\ &= j_1 . L(a) + j_1 . L(a') + j_2 . L(b) + j_2 L(b') \\ &= [j_1 L(a) + j_2 . L(b)] + [j_1 . L(a') + j_2 L(b')] \\ &= L(aj_1 + bj_2) + L(a'j_1 + b'j_2) \\ &= L(\alpha) + L(\beta) \end{aligned}$$

Y con razonamientos análogos se prueba que

$$L(\alpha : \beta) = L(\alpha) - L(\beta)$$

$$L(\alpha^r) = r . L(\alpha)$$

$$L(\sqrt[r]{\alpha}) = \frac{1}{r} . L(\alpha)$$

(donde r *es un número entero y positivo*).

Representación geométrica. — Estudiando un espacio tetradimensional en el cual se considera un sistema ortogonal de referencia 0 (h_1, h_2, h_3, h_4) se puede establecer una correspondencia biunívoca entre sus puntos y los números bihiperbólicos $\alpha = aj_1 + bj_2$.

Para ello, en el plano (h_1, h_2) se determina un punto A como afijo de la componente isótropa a y en el plano (h_3, h_4) el afijo B de la componente isótropa b y trazando por ellos planos respectivamente paralelos a los planos coordenados (h_3, h_4) *y* (h_1, h_2) queda determinado, por su intersección en el espacio tetradimensional, el punto P_α.

No entramos a la consideración de las series numéricas y de potencias en este estudio elemental de los números bihiperbólicos ya que su desarrollo no importa ninguna novedad y es una simple extensión de lo estudiado para los complejos de componentes reales.

DETERMINACIÓN DE LOS MOMENTOS DE LAS PROBABILIDADES HIPERGEOMÉTRICAS ORDINARIAS Y EN EL CASO DE CONTAGIO (POLYA)

POR

C. E. DIEULEFAIT

INST. ESTADISTICA UNIV. LITORAL

1. — En 1924 el profesor K. Pearson abordó, en toda su generalidad, el estudio de los momentos de las probabilidades hipergeométricas que, como se sabe, corresponden al esquema de las pruebas repetidas sin reposición de los elementos extraídos. Ultimamente, en 1935, el profesor V. Romanovsky, retomando la cuestión, dió también, de un modo independiente, una solución de este problema. El procedimiento seguido en este estudio por Pearson se apoyaba en la natural utilización de la ecuación diferencial de Euler-Gauss, mientras que, en cambio, Romanovsky, prescindiendo de este recurso y basándose en unas identidades algebraicas de los números combinatorios, llegaba a una interesante solución que resumía en un algoritmo sugestivo.

En este trabajo, siguiendo un nuevo procedimiento, consigo resolver el problema, dando, lo que me parece nuevo en este punto, una expresión analítica de la función característica, utilizando para ello la integral de Cauchy y con la cual llego a la fórmula general que me permite, por cómoda vía recurrente, determinar los momentos sucesivos.

Un pequeño análisis del proceso seguido, permite aplicarlo con naturales variantes al caso de contagio, en el cual una vez extraído un cierto elemento se lo restituye al grupo inicial junto con Δ elementos nuevos de igual naturaleza.

Doy también para este caso, la expresión de la función característica y la ley general de formación de los momentos sucesivos.

2. — Si q y p son las probabilidades iniciales de un sistema de n elementos, al procederse a r extracciones sucesivas, sin reposición,

la variable v que corresponde al número de veces que puede presentarse el elemento de probabilidad inicial q, tomará los valores 0, 1, 2, ... r con probabilidad es P_v tales que:

$$P_v = \frac{(n\,q)_v\,(n\,p)_{r-v}}{(n)_r}\binom{r}{v}$$

siendo

$$(nq)_v = nq\,(nq - 1)\,\ldots\,(nq - v + 1)$$

$$(nq)_0 = 1 \quad \text{y} \quad \binom{r}{v}$$

el número combinatorio

$$\frac{r\,!}{v\,!\,(r - v)\,!}$$

En virtud de ello se tendrá también:

$$P_v = \frac{\binom{nq}{r}\binom{np}{r-v}}{\binom{n}{v}}$$

La función característica ordinaria estará dada por:

$$\varphi\,(t) = \sum_v P_v\,e^{vt} \qquad [1]$$

cuya expresión reducida nos proponemos obtener.

Para ello observo que:

$$\binom{m}{n} = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{z^m}{(z-1)^n}\,dz$$

siendo Γ un contorno cerrado que contenga el punto 1 y sin otra limitación en el caso en que, como los que consideraré primeramente, el exponente m es un número entero.

Esto permite dar para el valor P_v, la siguiente representación:

$$P_v = \frac{-1}{4\pi^2\binom{n}{r}}\int_G \frac{w^{pn}}{(w-1)^{r-v+1}}\,dw\int_\Gamma \frac{z^{nq}}{(z-1)^{v+1}}\,dz$$

Supondré aquí que los contornos cerrados Γ y G son circunferencias de radios R y ρ respectivamente con centro en los puntos 1 de los planos de las variables w y z.

De ello resulta:

$$\varphi(t) = \frac{-1}{4\pi^2\binom{n}{r}} \sum_v e^{vt} \int_G \frac{w^{pn}}{(w-1)^{r-v+1}} dw \int_\Gamma \frac{z^{qn}}{(z-1)^{v+1}} dz$$

y siempre que para un valor de t dado (que por lo demás aquí bastará tomar en el dominio del punto origen) se tenga:

$$|e^t| < \frac{R}{\rho} \qquad [2]$$

se seguirá:

$$\varphi(t) = \frac{-1}{4\pi^2\binom{n}{r}} \int_G \frac{w^{pn}}{(w-1)^{r+1}} dw \int_\Gamma \frac{z^{nq}}{(z-1)} \sum_v \left\{ \frac{e^t(w-1)}{(z-1)} \right\}^v dz$$

de donde:

$$\varphi(t) = \frac{-1}{\binom{n}{r} 4\pi^2} \int_G \frac{w^{pn}}{(w-1)^{r+1}} dw \int_\Gamma \frac{z^{nq}}{z-1-e^t(w-1)} dz$$

Pero, en virtud de la desigualdad [2], resulta:

$$\frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{z^{nq}}{z-1-e^t(w-1)} dz = \{1 + e^t(w-1\}^{nq}$$

con lo que:

$$\varphi(t) = \frac{1}{2\pi i \binom{n}{r}} \int_G \frac{w^{pn}\{1+e^t(w-1)\}^{nq}}{(w-1)^{r+1}} dw \qquad [3]$$

Esta fórmula, de fundamental importancia en este estudio, tiene una íntima relación con la notable fórmula dada por Jacobi para expresar un polinomio hipergeométrico. Como si se prescinde de las condiciones de probabilidades en que aquí nos hemos colocado, estas cuestiones tienen una derivación de interés para el análisis, aclararé, de paso, la anterior advertencia.

La definición [1] nos conduce también, teniendo en cuenta los valores de las P_v, al siguiente resultado:

$$\varphi(t) = \frac{(pn)_r}{(n)_r} F(-r, -nq, np - r + 1, e^t)$$

donde F es la indicatriz de la serie de Gauss que, para los parámetros α, β y γ y la variable z daba:

$$F(\alpha, \beta, \gamma, z) = 1 + \frac{\alpha . \beta}{1 . \gamma} z + \frac{\alpha(\alpha + 1)\beta(\beta + 1)}{1 . 2\gamma(\gamma + 1)} z^2 + \ldots$$

Ahora bien, la [3] puede también, directamente, escribirse en la forma:

$$\varphi(t) = \frac{1}{\binom{n}{r} r!} \left(\frac{d^r}{dw^r} \left[w^{pn} \{1 + e^t (w - 1)\}^{nq} \right] \right)_{w=1}$$

de donde:

$$(pn)_r F(-r, -nq, np - r + 1, e^t) = \left(\frac{d^r}{dw^r} \left[w^{pn} \{1 + e^t (w - 1\}^{nq} \right] \right)_{w=1}$$

resultado que con sólo hacer $e^t = z$ muestra su parentesco con la mencionada relación de Jacobi.

En lo que toca a nuestro objetivo, será preferible mantener la forma adoptada en la fórmula [3], y como los momentos:

$$m_s = \sum_v P_v v^s$$

en virtud de la [1] están dados por:

$$m_s = \varphi^{(s)}(0)$$

tendremos:

$$m_0 = \frac{1}{\binom{n}{r} 2\pi i} \int_G \frac{w^n}{(w - 1)^{r+1}} dw = 1$$

y en particular de:

$$\varphi'(t) = \frac{nq\, e^t}{\binom{n}{r} 2\pi i} \int_G \frac{w^{pn} \{1 + e^t (w - 1)^{nq-1}}{(w - 1)^r} dw$$

deduzco el resultado verificatorio:

$$m_1 = \frac{nq}{\binom{n}{r}} \binom{n-1}{r-1} = rq$$

Luego la función característica $\Phi(t)$ de la variable $v - rq$ (o sea de los desvíos respecto al valor medio), será:

$$\Phi(t) = \sum_v P_v e^{(v-rq)t} = \varphi^{-rqt} \varphi(t) \qquad [4]$$

y entonces:

$$\Phi(t) = \frac{e^{-rqt}}{2\pi i \binom{n}{r}} \int_G \frac{w^{pr} \{1 + e^t (w-1)\}^{nq}}{(w-1)^{r+1}} dw \qquad [5]$$

fórmula que constituye el punto fundamental para la determinación de los momentos por cuanto si con μ_s designamos estos momentos respecto al valor medio, o sea:

$$\mu_s = \sum_v P_v (v - rq)^s$$

en virtud de la [4] se tendrá:

$$\mu_s = \Phi^{(s)}(0)$$

Para ello, las derivaciones sucesivas de la [5] nos dan:

$$\Phi'(t) = -rq\Phi(t) + \frac{e^{(1-rq)t} nq}{\binom{n}{r} 2\pi i} \int_G \frac{w^{pn} \{1 + e^t (w-1)\}^{nq-1}}{(w-1)^r} dw$$

$$\Phi''(t) = -rq\Phi'(t) + (1-rq)[\Phi'(t) + rq\Phi(t)] +$$

$$+ \frac{e^{(2-rq)t} (nq)_2}{\binom{n}{r} 2\pi i} \int_G \frac{w^{pn} \{1 + e^t (w-1)\}^{nq-2}}{(w-1)^{r-1}} dw$$

etc., de donde:

$$\mu_1 = -rq\mu_0 + \frac{nq}{\binom{n}{r} 2\pi i} \int_G \frac{w^{n-1}}{(w-1)^r} dw = -rq + \frac{nq}{\binom{n}{r}} \binom{n-1}{r-1} = 0$$

$$\mu_2 = -rq\mu_1 + (1-rq)[\mu_1 + rq\mu_0] + \frac{(nq)_2}{\binom{n}{r}} \binom{n-2}{r-2}$$

y con sólo obervar el regular proceso de la derivación de la $\Phi(t)$ y pasando luego al punto $t = 0$ se tiene que, a partir del valor de $s = 1$, será:

$$\mu_s = P_{s-1}(\mu) + \frac{(nq)_s}{\binom{n}{r}} \binom{n-s}{r-s}$$

donde $P_{s-1}(\mu)$ es un polinomio en μ de subíndices, siendo el mayor $s-1$, siendo el inicial: $P_0(\mu) = -rq\mu_0$ y verificándose la recurrencia:

$$P_s(\mu) = \mu P_{s-1}(\mu) + (s - rq)[\mu_s - P_{s-1}(\mu)]$$

fácil de ir formando, con la sola advertencia de que el producto: $\mu P_{s-1}(\mu)$ es simbólico, significando que, como resultado del mismo, se ha de obtener el mismo polinomio $P_{s-1}(\mu)$, con todos los subíndices de las μ aumentados en una unidad.

3. — En el esquema del contagio, partiendo de un sistema inicialmente análogo al anterior y procediendo a la extracción de r sucesivos elementos verificando uno de los cuales se colocan en la urna el extraído junto con Δ elementos nuevos de la misma naturaleza, siendo P_v la probabilidad para que en estas condiciones el elemento de probabilidad inicial q se verifique v veces, se tendrá:

$$P_v = \binom{r}{v} \frac{nq(nq+\Delta)\ldots(nq+\{v-1\}\Delta)np(np+\Delta)\ldots(np+\{r-v-1\}\Delta)}{n(n+\Delta)\ldots(n+\{r-1\}\Delta)}$$

de donde, dividiendo numerador y denominador por n y llamando con δ al contagio relativo $\frac{\Delta}{n}$, tengo:

$$P_v = \binom{r}{v} \frac{\left(\frac{q}{\delta}, v\right)\left(\frac{p}{\delta}, r-v\right)}{\left(\frac{1}{\delta}, r\right)}$$

siendo, por ejemplo:

$$\left(\frac{q}{\delta}, v\right) = \frac{q}{\delta}\left(\frac{q}{\delta} + 1\right)\ldots\left(\frac{q}{\delta} + v - 1\right)$$

Se comprende de inmediato lo natural que resulta, en este caso, utilizar el recurso de las integrales de Euler para dar una expresión cómoda de P_v que habrá de servir para la determinación de su función característica. Es éste el camino seguido por el profesor Polya y resumido por nosotros en otro trabajo.

Ahora bien, mientras la utilización de las integrales de Euler no pueden aplicarse con éxito al caso anterior de la no reposición, nuestro procedimiento, seguido en dicho caso, también se aplica fácilmente al del contagio. Y como quiera que al efectuarlo sobre las bases del contagio se presentan condiciones dignas de mención para varias otras generalizaciones de estas reglas de tirajes, voy a ocuparme de su exposición, en la creencia de poder hacer con ello obra útil de colaboración en estas investigaciones.

Para ello, retomando la última expresión de los P_v, observo que puedo también escribirla en la forma:

$$P_v = \binom{r}{v} \frac{\left(\frac{q}{\delta} + v - 1\right)_v \left(\frac{p}{\delta} + r - v - 1\right)_{r-v}}{\left(\frac{1}{\delta} + r - 1\right)_r}$$

de donde deduzco que también será:

$$P_v = \frac{\binom{\frac{q}{\delta} + v - 1}{v} \binom{\frac{p}{\delta} + r - v - 1}{r - v}}{\binom{\frac{1}{\delta} + r - 1}{r}}$$

de donde:

$$P_v = \frac{-1}{\binom{\frac{1}{\delta} + r - 1}{r} 4\pi^2} \int_\Gamma \frac{z^{\frac{q}{\delta} + v - 1}}{(z-1)^{v+1}} dz \int_G \frac{w^{\frac{p}{\delta} + r - v - 1}}{(w-1)^{r-v+1}} dw$$

Si Γ y G son circunferencias centradas en los puntos 1 de los planos de las variables z y w por ser, en general, $\frac{p}{\delta}$ y $\frac{q}{\delta}$ números racionales, los radios respectivos de estas circunferencias deberán ser, hasta aquí, necesariamente menores que la unidad.

Para la función característica tendré:

$$\varphi(t) = \sum_{v} P_v \, e^{vt}$$

$$\varphi(t) = \frac{-1}{\binom{\frac{1}{\delta}+r-1}{r} 4\pi^2} \int_{\Gamma} \frac{z^{\frac{q}{\delta}-1}}{(z-1)} \, dz \int_{G} \frac{w^{\frac{p}{\delta}+r-1}}{(w-1)^{r+1}} \sum_{v} \left\{ \frac{e^t z (w-1)}{w (z-1)} \right\}^v dw$$

siempre que:

$$|e^t| < \left| \frac{w(z-1)}{z(w-1)} \right|$$

bastando con que t esté tomado en el dominio del origen, por lo cual, entonces, deberá ser:

$$1 < \left| \frac{w(z-1)}{z(w-1)} \right|$$

Para lo cual bastará con tomar el radio de G suficientemente pequeño y el de Γ cercano por defecto a la unidad.

En estas condiciones resulta:

$$\varphi(t) = \frac{-1}{4\pi^2 \binom{\frac{1}{\delta}+r-1}{r}} \int_{G} \frac{w^{\frac{p}{\delta}+r}}{(w-1)^{r+1}} dw \int_{\Gamma} \frac{z^{\frac{q}{\delta}-1}}{w(z-1) - e^t (w-1) z} \, dz$$

Ahora bien, en virtud de la anterior desigualdad, resulta:

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{\delta^{\frac{q}{1}-1}}{w(z-1) - e^t (w-1) z} \, dz = \frac{w^{\frac{q}{\delta}-1}}{(w - w e^t + e^t)^{\frac{q}{\delta}}}$$

Luego:

$$\varphi(t) = \frac{1}{\binom{\frac{1}{\delta}+r-1}{r} 2\pi i} \int_{G} \frac{w^{\frac{1}{\delta}+r-1}}{(w-1)^{r+1} \{w + e^t (1-w)\}^{\frac{q}{\delta}}} \, dw$$

de donde se deduce el valor verificatorio:

$$m_1 = \varphi'(0) = \frac{1}{\binom{\frac{1}{\delta}+r-1}{r}} \frac{q}{\delta} \binom{\frac{1}{\delta}+r-1}{r-1} = q\,r$$

Análogamente con lo ya visto en el caso anterior, la función característica de los desvíos $v - rq$ será:

$$\Phi(t) = \frac{e^{-rqt}}{\binom{\frac{1}{\delta}+r-1}{r} 2\pi i} \int_G \frac{w^{\frac{1}{\delta}+r-1} \{w + e^t(1-w)\}^{-\frac{q}{\delta}}}{(w-1)^{r+1}} dw$$

Por derivación, y tomando luego $\Phi^{(s)}(0) = \mu_s$ se tiene, en particular:

$$\mu_1 = -rq\mu_0 + \frac{1}{\binom{\frac{1}{\delta}+r-1}{r}} \frac{q}{\delta} \binom{\frac{1}{\delta}+r-1}{r-1} = 0$$

$$\mu_2 = -rq\mu_1 + (1-rq)[\mu_1 + rq\mu_0] + \frac{\binom{\frac{q}{\delta}, 2}{}}{\binom{\frac{1}{\delta}+r-1}{r}} \binom{\frac{1}{\delta}+r-1}{r-2}$$

o sea:

$$\mu_2 = (1-rq)\,rq + q\left(\frac{q}{\delta}+1\right) \frac{r(r-1)}{\frac{1}{\delta}+1}$$

y finalmente:

$$\mu_2 = pqr \frac{1+\delta r}{1+\delta}$$

Cuando el orden relativo del contagio o sea δ es nulo, la anterior fórmula concuerda con el valor de μ_2 en el esquema de las pruebas repetidas con reposición. Muestra también la anterior que al caso $\delta = \frac{-1}{n}$ o sea para $\Delta = -1$ que constituye el caso hipergeomé-

trico, se vuelve a obtener el resultado $pqr\dfrac{n-r}{n-1}$ el cual a su turno, si el número inicial de elementos es suficientemente grande, coincide con el correspondiente momento binomial.

Para los demás momentos bastará con considerar la fórmula general

$$\mu_s = P_{s-1}(\mu) + \frac{\left(\frac{q}{\delta}, s\right)}{\binom{\frac{1}{\delta} + r - 1}{r}} \binom{\frac{1}{\delta} + r - 1}{r - s}$$

desde $s = 1$ en adelante; valiendo la relación:

$$P_s(\mu) = \mu\, P_{s-1}(\mu) + (s - rq)\,[\mu_s - P_{s-1}(\mu)]$$

con $P_0(\mu) = -rq\mu_0$ y advertencias análogas al resultado de nuestro párrafo 2.

BIBLIOGRAFÍA

K. Pearson. *On the moments of the Hypergeometrical Series.* . Rev. *Biometrika.* Mayo 1924. Londres.

V. Romanovsky. *Sui momenti della distribuzione ipergeometrica. Giornale dell' Istituto Italiano degli Attuari.* 1935. Roma.

G. Polya. *Sur quelques points de la théorie des probabilités. Annales de l'Inst. H. Poincaré.* Fasc. 2. Volum. 1. París, 1931.

C. Dieulefait. *Series a coeficientes recurrentes y series de polinomios de Poincaré.* Publicac. Inst. de Estadística Fac. Ciencias Económicas, Univ. Litoral. 1938.

— *Los momentos de un grupo de funciones de probabilidad. Anales Sociedad Científica Argentina,* Enero 1938.

EL GRANITO Y LAS EFUSIONES BASÁLTICAS DEL EXTREMO AUSTRAL DE LAS SIERRAS DE CÓRDOBA

POR

VLADIMIR BORZACOV

PROLOGO

Entre los problemas de la Geología Cordobesa, figura la naturaleza de un grupo de pequeños cerros basálticos que se levantan aislados muy cerca del lugar en que el extremo austral de la Sierra, desaparece para continuar subterráneamente debajo de la llanura Pampeana. (Ver planos Nº 1 y 2 de la región adjuntos).

Dichos cerros « La Leoncita », « La Garrapata » y « La Madera », fueron objeto de rápidas visitas por parte de algunos de los ilustres precursores de nuestra ciencia geológica: Luis Brackebusch, Guillermo Bodenbender, G. Avé Lallemant, quienes informan acerca de ellos en sus trabajos.

Esas exploraciones tuvieron forzosamente que ser superficiales, porque correspondían a viajes de reconocimiento a través de extensas regiones que hasta entonces eran « tierras incógnitas », en cuanto a su naturaleza.

La presente disertación trata de llenar el claro que en nuestros conocimientos significa esa región, interesante por haber sido un centro volcánico y por ser vecina a la zona de Sampacho, cuya sismicidad se puso de manifiesto en el violento terremoto ocurrido el 10 de Junio de 1934.

Aparte de dar una información acerca de los cerros en cuestión, es objeto de este trabajo, dar una representación de la tectónica de esa región, obtenida mediante la aplicación de métodos modernos, basados en la tectónica del granito y la medición de las diaclasas que atraviesan las rocas.

Por eso la región examinada no se redujo al área ocupada por esas efusiones basálticas.

Ubicación de la región estudiada

-------- Contornos del sistema llamado Sierra de Cordoba.

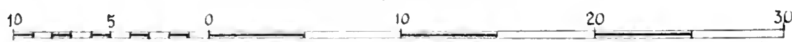
—·—·—·— Limite interprovincial

———— Ferro Carriles

Plano Nº 1.

33° S
10' 5' 65° W. 55' 50' 45'
Achiras
Los Yotes
Aº Espinillo
F.C.B.A.P.
Lg Chañaritos
Chañaritos
Cº Sampacho
Lag. Suco
Los Chañaritos
Selegua
Cº Suco
Las Rosas
Arroyo
Samp
Sampa
Pto Las Cortaderas
Arroyo
Cº Paraguayo
Suco
Cº Negro
Cº Blanco
Estancia La Clementina
F.C.B.A.P.
Las Cortaderas
Bulnes
Santa Rosa
Cº La Leoncita
Lg de las Cortaderas
Arroyo
Chajan
Cº Divisadero
Chajan
Las Viscacheras
Cº La Picara
Pto
Pto
Cº Fortin
Cº de La Madera
Balde Amargo
La Madera
El Tape
La Cortad
Cºs Garrapatas
15 20 25 30 35 40 45
10' 5' 65° W. 55' 50' 45'

Escala aproximada



1: 322.500

Plano Nº 2.

Visitamos las zonas de las areniscas de Sampacho e hicimos observaciones en el granito y en el gneis que afloran en las inmediaciones de los cerros Blanco y Negro y de Achiras.

De la tectónica de estos dos lugares, hemos deducido conclusiones que permiten ser relacionadas con la de la zona que es fin principal de este trabajo.

Como la deducción más interesante de este trabajo — por ser ella de orden general — puede señalarse la comprobación de una efectiva interferencia de líneas tectónicas, pertencientes al sistema de las Sierras Pampeanas y al sistema de las Sierras Bonaerenses y que había sido supuesta por el Dr. Ricardo Stappenbeck.

Dicha interferencia se pone de manifiesto con toda evidencia en el extremo austral de la Sierra de Córdoba.

SINTESIS DE LA GEOLOGIA DE LAS SIERRAS CORDOBESAS

Las Sierras de Córdoba pertenecen a un sistema llamado las « Sierras Pampeanas », formando el grupo más oriental y más austral.

El carácter de las Sierras Pampeanas se puede comparar en sentido geológico - morfológico, con las de Basin Ranges, del Oeste de los Estados Unidos de Norte América, pues tienen un rasgo común para ambos: son elementos muy antiguos, pero la edad geológica de estos macizos Pampeanos es muy discutida.

A base de las afirmaciones de Orville A. Derby, de que el silúrico está incluído al lado de las rocas arcaicas y precámbricas en el plegamiento de las Sierras da Mar y de Mantiqueira, comparadas por Suess, por su posición estructural dentro del continente, con las Apalaches de Norte América, se supone la presencia de una fase del plegamiento caledónico en nuestro continente.

Respecto a las Sierras Pampeanas, no hay duda sobre la existencia de una estructura precarbonífera, pues en Retamito entre los estratos de Carbonífero y su basamiento se intercala un hiatus, que corresponde a la denudación durante el Devónico Superior.

Los estudios de Rassmus en los macizos graníticos de Aconquija, de las sierras de Ambato y Velazco, inducen suponer que los procesos orogénicos corresponden principalmente al Silúrico.

La participación de rocas cambrosilúricas en el terreno metamórfico de las Sierras de Umango y Famatina, contribuye a sostener la idea de que haya en el basamiento cristalino de las Sierras Pampeanas, no solo un componente arcaico-precámbrico, sinó también paleozoico.

Esta idea ha sido aplicada por Hausen también a las Sierras del Gigante, de los Llanos, de Pié de Palo y la de Córdoba.

Todo eso muestra que las Sierras Pampeanas y por ende las de Córdoba, representan un complejo cambrosilúrico, plegado en el borde del Escudo Brasileño, gracias al empuje que se dirigía desde el Escudo en dirección al Oeste y tal plegamiento debe ser contemporáneo al plegamiento Caledónico, que en Europa está dividido en dos fases principales: la fase tacónica y la caledónica en el sentido estricto.

La primera divide el Ordoviciano del Gotlandiano y la segunda tiene dos fases en el final del Silúrico.

Según las observaciones del Dr. Beder, sobre una discordancia angular en la región del Yaví, parece que debe ser agregada una fase más para los movimientos habidos entre Cámbrico y Silúrico.

Todo esto da una analogía al concepto de la Green-Mauntain Disturbance en Norte América.

Durante muy largas épocas las antiguas Sierras Pampeanas del plegamiento Caledónico, sufrían los resultados de una fuertísima denudación continental, que las arrasó y niveló completamente, pero gracias a un proceso tectónico volvieron a aparecer en la época relativamente nueva en el escenario de nuestro continente, como nuevos sistemas de altos cordones de montañas.

Este proceso tectónico que representa la última parte de la historia de estas Sierras, se inició en la segunda mitad de la época terciaria, cuando las rocas metamórficas, intrusivas, sedimentarias y volcánicas, de las cuales se componen las Sierras de Córdoba, fueron afectadas por un despedazamiento muy intenso a lo largo de las líneas de rumbo meridional o submeridional, bajo la acción de las fuerzas que han producido el plegamiento andino.

En este caso el área ocupada por las Sierras Pampeanas se hallaban en el borde del Escudo Brasileño y actuaba como « antepáis ».

El despedazamiento produjo una serie de erupciones de andesitas y traquiandesitas (« El Morro » en San Luis y los cerros « Poca », « Velos », « Yerba Buena », en Córdoba) y de basaltos en el estremo austral de la Sierra de Córdoba (Cerros « La Madera », « La Garrapata » y « La Leoncita »).

Las perforaciones profundas, efectuadas en las llanuras Pampeanas, indican que el mismo zócalo cristalino del continente ha sido afectado por esos despedazamientos, igual como en el resto

de las montañas primitivas, ya denudadas, creando una estructura de bloques de las cuales unos han sido levantados y los otros hundidos.

Estos movimientos ascendentes han sido realizados en diferentes fases con varias subfases, hasta que ha sido alcanzado un relativo equilibrio en los bloques, que sin embargo de vez en cuando producen pequeños movimientos, ocasionando grandes terremotos.

La gran elevación actual de las Sierras, es la consecuencia de los movimientos ascendentes, producidos al final del Terciano y aún en el Pleistoceno.

Como otra consecuencia fué la posición de los bloques con inclinación suave de la superficie hacia el Este y con pendiente muy brusca hacia el Oeste.

Por ejemplo, en Villa Dolores, en la pendiente occidental se observan cinco terrazas que demuestran la realidad de los movimientos de los bloques.

El núcleo central de las Sierras de Córdoba, lo constituye la Sierra Grande.

Otras tres secciones de este complejo montañoso son: La Sierra del Norte o de Ischilín, La Sierra Chica, la parte Sud de la cual es llamada la Sierra de los Cóndores y la Sierra de Pocho con su parte Norte llamada la Sierra de Guasapampa.

A nosotros nos interesaba especialmente la Sierra Grande que en su mayor parte representa una planicie de destrucción de 2.000 metros de altura sobre el nivel del mar, que llega en el Cerro de Champaquí a su máximum, 2800 metros.

La Sierra Grande continúa hacia el Sud, con el nombre de Sierra de Comechingones, que desaparece bajo los sedimientos Pampeanos en la región, que es el objeto del presente estudio.

Pero allí no termina en realidad este macizo; como una cadena subterránea sigue corriendo hacia el Sud, ora asomando ligeramente, ora desapareciendo hasta que alcanza cerca de Pichimahuida, en el borde del Río Colorado, la gran zona de hundimiento, donde ya termina definitivamente.

Para una región relativamente limitada, entre San Luis y Córdoba, que cae en la prolongación de la Sierra de Córdoba, Stappenbeck ha manifestado que es probable que exista una estructura de bloques y en la que se reproducirían las mismas condiciones tectónicas, observadas en la Sierra de Córdoba.

De aquí en dirección al Sud desaparecen las rocas antiguas, pero existen nuevamente a poca profundidad al Sud del paralelo 35° S.

En esos afloramientos de rocas antiguas en la Pampa y sus partes antiguas, observamos la continuación subterránea de los diferentes sistemas de montañas que cruzan la llanura Pampeana.

Sobre todo parece que la cadena de la Sierra de Córdoba, se prolonga subterráneamente en dirección al Sud.

El rumbo de los esquistos en los pequeños afloramientos y Sierras de La Pampa, es de NE - SO y NNE - SSO, como también con la Sierra de Córdoba.

Pero fuera de ese, se destaca otro sistema de rumbo, NO - SE, es decir que corre en la dirección de la Sierra de Ventana.

Stappenbeck. interpreta los afloramientos dispersos de rocas antiguas de la Pampa Central y partes contiguas, como producidas por una especie de interferencia de dos diferentes sistemas de montañas.

En el cruce de los sistemas hay cada vez una tendencia ascendente del antiguo terreno, es decir existe un afloramiento.

Para la presente síntesis de la Geología de las Sierras Pampeanas en general y en las de Córdoba en particular, ha sido consultada la siguiente bibliografía:

1) Anselmo Windhausen. «Geología Argentina», edición Jacobo Peuser, años 1929 y 1931. Tomo I y II. Buenos Aires.

2) Oscar Schmieder. «Apuntes geomorfológicos de la Sierra Grande de Córdoba». Boletín de la Academia Nacional de Ciencias. Tomo XXV; año 1921.

3) Franco Pastore. «Elements du massif cristallin caledonien dans le centre de la République Argentine». Congres Géologique International. Belgique 1922 (Liege 1926).

4) Roberto Beder. «Los yacimientos minerales de la República Argentina, relacionados con las rocas igneas de las diferentes épocas geológicas». Revista Universidad Nacional de Córdoba. Año XIV, Nos. 1-2, 1927.

5) Roberto Beder. «Estudios geológicos e hidrológicos en los alrededores de Villa Dolores». Boletín Nº 14 B. de la Dirección General de Minas, Geología e Hidrología. Buenos Aires, 1916.

6) Guillermo Bodenbender. «La Sierra de Córdoba. Constitución geológica y productos minerales do aplicación». Anales Ministerio de Agricultura, Sección Geología, etc. Tomo I, Nº 2, Buenos Aires 1905.

7) H. Hausen. «On the Lithology an d Geological Structure of the Sierra de Umango área. Prov. of La Rioja. Arg. Rep. Acta Academial Aboensis Matemática et Physica I, 1921. Abo.

8) I. Rassmus. «La Sierra del Aconquija». Primera reunión Nac. Socied. Arg. Ciencias Naturales. Tucumán 1916. B. A. 1918.

9) I. RASSMUS. « Rasgos geológicos generales de las Sierras Pampeanas ». Boletín Nº 13 B. de la Dirección General de Minas, Geología e Hidrología B. Aires, 1916.
10) JUAN OLSACHER. « Estudio Geológico y Petrográfico de los alrededores del Dique San Roque ». La revista de la Universidad Nacional de Córdoba. Año XVII, Nos. 3-4. 1930.
11) GILLERMO BODENBENDER. « Triásico y terciario en la falda oriental de la Sierra de Córdoba. Relaciones morfológico-tectónicas. Rocas valcánicas ». Boletín de la Academia Nac. de Ciencias de Córdoba. Tomo XXXI, 1929, pp. 73-139.
12) GILLERMO BODENBENDER. « El Nevado de Famatina ». Boletín de la Academia Nacional de Ciencias. Tomo XXI, 1926.
13) ROBERTO BEDER. « Estudios geológicos en la Sierra de Córdoba, especialmente de las cálizas cristalina-granulosas y sus fenómenos de metamorfismo ». Boletín Nº 33 B. de la Dirección General de Minas, Geología e Hidrología. Buenos Aires 1922.
14) I. KEIDEL. « Sobre la distribución de los depósitos glaciares del pérmico, conocidos en la Argentina y su significación para la estratigrafía de la serie de Gondwana y la paleogeografía del hemisferio austral ». Boletín de la Academia Nac. de Ciencias de Córdoba. Tomo XXV, año 1921.
15) H. GERTH. « Die Pampienn Sierren Zentralargentiniens ». Geologische Rundschau. Tomo IV, año 1913.

RESEÑA DE LA GEOLOGIA DE LA REGION ESTUDIADA

Como ya queda dicho, es objeto de esta investigación la naturaleza de las efusiones de basalto en el extremo austral de la Sierra de Córdoba.

Para interpretar su sentido geológico en la forma más acertada posible, es indispensable conocer la región a través de la cual hicieron irrupción esas efusiones.

El núcleo original de la región lo constituye los esquistos cristalinos que se advierten en los cerros « Chañaritos », « Ají », « Blanco » y « Negro », « Aspero » y en la región que se extiende al sur de Achiras.

Su estructura y su posición tectónica, ya fueron determinadas en un principio por el plegamiento caledoniano.

Durante el paleozoico (silúrico, devónico), se produjeron grandes intrusiones de granito en diversos puntos de la Sierra de Córdoba, que hicieron desaparecer en grandes extensions los esquistos preexistentes.

En nuestra región, se puede estudiar el granito en Achiras, cerro « La Paraguaya », cerros « Blanco » y « Negro » y en la base de los cerros basálticos.

La unidad que se observa en la composición del granito y que sin variantes sensibles se conserva en esta región, hace probable de que la intrusión en esta parte de la Sierra, se haya producido simultáneamente y en una sola fase.

En el cerro « Blanco », puede observarse claramente el mecanismo de la intrusión y absorción del gneis por el granito (fig. I).

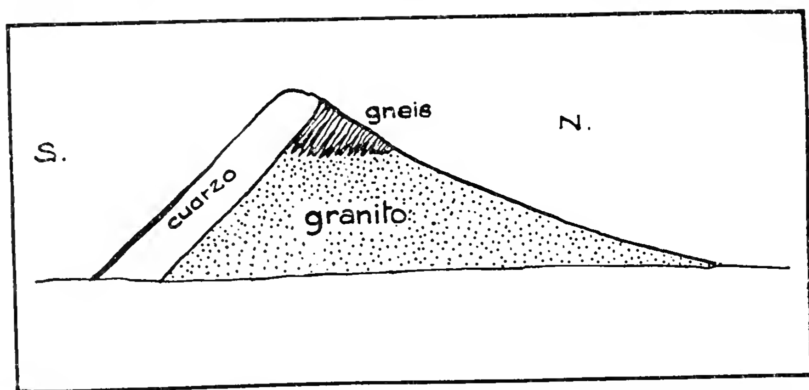


Fig. I. - Perfil N. S. a través del cerro « Blanco ». Intrusión del granito en el gneis

Un problema interesante y que en el marco de nuestra región no hemos podido resolver, lo representa la circunstancia de que en algunas partes el gneis está dispuesto normalmente (Este-Oeste) al rumbo corriente en la Sierra (NNE - SSD).

Esa disposición se ha observado en el cerro « Lajas » (Achiras) y cerro « Blanco ».

Algunas partes de la región investigada están cubiertas con depósitos de areniscas de edad probablemente pérmica (areniscas de Sampacho).

Durante el terciario y probablemente en dos fases distintas, se fracturó el complejo según dos sistemas de distinta orientación:

1ª Fase: Orientación N.O. - S.E. — N.E. - S.O.

Las líneas de dislocación de este sistema atraviesan las areniscas de Sampacho y son las causas de la sismicidad de esta región. Se ha comprobado que los rumbos de los cuerpos efusivos basálticos están en relación con ellas.

La orientación de estas dislocaciones corresponde a la del sistema de las Sierras Bonaerenses.

2ª Fase: Orientación N.N.E. - S.S.O.

Es la orientación de las dislocaciones que dividieron longitudinalmente a las Sierras Pampeanas en bloques y que caracterizan su estructura actual.

Simultáneamente con la efusión de basaltos, se sedimentaron algunas areniscas existentes en pequeños depósitos al pié del cerro « La Leoncita » y que subsisten protegidas por las toscas calcáreas que evitaron su desaparición.

Como formación geológica más moderna, figuran los sedimentos pampeanos.

En el cuadro siguiente se resumen los caracteres petrográficos y tectónicos de la región:

Epoca geológica	Sedimentos	Rocas igneas	Tectónica
arcaico y precámbrico.	esquistos cristalinos.		
paleozoico.		granitos.	plegamiento caledoniano intrusión.
pérmico?	areniscas.		
terciario.	arenisca tosca.	basaltos.	2ª fase orogénico líneas NO.-SE.; NE.-SO. 3ª fase orogénico líneas NS.
cuaternario y actual.	loes.		

LOS METODOS DE INVESTIGACION EMPLEADOS

La constitución petrográfica de la región estudiada era conocida a gandres rasgos a través de las comunicaciones de L. Brackebusch, G. Bodenbender y G. Avé Lallemant.

Muy pocos datos, en cambio, teníamos de la tectónica.

La región de las areniscas de Sampacho, muestra una división en varios bloques, separados por líneas de dislocación reconocibles en la superficie del terreno.

Por eso, esta región pudo ser investigada con los métodos corrientes de la geología, valiéndonos de la disposición de los estractos.

Desgraciadamente, muchos lugares que habrían suministrado indicios de importancia para la resolución de nuestros problemas, se encuentran ocultos bajo los sedimentos pampeanos.

En las regiones restantes, constituídas por granito y esquistos cristalinos, no se puede reconocer fácilmente los efectos de las fuer-

zas tectónicas y es necesario recurrir a la interpretación de diversos indicios, tales como las orientaciones de la textura del granito, de las diaclasas, de los filones de pegmatita y cuarzo.

Lo mismo hubo que observar la disposición de las erupciones de las rocas efusivas y la forma de las intrusiones de las rocas plutónicas. A continuación damos una síntesis de las ideas actuales sobre la tectónica del granito.

INVESTIGACION MICROSCOPICA DE LAS ROCAS

En el estudio microscópico de los granitos se ha dedicado preferente atención a la determinación de su *estructura* (en el sentido del desarrollo de los componentes minerales) con respecto a la *textura* (en el sentido de la ordenación en el espacio de dichos componentes).

Existe la tendencia de estimar exageradamente el valor de la textura microscópica de las rocas macizas, que en cambio, es útil conocer en las rocas metamórficas.

Las particularidades texturales de las rocas macizas se reconocen mejor por la brújula y la lupa, que bajo el microscopio.

El análisis estructural es de un valor importante, pues da noticias sobre los estadios de diferenciación y consolidación del magma y permite así fijar concretamente las diversas fases de la formación de los cuerpos graníticos.

La investigación estructural-microscópica ha perdido terreno en los últimos tiempos y solamente se le reconoce un valor marcado, cuando está relacionada con el conocimiento del quimismo de las rocas. Solamente así puede llegarse a la comprensión geológica de los procesos de diferenciación e intrusión magmáticas. En nuestro caso, desgraciadamente, no ha sido posible establecer esas relaciones por falta de análisis químicos de las rocas investigadas microscópicamente.

LA PETROGRAFIA TECTONICA

La petrografía tectónica trata de establecer una congruencia entre los datos petrográficos y geológicos, finalidad que no puede conseguirse únicamente con una simple consideración petrográfica de los cuerpos intrusivos.

El fin propio de la investigación geológica de los cuerpos intrusivos, consiste en el conocimiento de la formación del espacio ocupado por el granito, la forma del cuerpo formado por esta roca vecina. Es decir, se deben establecer: el camino de salida del magma, la cubierta o techo, el fundamento y la forma del cuerpo intrusivo, antes de poderse conocer a ciencia cierta su génisis.

Con la resolución de esos problemas se relaciona posteriormente la investigación de la textura — la estructura interna del cuerpo granítico — que informa acerca del movimiento de que estuvo animada la masa que lo formó.

A este respecto debe recalcarse bien el concepto de « movimiento », pues cuando se ha considerado la tectónica del granito, se ha abusado del concepto de « presión ».

Ello no representa un cargo a las ideas de H. Cloos sobre esta rama de la geología, ya que no altera en nada su esencia, que consiste en el reconocimiento de la anisotropía del granito que se manifiesta en;

la pequeña textura (la posición de los componentes lineales o lamelares)
la posición de las « Schlieren »
la naturaleza de las diaclasas.

La investigación de las diaclasas del granito presupone que deben ser consideradas como « primarias ».

La naturaleza de estas diaclasas (ya hayan sido producidas por el movimiento o por la contracción del magma) no se deduce de su orientación hacia el contacto marginal — como lo sostuvieron algunos autores — sino de sus características específicas, de su rellenamiento y de su continuación eventual a través de la roca vecina.

En la denominación de las diaclasas, reconocidas como « primarias », hemos adoptado la nomenclatura de H. Cloos.

Las diaclasas verticales, que se distinguen por estar acompañadas de un clivaje del granito y una disposición paralela de los componentes, reciben el nombre de « diaclasas S » (Steilklüfte).

Las diaclasas dispuestas normalmente a aquellas y caracterizadas a menudo también por un clivaje de la misma orientación y por una disposición paralela de los componentes, reciben el nombre de « diaclasas L » (Lagerklüfte).

En el interior de los macisos graníticos, suele abundar el sistema S, mientras que en las partes marginales, el sistema L.

Las diaclasas de la tercera dirección, las transversales a S, son denominadas « diaclasas Q » (Querklüfte).

Con ellas suelen relacionarse las rocas filonianas, que representan el último elemento que cae bajo el análisis tectónico.

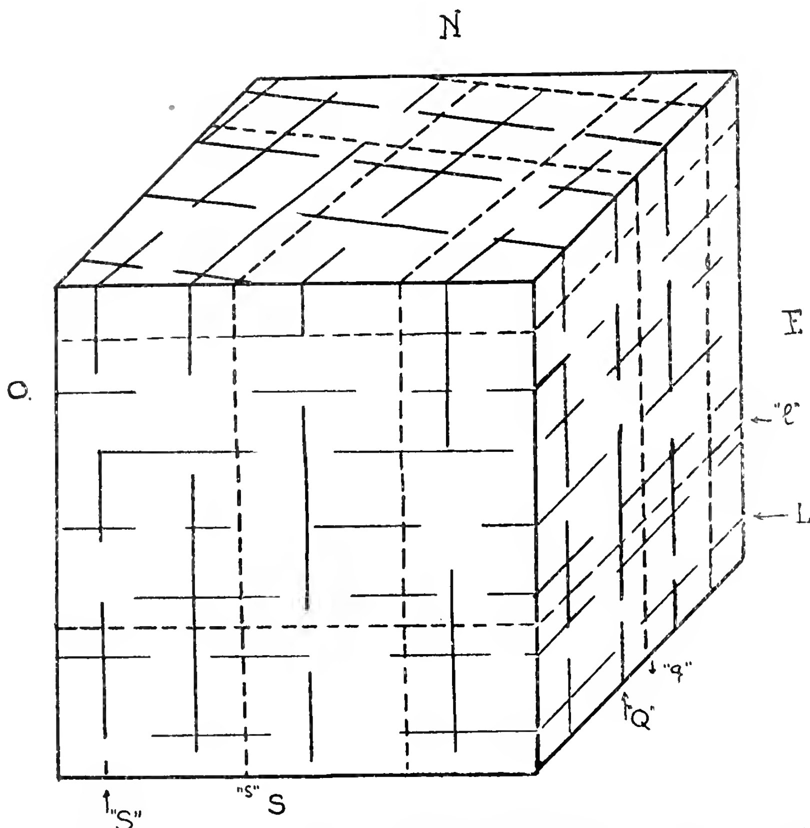


Fig. 3. - Diagrama de los elementos estructurales del granito de « Achiras », (Depto. Río Cuarto), cantera « Los Nogales ». (Elementos primarios).

« S » Diaclasas longitudinales de H. Cloos.
« Q » Diaclasas transversales de H. Cloos.
« s » Textura longitudinal («seda » de los picapedreros).
« L » Diaclasas horizontales de H. Cloos.
« q » Textura transversal (« trincante » id.).
« l » Textura horizontal (« levante » id.).

La disposición relativa de estos elementos en el granito de Achiras, se advierte en los diagramas de las figuras 3 y 3ª.

Los estudios realizados en diversos puntos de la Sierra de Córdoba por J. Olsacher (1), han revelado la existencia de orienta-

(1) J. Olsacher. « Estudio geológico y petrográfico de los alrededores del dique San Roque ». Revista de la Universidad Nacional de Córdoba. Año XVII. Nos. 3-4. Córdoba, 1930. Separado, págs. 42 y siguientes.

ciones constantes de las diaclasas que atraviesan las rocas y que se dejan agrupar en tres sistemas o pares de acuerdo al esquema de la figura 4.

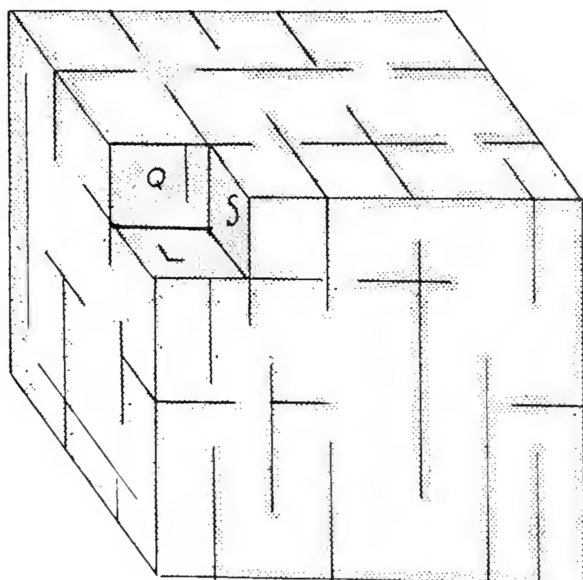


FIG. 3 a. - Esquema de las diaclasas originadas por presiones laterales. La flecha indica el sentido de éstas.

Q Diaclasas tranversales.
S Diaclasas verticales.
L Diaclasas horizontales.

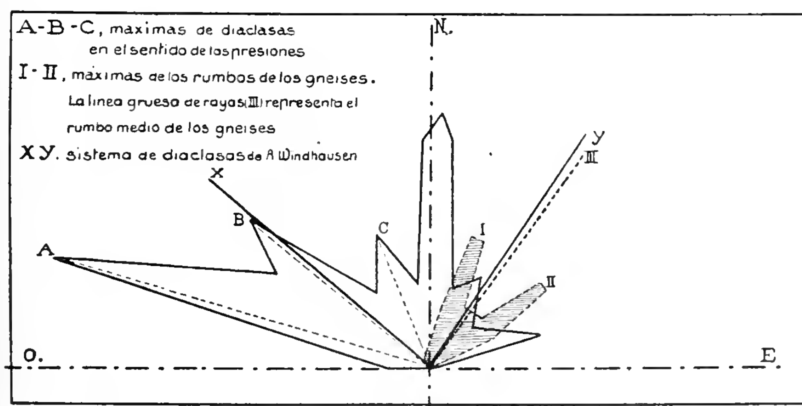


FIG. 4. - Los sistemas de diaclasas en la Sierra Chica, según J. Olsacher

Estos sistemas también aparecen en la zona de nuestra investigación y las observaciones realizadas nos permiten un ensayo de su clasificación cronológica.

Advertimos que nuestros estudios de la tectónica del granito en « La Leoncita », cerros « Blanco » y « Negro » y Achiras, no tratan de resolver el problema del origen de esos cuerpos intrusivos, sino de establecer la naturaleza de sus diaclasas para distinguir las « primarias » de las « secundarias ».

Ese conocimiento era de interés, pues como se verá en su lugar, los rumbos de los cuerpos efusivos de basalto, coinciden con los rumbos de las diaclasas del granito que les sirve de fundamento.

Para la redacción del capítulo que antecede, hemos consultado la siguiente bibliografía:

1. HANS CLOOS. Tektonische Behandlung magmatischer Erscheinungen. I. Das Riesengebirge. Berlín, 1925.
2. L. MILCH. Der Pluton des Riesengebirges (nach H. Cloos). En Fortschritte der Mineralogie, Kristallographie und Petrographie. Tomo 12, págs. 229 a 252. Berlín, 1927.
3. S. VON BUBNOFF. Der Werdegang einer Eruptivmasse. Geologischpetrographische Analyse der Intrusionstektonik im Schwarzwalde. Berlín, 1928.
4. W. DEECKE. Die Tektonik des Schwarzwälder Grungebirges. Berlín, 1933.
5. HANS CLOOS. Das Batholithenproblem. Berlín, 1923.

EL GRANITO

El granito de esta región puede ser estudiado en la cantera del cerro « La Leoncita » y en los cercanos « Blanco » y « Negro ». Aflora también el cerro « Chañaritos », cerca de Sampacho, el cerro «La Paraguaya » y en los alrededores de la localidad de Achiras.

EL GRANITO DE « LA LEONCITA » (CHAJÁN)

Se trata de un granito muscovítico, de grano mediano y es en el que se destacan los cristales de ortoclasa con maclas de Karlsbad. Se advierte una sensible orientación paralela de los componentes.

Bajo el microscopio aparece este granito como una asociación granulosa-hipidiomorfa, normal, de los siguientes componentes esenciales: cuarzo, ortoclasa, microlino, paglioclasa y muscovita.

Como accesorios existen granate y apatita.

El *granate*, en pequeños cristales ligeramente rosados y de contornos redondeados y la *apatita* en pequeñas varillas de contornos perfectos, figuran como las primeras formaciones y existen en cierta proporción.

La mica, en estado fresco, está representada por la *muscovita* primaria, que en las preparaciones es completamente incolora, no mostrando pleocroísmo.

Se advierte asociaciones de varios individuos diversamente orientados.

Accidentalmente se encuentran algunas hojas de *biotita parda*.

La *paglioclasa* aparece en menor cantidad que la ortoclasa, en secciones idiomorfas. Se encuentra en buen estado de conservación. Se determinó el ángulo de extinción sobre M, obteniéndose una valor de + 7°. Se trata pues, de una *oligoclasa*.

La ortoclasa, también en buen estado de conservación, muestra algunas asociaciones pertíticas, lo mismo que en el *microclino*, que aparece con su estructura característica.

El *cuarzo* es el componente más joven. Algunas preparaciones lo muestran con leve extinción ondulosa y algo fracturado.

El orden de segregación de estos componentes viene dado por el siguiente esquema:

1. granato - apatita
2. muscovita (biotita)
3. plagioclasa
4. ortoclasa
5. cuarzo
6. pertita.

El granito de la región de los cerros Blanco y Negro

El granito del cerro Negro muestra la misma composición esencial que el descrito anteriormente.

La *plagioclasa*, la *ortoclasa* y el *microlino*, son los mismos. Las diferencias son las siguientes:

El granito de Cerro Negro, es más rosado que el de La Leoncita; la *apatita*, es más frecuente en el primero que en el segundo; el *cuarzo* del granito de Cerro Negro, está más fracturado y muestra una fuerte extinción ondulosa.

En la estructura del granito de Cerro Negro se notan modificaciones locales que consisten en un desarrollo notable de los cristales de ortoclasa y que comunican a la roca un carácter porfírico. Igualmente en el Cerro Blanco, se nota una facies del granito caracterizada por el desarrollo idiomorfo de los cristales de cuarzo y que se destacan nítidamente dentro de la masa de los res-

tantes componentes, dando a la roca el aspecto de un pórfido cuarcífero.



Fig. 5.



Fig. 6.

Los granitos de Achiras y cerro la Paraguaya, no muestran diferencias sensibles con respecto del de La Leoncita.

La composición petrográfica es la misma.

En el granito de Achiras, son notables los fenómenos de erosión eólica, de los que se adjuntan dos fotografías (figuras 5 y 6).

LA TECTONICA DEL GRANITO

Las observaciones sobre la tectónica del granito expuestas a continuación, han sido recogidas allí donde había canteras que permitían examinar la roca fresca y sus caracteres estructurales.

Dichas canteras se encuentran al pie del cerro La Leoncita, en los cerros Blanco y Negro y en los Nogales, al Oeste de Achiras.

En el afloramiento del granito del cerro La Paraguaya, no existen canteras y las observaciones se redujeron a comprobar el rumbo de las diaclasas superficiales.

CANTERA « LA LEONCITA »

Observando detenidamente el granito de La Leoncita, muestra una textura determinada por una disposición paralela de los minerales componentes (alineación de la mica y del feldespato). Dicha orientación corresponde al rumbo N. 15° E (figura 7).

Esta disposición determina también un clivaje del granito que revela en la facilidad con que se deja partir, en esa dirección y que los picaprederos del lugar denominan « la seda ».

Los mismos picaprederos manifestaron conocer otro clivaje del granito y que está dispuesto vertical y transversalmente a aquél, « el trincante » y, además, otro horizontal, « el levante ». Estas tres direcciones, normales entre sí, determinan la orientación de la anisotropía del granito del lugar y son los que utilizan los picapedreros para la confección de adoquines.

Relacionados con el clivaje N. 15° E., y el transversal a él « seda y trincante », existen disclasas que son perfectamente lisas y nítidas.

Estas disclasas pues deben ser consideradas como « primarias », porque su génesis corresponde a la época de consolidación del magma.

Las diaclasas restantes, se reparten en los rumbos siguientes:

N. S.
N. 15 E.
N. 50 E.
E. O.
N. 50 O.
N. 75 O.

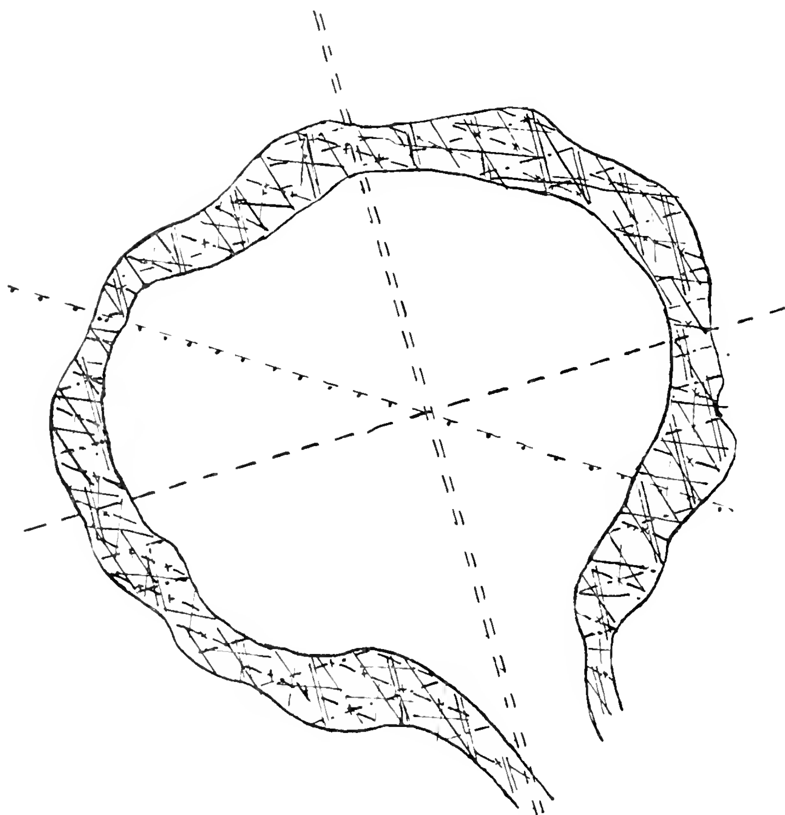


FIG. 7. - Plano tectónico de la cantera de granito «La Leoncita» (Chajan, F.C.B.A.P.).

Texturas del granito

= = = longitudinal « seda »
— —· — transversal « trincante »
—· —· —· horizontal « levante ».

Diaclasas del granito

——— diaclasas S } primarias
— . — . diaclasas Q } primarias
—×—× diaclasas L } primarias
—· —· — diaclasas secundarias.

CANTERAS DE CERRO « NEGRO » Y CERRO « BLANCO »

Los rumbos de la textura y de las diaclasas del granito de « La Leoncita » se reproducen en esta región. (Véase diagrama fig. 8).

Puede observarse que el relieve del terreno está regido por las diaclasas especialmente de rumbo N. 15° E.

En algunas partes el granito se distingue por el gran desarrollo de la ortoclasa, cuyos individuos llegan a tener una longitud de 4 centímetros y que se orientan también de acuerdo a aquel rumbo N. 15° E.

Igual rumbo tienen algunos filones de granito aplítico que llegan a tener un espesor de 10 centímetros.

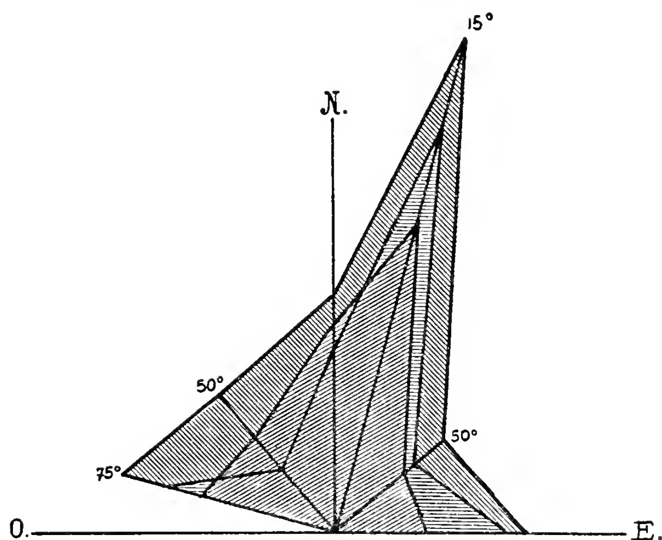


FIG. 8 - Rosas de diaclasas en el granito del extremo austral de la Sierra de Córdoba.

« La Leoncita »

Cerros « Blanco y Negro »

«Archiras ».

CANTERAS DE « LAS ACHIRAS »

Las condiciones tectónicas del granito de esta región, observadas en las canteras de « Los Nogales », situadas a tres kilómetros y medio al oeste de Las Achiras, son las mismas que en las regiones ya consideradas, en lo que se refiere a las orientaciones de la textura, al clivaje y a las disclasas. (Véase diagrama de la figura 8).

LAS ARENISCAS DE SAMPACHO (1)

La región de Sampacho está constituída por una llanura ligeramente ondulada que paulatinamente eleva su altura hacia el Oeste, donde se destacan dos cerros aislados « Suco » y el cerro « Chañaritos » o « Sampacho ».

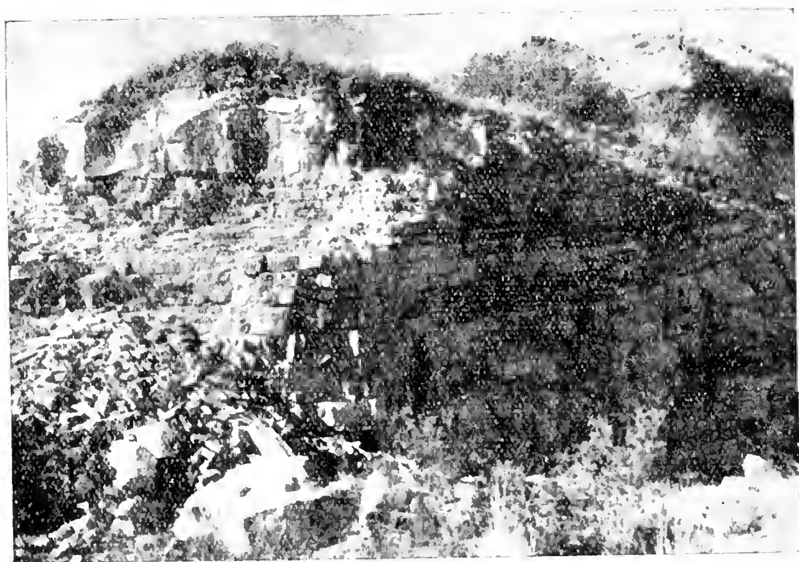


FIG. 9. - Cantera del Ferrocarril del Pacífico (Sampacho)

Al Sudoeste de la población, al otro lado del pequeño arroyo de Sampacho, existe un afloramiento de areniscas que forman una ondulación suave del terreno.

Existen tres canteras en él: « Lucas González », la « Municipal » y la « Ferrocarril del Pacífico », que permiten estudiarlo. (Véase figuras 9 y 10).

(1) Nos concretamos a dar una síntesis de la geología de Sampacho teniendo en cuenta que ella ya ha sido considerada en los siguientes trabajos:

1) E. KITTL. Contribución a la geología de Sampacho. Revista Minera, Buenos Aires, Año VI. pp. 45-49.

J. OLSACHER. El terremoto de Sampacho. Revista del Museo Provincial de Ciencias Naturales de Córdoba. Año I, N 1. pp. 52-68.

Váase también:

G. BODENBENDER. « La Sierra de Córdoba ». Anales de Min. de Agricultura. Sec. Geol. Mineral. y Min. Buenos Aires. Tomo I. Nº 2. 1905.

Los pisos inferiores están constituídos por una arcosa rojizo-violada, mientras que los superiores son areniscas cuarcíticas de color gris claro.

El cerro Suco que se encuentra a 15 kilómetros al Oeste de Sampacho, muestra una constitución análoga al afloramiento de las canteras de referencia.



FIG. 10. - Sinclinal en las areniscas de Sampacho. Cantera del F. C. P.

Se observa la misma arenisca y la misma arcosa con igual disposición relativa.

LA TECTONICA

Examinando la disposición de los estratos de estas areniscas en los diversos puntos donde es posible hacerlo, se observa que:

En la cantera « Lucías González », las areniscas están orientadas de Este a Oeste, con una inclinación de 8° de S.E. a N.O.

En la cantera « Municipal », reinan las mismas circunstancias.

En la cantera « Ferro Carril del Pacífico », existe una sinclinal suave, cuyo eje corre de N. a S. La inclinación máxima de las alas es de 15° (Véase figura 10).

En el cerro Suco, los estratos están orientados de N. a S. con una inclinación de 10° hacia el O.

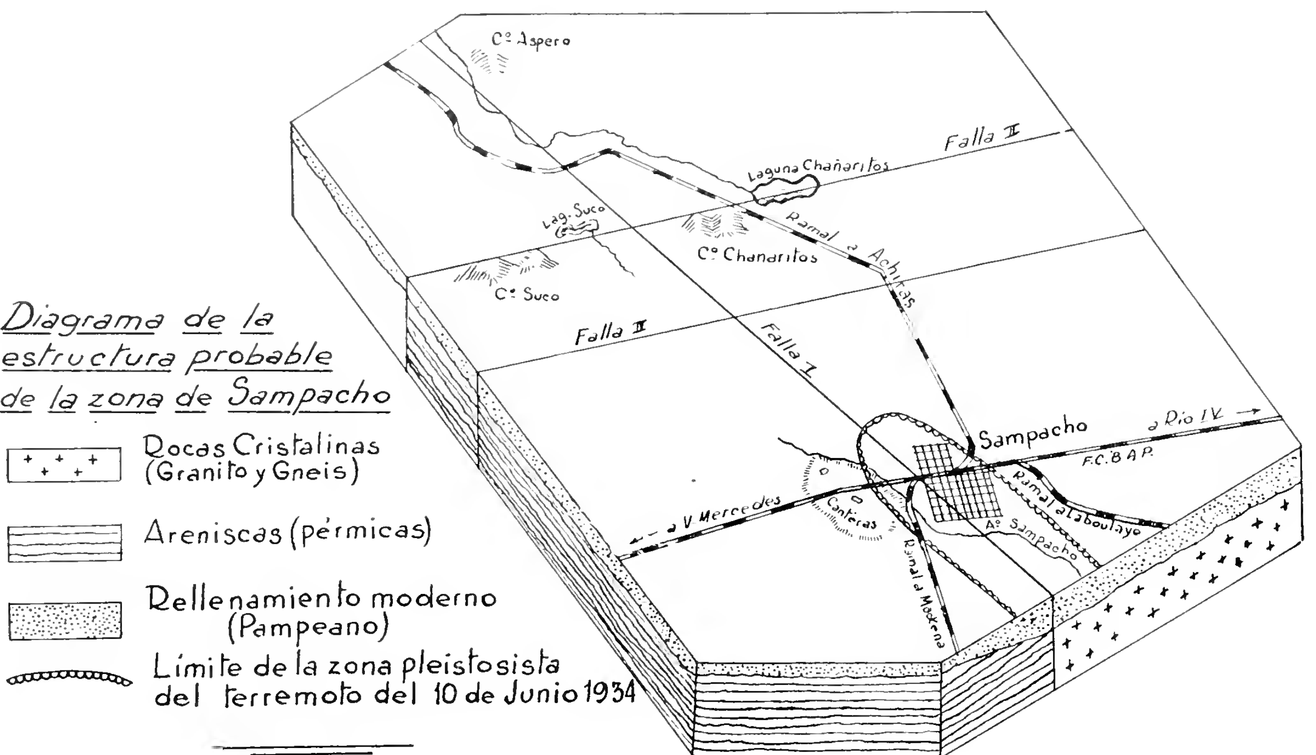


Fig. 10 a. - (Del trabajo de J. Olsacher: el terremoto de Sampacho)

Como puede verse en el perfil de la figura 10 bis, existe entre los dos afloramientos de areniscas una falla que tiene el rumbo N.E. - S.O.

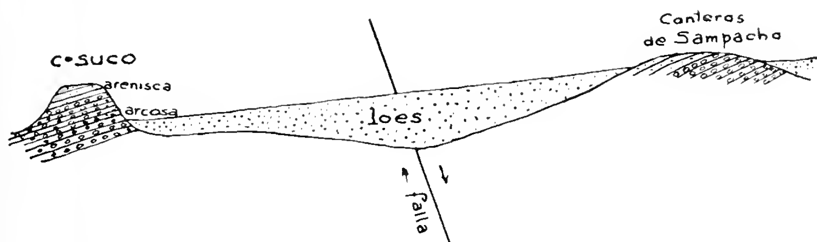


FIG. 10 b - Perfil a través del cerro Suco y las canteras de Sampacho

Al otro lado del cerro Suco, existe una falla paralela a ella.

El cerro Chañaritos o Sampacho, está formado por un gneis biotítico muy esquistoso que ha sido intruido por un granito muscovítico, rosado y de grano mediano. (Véase figuras 11 y 12).



FIG. 11 - Vista del cerro « Chañaritos ». (Granito y gneis)

Ambos cerros, el « Suco » y el « Chañaritos » están separados por una falla del rumbo N.O. - S.E. y que limita por el N.O. las areniscas de las canteras de Sampacho. (Véase el Mapa Tectónico, figura 10 a).

Estas líneas tectónicas son la causa de la sismicidad de Sampacho y que hizo crisis en el violento terremoto del 10 al 11 de Junio de 1934.



Fig. 12. - Vista del cerro « Suco ». (Areniscas)

Después de producido aquel y hasta la actualidad siempre se sienten temblores que carecen de consecuencias.

LA EDAD DE ARENISCAS DE SAMPACHO

Estas areniscas fueron consideradas siempre de edad triásica, sincronizándolas con las que cubren otras regiones de la Sierra de Córdoba: la Sierra Chica y la Sierra de los Cóndores.

En realidad, estas areniscas de Sampacho son muy distintas a aquellas de edad triásica comprobada.

En cambio, son semejantes a las de Cerro Colorado (1) (Depto. Tulumba), Sierra del Retiro (Santiago del Estero), Auti (Sierra de Serrezuela).

(1) Según comunicación verbal del Dr. J. Olsacher, en la región de Cerro Colorado, se encuentran a corta distancia entre sí los dos tipos de areniscas. No hay contacto entre ellas, pero dentro de las areniscas rojas triásicas, en encontró un rodado de arenisca del tipo de las de Cerro Colorado y Sampacho.

El Dr. Franco Pastore (1), compara las areniscas de Sampacho con la de Paso de Velis y otros puntos de la Sierra de San Luis, considerándolas equivalentes.

De acuerdo a ese parecer, al que se adhiere el Dr. G. Bodenbender (3), las areniscas de Sampacho deben ser consideradas como de edad pérmica.

(1) FRANCO PASTORE. Notas sobre Triásico y Terciario en la Falda Oriental de la Sierra de Córdoba. Relaciones morfológico-tectónicas. Rocas volcánicas. Del Dr. Guillermo Bodenbender. « Anales de la Sociedad Científica Argentina ». Tomo CX, páginas 399 y siguientes. Buenos Aires, Diciembre de 1930.

(2) GUILLERMO BODENBENDER. Triásico y Terciario en la Falda Oriental de la Sierra de Córdoba. « Boletín de la Academia Nacional de Ciencias ». Tomo XXXI, pág. 122, año 1929.

(Continuará)

FOSILES PUELCHENSES DEL PARTIDO DE MATANZAS [1]

POR

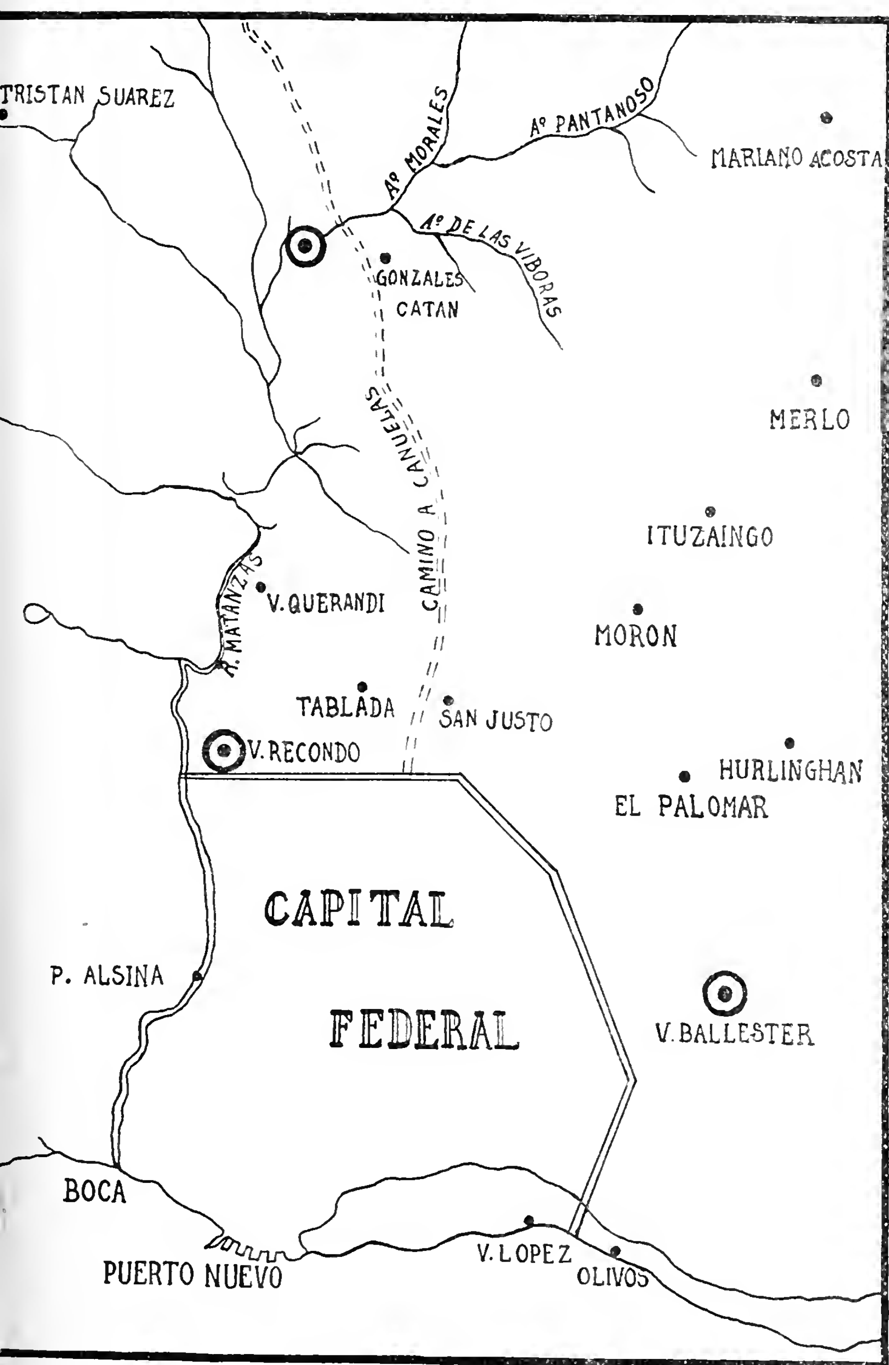
CARLOS RUSCONI

Desde 1933, año en que dí a conocer la primera noticia relacionada con la existencia de una rica fauna fósil en el espesor de las arenas puelchenses, he continuado informando posteriormente a los lectores los detalles más interesantes de estos descubrimientos y el significado que esas arenas tienen para la historia paleontológica de los últimos tiempos del terciario.

Las primeras noticias se referían a una colección de organismos extinguidos hallados en la localidad de Villa Ballester (partido de San Martín) y en donde se han encontrado hasta ahora el stock más grande gracias a los activos trabajos de explotación de las referidas arenas subterráneas, destinadas para fines edilicios diversos. Pocos años después daba la noticia de hallazgos similares en las mismas arenas, en la localidad de Villa Rocondo, situada cerca de la Avenida General Paz y margen izquierda del río Matanzas. Y ahora, con motivo de mi breve estadía en Buenos Aires, tuve oportunidad de examinar el material paleontológico de otra región de la provincia y cuyos especímenes están íntimamente relacionados con los lugares anteriores.

Me refiero a las perforaciones que se están practicando en un lugar del arroyo Morales, próximo al camino a Cañuelas, y que como en los casos anteriores, dichos sondeos han tenido como fin principal, la extracción de las arenas subterráneas. Las referidas perforaciones se encuentran a unos 25 kilómetros de distancia de las de Villa Recondo y más o menos a igual distancia de las primeras que se efectuaron en Villa Ballester véase mapa).

(1) Corresponde a la 13ª noticia sobre los organismos fósiles de este horizonte geológico.


TRISTAN SUAREZ
Aº MORALES
Aº PANTANOSO
MARIANO ACOSTA
Aº DE LAS VIBORAS
GONZALES
CATAN
CAMINO A CANUELAS
MERLO
ITUZAINGO
R. MATANZAS
V. QUERANDI
MORON
TABLADA
SAN JUSTO
V. RECONDO
HURLINGHAN
EL PALOMAR
CAPITAL
FEDERAL
P. ALSINA
V. BALLESTER
BOCA
PUERTO NUEVO
V. LOPEZ
OLIVOS

Aquí, en el Arroyo Morales, las arenas puelchenses aparecen a los 40 metros de hondura después de atravesar la sonda diversas capas de terrenos pertenecientes a nuestras formaciones postpampeana y pampeana y cuyo detalle lo daré en otra oportunidad. Mientras tanto adelantaré algunos detalles generales: Así, por ejemplo, la parte superior del puelchense de Villa Ballester aparece a los 30 metros de profundidad y tiene 14 a 18 metros de espesor. En V. Recondo se encuentra a los 26 en la proximidad del río Matanzas y a 45 metros en otro lugar más al norte, y su espesor oscila entre 15 y 20 metros. En el arroyo Morales aparece a los 40 metros con un espesor de 16 metros aproximadamente, lo cual quiere decir que el puelchense se mantiene en todo ese sector de la provincia de Buenos Aires con un espesor superior a 15 mtros.

Las arenas que se extraen de la tercera zona de que me ocupo son muy parecidas a las de las otras regiones ya estudiadas. Casi en la base del gran manto arenoso se advierten camadas de rodados de rocas diversas, calcedonias, jaspes, ágatas, etc., similares a los de las otras zonas. Lo mismo debo decir con respecto a los fósiles los cuales muestran una coloración rojiza y ferruginosa característica y además no pocos tienen sus aristas ya bastante redondeadas revelando que estuvieron expuestos durante algún tiempo bajo la acción de las aguas corrientes del grandioso río que dió lugar a la acumulación de ese enorme espesor de arenas.

Los nuevos descubrimientos del arroyo Morales vienen a confirmar de una manera definitiva una tesis que durante muchas décadas no fué más que una hipótesis sin base seria, cual es por ejemplo, la de su origen fluvial. Hoy por hoy, el origen fluvial de las arenas puelchenses ha quedado confirmado no sólo por el aspecto físico de los fósiles sinó también por la mezcla de animales de distinta naturaleza (terrestres, acuáticos, marinos, plantas, etc.), que se encuentran en ellas.

El caudaloso río de época puelchense, o sea el precursor del Río de la Plata, el Paraná, etc., ha erosionado pisos más antiguos de origen marino, palustres y eólicos y los organismos que en ellos se encontraban fueron arrancados por las corrientes de aquellas aguas y sepultados finalmente a diferentes niveles de su lecho conocido por las arenas puelchenses. Su antigüedad, como lo he expresado en otros artículos, está circunscripta dentro de los límites del plioceno medio a superior. Estratigráficamente, las arenas en

cuestión se encuentran debajo del complejo ensenadense y seguramente arriba de terrenos de la formación arauco-entreriana, tales como el chapadmalense o más antiguos. Quédole muy agradecido al señor J. Tambutto por la gentileza que ha tenido al donarme una parte de esta pequeña colección de fósiles de los cuales doy a conocer los que siguen:

II

FAUNA

RODENTIA

Xenohydrochoerus ? ballesterensis Rusc.

Nº 1258 de la colección paleontológica de Rusconi. Porción de incisivo inferior del lado derecho. Diámetro anteroposterior 5.5 milímetros y 9,1 en sentido transverso. Dicho diente se parece mucho al del ejemplar genotípico pero difiere algo en la lámina de esmalte que muestra una leve depresión central alargada acercándose a este respecto mucho más al incisivo de *Hydrochoeropsis*. Además, por el lado interno del incisivo, la capa de esmalte no es tan elevada como en *ballesterensis*.

Protohydrochoerus sp.

Nº 1259. Porción de incisivo del lado derecho. Diámetro anteroposterior 11 y 17 el transverso. La superficie del esmalte está estriada pero ella es un poco más ancha que la de *P. perturbidus* (Amegh.). Tengo la impresión de que se trata de una forma distinta pero el material es tan exiguo que me impide por el momento distinguirla con otro nombre.

SELACHII

Oxyrhina hastalis Agas.

Nº 1260. Diente de 27 de alto por 18 de ancho. Nº 1261. Diente de 24 por 25. Ambos órganos tienen la misma coloración y características de fosilización de los que se han encontrado hasta ahora en el puelchense de V. Ballester y V. Recondo.

Odontaspis cuspidata Agas.

Nº 1262. Tiene las mismas características que los hallados en las dos regiones arriba citadas.

Raja sp.

Nº 1263. Diente de 40 milímetros. Es muy grande y robusto comparado con otros muchos procedentes de V. Ballester y V. Recondo.

Además, existen en esta colección restos óseos de distintos animales cuyas formas no me han sido posible determinarlas aún pero puedo anticipar que se trata de un exalabriterino, de restos de tortugas acuáticas, pinzas de cangrejos, etc. Y finalmente recordaré que junto con los despojos de animales fueron extraídos también diversos trozos de leños silicificados de características análogas a los ya descriptos en artículos anteriores.

BIBLIOGRAFIA

Ameghino, F. - *Les formations sédimentaires du crétacé supérieur et du tertiaire de Patagonie*, en « Anales del Museo de Historia Natural de Buenos Aires », vol. VIII, Buenos Aires, 1906.

Castellanos, A. - *Notas críticas sobre el puelchense de los sedimentos neogenos de la Argentina*, en « Rev. de la Univ. Nacional de Córdoba », vol. XV, pág. 48 y sig. Córdoba, 1928.

Castellanos, A. - *Las arenas del antiguo río Paraná y la perforación de Villa Ballester*, en « ¿Qui novi? », vol. II, p. 1 y sig. Rosario, 1933.

Rusconi, C. - *Apuntes preliminares sobre las arenas puelchenses y su fauna*, en « Anales de la Sociedad Científica Argentina », vol. CXVI, p. 169 y sig. Buenos Aires, 1933.

Rusconi, C. - *Tercera noticia sobre los vertebrados fósiles de las arenas puelchenses de Villa Ballester*, en « Anales de la Soc. Cient. Argentina », vol. CXVII, p. 19 y sig. Buenos Aires, 1934.

Rusconi, C. - *Sexta noticia sobre los vertebrados fósiles del puelchense de Villa Ballester*, en « Anal. Soc. Cient. Argentina », vol. CXVII, p. 177 y sig. Buenos Aires, 1934.

Rusconi, C. - *Cuarta noticia sobre las plantas fósiles del puelchense de Villa Ballester*, en « Revista Chilena de Historia Natural », vol. XXXVIII, p. 69 y sig. Santiago de Chile, 1934.

Rusconi, C. - Quinta noticia sobre los vertebrados fósiles del puelchense de *Villa Recondo*, en « La Ingeniería », vol. XXXVIII, p. 511 y sig. Buenos Aires, 1934.

Rusconi, C. - *Restos de vegetales (lignitíferos) en Villa Ballester*, en « Boletín Paleontológico de Buenos Aires », Nº 2, Buenos Aires, 1934.

RUSCONI, C. - *Tres nuevas especies de mamíferos del puelchense de Villa Ballester*, en « Boletín Paleontológico », Nº 5, Buenos Aires, 1934.

RUSCONI, C. - *Fauna y flora de las arenas puelchenses de Buenos Aires, en* III Congreso Internacional de Historia de las Ciencias », p. 1-8 del separado, Lisboa 1935.

RUSCONI, C. - *Nuevo género de roedores del puelchense de Villa Ballester*, en « Boletín Paleontológico », Nº 7, p. 1-4, Buenos Aires, 1936.

RUSCONI, C. - *Lista de los organismos fósiles del puelchense de Buenos Aires*, en « Anales de la Soc. Argentina de Estudios Geográficos », vol. V, p. 79 y sig. Buenos Aires, 1937.

NOTA SOBRE EL ROCÍO

POR EL

Dr. WALTER KNOCHE

Existe la posibilidad de medir el rocío en una forma parecida y comparable a la medición de la lluvia o de cualquier otra precipitación.

Ya es conocido el significado que este fenómeno meteorológico tiene para la vida de muchas plantas, incluso plantas de cultivos, ante todo en las regiones áridas o semiáridas. Ahora bien, se sabe que el valor obtenido según medición solamente, presenta un valor muy pequeño, y pequeño también en relación a cantidades de lluvias aún de regiones de escasa precipitación.

A pesar de este hecho existe una diferencia fundamental en el sentido bioclimatológico, entre una condensación sobre una superficie como el rocío y una condensación precipitante como la lluvia. En esta última el objeto no juega ningún rol decisivo, mientras que para el rocío el objeto es de suma importancia. La cantidad de rocío es tanto mayor, cuanto mayor es la superficie del objeto, (árbol, arbusto, pasto). Además la condensación depende en sumo grado de la estructura de la planta, de la existencia o carencia de espinas, de pelos sobre las hojas y de otras protuberancias de la planta, del color más o menos profundo, etc.

La superficie, como superficie irradiante, y el color en el mismo sentido, tienen una influencia decisiva sobre la cantidad de rocío, fenómeno ante todo dependiente fuera de la humedad del aire, de la claridad del cielo, con su posibilidad de irradiación. Sobre el significado de las espinas para la formación del rocío el autor ha hecho observaciones en la costa del Perú ([1]), observaciones que han sido confirmadas en Abisinia por Carl Troll.

No es del todo imposible que la vegetación xerofítica sea ante todo una adaptación a los fenómenos de condensación sobre superficies (y en algunos casos a condensaciones en suspensión como nieblas o garúas finísimas en suspensión de las costas desérticas).

Las mediciones del rocío en relación a las de verdaderas precipitaciones no tienen en sí un valor efectivo sino un valor comparativo no menos importante. Pero según lo dicho anteriormente no debe olvidarse que un rocío mensual de p. e. 10 mm. en relación a una llovizna de 10 mm. de hecho siempre tiene un valor biológico efectivo mucho mayor para la vida de la planta. Para cada planta la suma del rocío recogido instrumentalmente debe multiplicarse según familia y especie, (Agaves, Cactáceas, Euforbiáceas, Prosopis, etc.) y según individuo con un factor determinado. Muchas veces un rocío de 10 mm. equivaldrá fácilmente aún tomando en cuenta su rápido desaparecer bajo los primeros rayos del sol, a una lluvia correspondiente a 100 mm.

Es un deber, ante todo para los países con regiones escasas en precipitaciones, de determinar las cantidades de rocío y al mismo tiempo de buscar plantas de cultivo que pueden aprovechar la humedad de este elemento climático para su vida, elemento mucho más regular que las lluvias irregulares de zonas semiáridas. Tal vez exista la posibilidad de adaptar por selección ciertas plantas de cultivo al aprovechamiento del rocío.

UN MÉTODO CLÍNICO PARA LA DETERMINACIÓN DE COLESTEROLEMIA

POR

JORGE GASCÓN y EDUARDO R. SCHEGGIA

La importancia clínica atribuída en nuestros días a las determinaciones de Colesterolemia (¿o de Colestenolemia?) [1], ha inducido a diversos autores a abocarse al estudio comparativo de los distintos sistemas de valoración propuestos, llegando a la conclusión de que debido a la variedad de técnicas, solventes y reacciones utilizadas, los datos no concuerdan entre sí, obteniéndose valores tan discordes como los acusados por los métodos de: Stepp (1,30 - 1,70); Autenrieth-Funck (1,40 - 1,60); Grigaut (1,60 - 1,80); Myers (1,40 - 1,90), y Bloor (1,90 - 3,10 g. por litro de suero) (I).

Estos distintos métodos han sido estudiados detallada y comparativamente (II), (III), (IV), (V).

Varios de estos investigadores han llegado a la conclusión de que un método aconsejable por lo económico y clínicamente exacto, es el de Myers y Wardell, o las modificaciones a éste que posteriormente se han hecho (I), (IV), (V), (VI); causa por la que lo utilizamos como tipo en el presente trabajo.

En el año 1928, el Profesor Neuschlosz, de la Universidad del Litoral, propone un método para la determinación de Colesterole-

[1] Es en general aceptada la nomenclatura transcripta por Stewart y Graham (XI) en la que se propone la desinencia « esterol » para los compuestos naturales y « estanol » y « estenol » para los derivados alcohólicos del colestano según sean saturados o contengan una doble ligadura respectivamente.

Pero habiendo Rosenheim y King propuesto la modificación del nombre de coprosterol, por el de coprostanol para estar de acuerdo con la constitución funcional de esta sustancia, creemos que por la misma causa, corresponde substituir el nombre de colesterol por el de colestenol, aunque al ser más general, tengan que consignarse las posiciones de los grupos funcionales que intervienen en la molécula (XII).

mia (VI), cuidadosamente controlado y de una sencillez extraordinario, cuyos datos, según el autor, son comparables a los obtenidos por el de Myers modificado por Ling (VII).

En su técnica el autor elimina el empleo de microextractores con lo que lo hace mucho más accesible a las determinaciones en serie que muchas veces la clínica exige. Hemos tenido oportunidad de ensayarlo tal cual ha sido propuesto, obteniendo resultados concordantes con los del Myers.

A pesar de su sencillez y exactitud, ha sido hasta ahora poco utilizado, y creemos hacer justicia al llamar la atención sobre este método que tantas ventajas tiene comparado con los de uso corriente.

En las experiencias realizadas lo hemos modificado ligeramente para trabajar con el testigo propuesto por Myers (VIII) (solución de colesterol al 0,008 por 100 ml.).

Un inconveniente anotado por Neuschlosz es la disminución del poder extractivo del alcohol etílico utilizado en su método, cuando se disminuye su graduación por agregado de agua, fenómeno que acontece al mezclar el suero sanguíneo con el alcohol, lo que lo indujo a efectuar un minucioso estudio de la solubilidad del colesterol en las condiciones citadas, llegando a la conclusión de que no era conveniente efectuar una extracción con mayor cantidad que 0,5 ml. de suero para 9,5 ml. de alcohol de 95°.

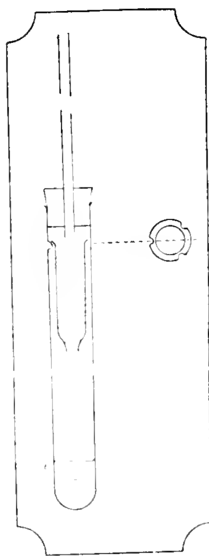
Por otra parte, para establecer la técnica de determinación de colesterol en helados de vainilla, que propusimos al 3er. Congreso Sudamericano de Química reunido últimamente en Río de Janeiro (IX), al pretender utilizar el método de Neuschlosz, nos vimos obligados, después de múltiples ensayos, a substituir el alcohol etílico por el isopropílico, con los resultados que se pueden encontrar en el trabajo citado.

Las ventajas que presenta el alcohol isopropílico respecto al etílico para la extracción del colesterol nos indujo a ensayarlo en las determinaciones de colesterolemia, para lo cual efectuamos una serie de determinaciones comparativas con el método de Myers, llegando a establecer que se puede utilizar mayor concentración de suero sanguíneo, sin invalidar los resultados. Estas experiencias nos permiten afirmar que es posible trabajar con 1 ml. de suero sanguíneo y 9 ml. de alcohol isopropílico, y que los tonos de las coloraciones obtenidas, son muy parecidas a las del testigo, lo que no acontece siempre con otros métodos.

Las técnicas utilizadas son las siguientes:

Método de Myers

Tal cual se describe en Hawk y Bergeim en su obra « Practical Physiological Chemistry » (X).



Para hacer las extracciones necesarias, utilizamos como microextractor uno construído por nosotros con dos tubos de ensayo, según puede verse en el dibujo que se adjunta.

Método propuesto

Reactivos:

1) Solución de colesterol.

a) Solución madre:

Colesterol	0,16	g.
Cloroformo . . . . c. s. p. .	100	ml.

b) Solución tipo:

Solución madre	5	ml.
Cloroformo . . . . c. s. p. .	100	»

Estas soluciones conviene envasarlas en ampollas cerradas a la lámpara conteniendo cada una aproximadamente 6 ml. de solución.

2) Alcohol propílico secundario (isopropílico).
3) Cloroformo.
4) Anhídrido acético.
5) Acido sulfúrico de densidad 1,84.

Técnica:

Colocar en un tubo de ensayo 1 ml. de suero sanguíneo, añadir 9 ml. de alcohol isopropílico, tapar con tapón de goma y agitar fuertemente; dejar en contacto 15 minutos; filtrar por filtro seco y cubrir el embudo con un vidrio de reloj para evitar evaporaciones. Transferir 2 ml. exactamente medidos del filtrado a una cápsula de porcelana y llevarla a bañomaría hasta sequedad. Colocar la cápsula en estufa a 100° C. durante 10 minutos, y dejarla enfriar en desecador sulfúrico. Disolver el residuo con pequeñas porciones de cloroformo y recoger éstas en un tubo de ensayo graduado hasta completar 5 ml.

Colocar en un tubo de ensayo igual al anterior, 5 ml. de solución tipo (*b*) y efectuar en ambas la reacción de Liebermann-Burchard, para lo cual añadir a cada uno 2 ml. de anhídrido acético y 0,1 ml. de ácido sulfúrico. Tapar ambos tubos con tapón de goma, agitar y llevarlos a un baño de agua de 37° C. de temperatura, dejándolos en estas condiciones 15 minutos

Efectuar la comparación colorimétrica.

Aconsejamos:

1) Trabajar con material perfectamente seco.
2) Medir exactamente la cantidad de ácido sulfúrico.
3) Mantener los tubos en la obscuridad durante el desarrollo de la coloración.
4) Efectuar la comparación colorimétrica con luz artificial, por la gran influencia que sobre la coloración tiene la luz natural.
5) Trabajar con alturas aproximadas de 20 mm. para que las lecturas puedan ser efectuadas con facilidad.

Cálculo:

$$\frac{\text{Altura del testigo}}{\text{Altura del desconocido}} \times 2 = \text{gramos de colesterol por litro de}$$

suero.

Control del método

Exp. N°.	Altura del testigo: 20 mm.			
	Método de Myers		Método propuesto	
	Alt. desc.	g. ‰	Alt. desc.	g. ‰
I	22,2 21,0 20,8 21,9	1,863	20,8 21,0 22,0 20,8	1,891
II	24,8 25,0 25,4 25,0	1,596	23,7 24,0 23,5 24,3	1,675
III	25,2 24,8 25,0	1,60	24,7 24,6 24,7	1,62
IV	23,0 23,8 23,4	1,708	21,3 22,0 21,0	1,866
V	23,7 24,2 24,0	1,66	23.0 23,4 23,7	1,71
VI	21,2 21,0 21,5 20,9	1,89	22,0 22,4 21,8 22,2	1,81
VII	36,5 39,3 36,6 36,0	1,10	36,7 36,4 36,1 36,2	1,10

Conclusiones

1° El método de Neuschlosz para la determinación de colesterolemia es de una exactitud clínica comparable al de Myers.

2° La sencillez de la técnica del método de Neuschlosz permite efectuar esta determinación en un tiempo menor que por la técnica de Myers, y al eliminar el empleo de aparatos relativamente delicados como son los microextractores, facilita las determinaciones en serie.

3° La modificación que proponemos de substituir el alcohol etílico por el isopropílico, permite trabajar con mayor cantidad de suero sanguíneo, con lo que se evitan los errores debidos a la dilución.

BIBLIOGRAFIA

FOLLETOS RECIBIDOS EN LA ACADEMIA NACIONAL DE CIENCIAS

POR C. C. D.

Nos 598 y 599. — HUBER (MICHEL), *Cours de Démographie et de Statistique Sanitaire.* Dos folletos; 1938.

El primero, de 68 páginas, con algunas figuras, cuesta 15 francos, y trata la Introducción al estudio de las estadísticas demográficas y sanitarias; el otro, de 112 páginas, cuesta 20 francos y trata los métodos de elaboración de las estadísticas demográficas (censos, estado civil y migraciones).

El autor, Miguel Huber, es director de estudios y profesor en el Instituto de estadística; director honorario de la estadística general de Francia.

El curso en cuestión es el dictado por el autor en el Instituto de Estadística de la Universidad de París desde 1923 hasta 1933, y tiene por principal objeto la iniciación a los métodos fundamentales de la estadística aplicada al estudio de las colectividades humanas. En una Introducción se hace una disertación sobre la demografía y su historia; viene, luego, lo relativo a la elaboración y utilización de las estadísticas; un apéndice al primer folleto trata las máquinas utilizadas para las estadísticas.

El segundo folleto se refiere a los censos, tanto en Francia como en otros países; lo mismo para los movimientos de la población como para las migraciones y registros de población.

Nº 601 a 605. — Conferencias del « Collège de France », publicadas con los auspicios y fondos de la Fundación Singer-Polignac. Coloquio internacional tenido en dicho « Collège de France » del 10 al 19 de junio 1937, con la presidencia de Pol Bonin. Cinco folletos. 1938. Precios y números de páginas variables. Estos folletos tratan el tema *Les Hormones Sexuelles.* Relator y encargado de la publicación, L. BROUHA.

El primer folleto trata las *Propiedades de las Hormonas Sexuales*; está redactado por E. C. DODDS, RUTH DEANESLEY, R. COURRIER, F. CARIDROIT, A. S. PARKES. 90 páginas; 25 francos; tiene 6 láminas fuera de texto; está escrito en idiomas francés e inglés, y trae resúmenes de las discusiones.

El segundo folleto (nº 602) trata del tema: *Ovulation, Menstruation, Gestation*, y trae comunicaciones de los señores EGDAR ALLEN, G. HARTMAN, S. ZUCKERMAN, L. HISAW y MARC KLEIN; 82 páginas y 3 láminas; escrito en las mismas condiciones que el anterior; 25 francos.

El folleto nº 603 trae comunicaciones de AURA E. SEVERINGHAUS; P. AUCEL; PHILIP E. SMITH; S. ASCCHEIM; F. G. YOUNG, sobre *La Hipófisis*; 78 páginas, varias figuras y dos láminas fuera de texto; dos comunicaciones en inglés y tres en francés; 20 francos.

Nos. 606-607. — CAVAILLES (JEAN), *Remarques sur la formation de la Théorie abstraite des ensembles*. Nº 606. *Préhistoire. La Création de Cantor*. 108 páginas; 25 francos. Nº 607. *Dedekind. Les axiomatisations*. 40 páginas; 12 francos; 1938.

Son los facículos VII y VIII de la serie « Le Progrès de l'Esprit », dirigida por L. Brunschvicg. El autor es ex alumno de la Escuela Normal Superior; agregado de filosofía y doctor en letras.

Después de una Introducción donde se hace una historia de las vicisitudes por las que pasado la teoría de los conjuntos, entra en materia con los números irracionales, serie trigonométrica y teoría del crecimiento, para continuar con la creación cantoriana. El primer fascículo termina con una muy buena bibliografía y un índice de los términos especiales usados en esas teorías. Lo mismo ocurre con el otro fascículo, que se ocupa de Dedekind, la cadena y la axiomática.

La conclusión final es que si las axiomáticas parecen disociar dos teorías: equivalencia, números ordinales (y quizá una tercera donde se estudiaría el problema del continuo), cuya seguridad viene decreciendo, las consideraciones pragmáticas del matemático militante tienen la palabra final. Es en el análisis entero donde se plantea el problema de una existencia y de una aseguración para las cuales una definición del trabajo matemático en su generalidad, es necesaria.

Nos. 608 a 610. — CAVAILLÉS (JEAN), *Méthode Axiomatique et formalisme*. Tres folletos que constituyen los fascículos IX, X y XI de la serie « Le Progrès de l'Esprit », recién mencionado.

El nº 608 tiene 84 páginas, y se ocupa del Problema del fundamento de las matemáticas. La Introducción diserta sobre el problema planteado por la crisis de la teoría de las axiomatizaciones y formalizaciones en el siglo XIX desde Gauss y Bolzano hasta Russel e Hilbert. Precio 20 francos; 1938.

El nº 609 continúa tratando el método axiomático y la definición del sistema formal en general: el formalismo Hilberciano y el análisis. Tiene 66 páginas; vale 18 francos.

El nº 610, titulado, « La no contradicción de la aritmética », tiene 76 páginas, vale 18 francos y se ocupa especialmente de la demostración de no contradicción; trae las conclusiones generales. Cada folleto está acompañado con una bibliografía y con un índice de nombres y de los vocablos usados.

N° 613. — RYTOV (S.), *Difraction de la Lumière par les Ultra-Sons*; 50 páginas con algunos gráficos; 15 francos; 1938.

Fascículo I de la serie « Acoustique théorique et pratique », dirigida por León Brilloim, profesor en el « Collège de France ». Este último, en un Prefacio, expone los antecedentes del tema tratado. El trabajo de S. M. Rytow, dice, constituye una hermosa contribución al estudio del mismo. Los profesores rusos han contribuído bastante a ese respecto.

He aquí un detalle de los puntos tratados: Espectros de orden $\pm$ 1; efectos de volumen en esos espectros; espectros de órdenes superiores (posición del problema y solución rigurosa); solución aproximada para las ondas ultrasonoras débiles (incidencia oblicua); teoría simplificada de Raman y Negendra-Wath; visibilidad de las ondas ultrasonoras; solución aproximada para las ondas ultrasonoras largas; límites de validez de las soluciones aproximadas; otros estudios teóricos. Al final unas referencias.

N° 614. — DIENES (PAUL), *Logic of Algebra.* 78 páginas; 18 francos; 1938.

Fascículo III de la serie « Logique et Méthodologie », dirigida por Thomas Greenwood, maestro de conferencias en la Universidad de Londres; el autor es « Reader in Mathematics » en la misma Universidad.

Después de un prefacio donde habla el autor de la crisis de las Matemáticas a raíz de los trabajos de Browner, y después de anunciar que opta por la teoría realista de este autor, que es la de Borel, desarrolla el tema en cuatro capítulos, en los que se ocupa respectivamente de la noción de número entero, desigualdades entre enteros y su consistencia; aritmética; relaciones entre colecciones; inferencia; números reales.

Al final una bibliografía.

SOCIOS ACTIVOS

Abrines, Héctor Aníbal
Aguilar, Félix
Albizzati, Carlos M.
Alessi, Juan M.
Alvarez, Raúl J.
Alvarez de Toledo, Belisario
Allende Lezama, Luciano P.
Anastasi, Camilo
Anchorena, Juan E.
André, Enrique de
Andriolettí, Juan Luis
Añón Suárez, Vicente
Aparicio, Francisco de
Aráoz Alfaro, Gregorio
Arce, Manuel J.
Armani, Aquiles
Arnaudo, Silvio J.
Avila Méndez, Delfín
Bado, Atilio A.
Bachmann, Ernesto
Baglietto, Eduardo E.
Balbiani, Atilio
Baliani, Luis M.
Bancalari, Agustín
Bandoni, Alfredo J.
Barabino Amadeo, S.
Bargna, Juan L.
Barilari, Mariano J.
Barral Souto, José
Barrancos, Leónidas A.
Beeke, Alejandro von der
Berrino, Juan B.
Bertino, José Carlos
Besio Moreno, Nicolás
Bianchi Lischetti, A.
Biggeri, Carlos
Biaquier, Juan
Boaglio, Santiago
Bolognini, Héctor
Bonanni, Cayetano A.
Bontempi, Luis
Bordas, Alejandro F.
Bordenave, Pablo E.
Borzacov, Vladimir
Borruat, Luis A.
Borzi, Ana María
Bosch, Gonzalo
Bosisio, Anecto J.
Bottaro, Juan C.
Bozzini, Luis (h.)
Briano, Juan A.
Buich, Raúl
Bunge, Juan C.
Buontempo, Guillermo
Burkart, Arturo
Busso, Eduardo B.
Butty, Enrique
Buzzo, Alfredo
Calliet Bois, Teodoro
Calandra, Raúl E.
Canale, Humberto
Canal Feijoo, Bernardo
Capelli, Pedro F.
Carabelli, Juan José
Carbia, Rómulo D.
Carbone, Esteban
Carbonell, José J.
Cárcova, Enrique de la
Carelli, Antonio
Carelli, Humberto H.
Caride Massini, Pedro
Carman, Ernesto
Carrea, Juan Ubaldo
Casacuberta, Antonio
Castellanos, Alberto
Castello, Manuel F.
Castiñeiras, Julio R.
Celasco, Juan L.
Ceppi, Héctor
Cernuschi, Félix
Clos, Enrique C.
Cock, Guillermo E.
Coni Bazán, F. A.
Curti, Orlando P.
Curutchet, Luis
Chanourdie, Enrique
Chizzini Melo, Aníbal F.
D'Ascoli, Lucio
Dassen, Claro C.
Dasso, Héctor
Dasso, Ricardo L.
De Cesare, Elías A.
De Fina, Armando L.
De la Ini, Juan E.
Dellepiane, Luis J.
Deulofeu, Venancio
Díaz, Emilio C.
Dieulefait, Carlos E.
Doello-Jurado, Martín
Dobranich, Jorge W.
Domínguez, Juan A.
Dubecq, Raúl E.
Dueñas, José
Duhau, Luis
Dupont, Enrique
Durañona y Vedia, A.
Durrieu, Mauricio
Escudero, Antonio
Escudero, Pedro
Faré, Santo S.
Fernández, Alberto J.
Fernández Díaz, A.
Fernández Long, S.
Figini, Angel
Figuerero, Hernando W.
Fischer, Gustavo Juan
Flores, Emilio M.
Floriani, Luis
Florit Carlos J.
Fossa Mancini, E.
Franceschi, Alfredo
Fürnkorn, Divico A.
Gadda, Carlos Manuel
Galmarini, Alfredo G.
Gando, Alfredo R.
Gandolfi Herrero, Augusto
Gandolfo, José S.
Gascón, Alberto
Gaspar, Fernando L.
Géneau, Carlos E.
Gerardi, Donato
Ghigliazza, Sebastián
Giagnoni, Bartolomé E.
Giannone, José
Gradín, Carlos
Grieben, Arturo
Gutiérrez, Ricardo J.
Haussler, Emilio
Herbin, Luis A.
Hermitte, Enrique
Herrera Vegas, M.
Herzer, Bernardo
Hickethier, Carlos F.
Hofmann, Herbert
Hortal, José Angel
Houssay, Bernardo A.
Hoyo, Arturo
Igartúa, Luis María
Irigoyen, Luis H.
Isetta, José
Ivanissevich, Ludovico
Jorge, José M.
Jakob, Cristofredo
King, Diarmid O.
Kinkelin Pelletán, J. C. de
Knoche, Walter
Kraglievich, Nicolás T.
Krapf, Eduardo
Labarthe, Julio
Lagunas, Simón
La Menza, Francisco
Laporte, Luis B.
Larco, Esteban
Lasso, Alfredo L.
Latzina, Eduardo
Ligniéres, Roberto
Lizer y Trelles, C. A.
Lombardi, Alberto
Loudet, Osvaldo
Loyarte, Ramón G.
Lugones, Arturo M.
Llauró, José
Mac Donagh, E. J.
Magnin, Félix J.
Magnin, Jorge
Mainini, Carlos
Mallol, Emilio
Mamberto, Benito
Marcó del Pont, E.
Marchionatto, Juan B.
Maresca, Antonio J.
Martignone, Eduardo
Marotta, F. Pedro
Marotta, R. Armando
Mata, Leopoldo
Méndez, Julio
Meoli, Gabriel
Meoli, Humberto
Mercau, Agustín
Meriggi, Juan C.
Mermoz, Francisco A.
Molfino, José F.
Molina Carranza, L.
Molle, Clotilde C.
Montes, Vicente E.
Moragues Bernat, Jaime
Moreno, Evaristo V.
Nágera, Juan José
Natale, Alfredo
Natale, Ernesto
Negrete, Lucía
Negri, Mario L.
Nielsen, Juan
Novelli, Armando
Oliveri, Alfredo B.
Ortega Belgrano, Raúl
Ortiz, Aníbal A.
Ortiz de Rosas, Jorge
Otamendi, Gustavo
Ottonello, Héctor
Páez, José María
Page, Franklin Nelson
Paltoví y Oliveras, A.
Parodi, Edmundo
Parodi, Lorenzo R.
Parodi, Rodolfo
Pasman, Raúl G.
Pasman, Rodolfo E.
Pastore, Franco
Paz Anchorena, José M.
Pérez Hernández, A.
Perrone, Cayetano
Pestalardo, Agustín
Pini, Aldo S.
Platz, Hubert
Podestá, Juan Carlos
Posadas, Carlos
Quinos, José Luis
Quinterno, Bruno F.
Quiroga, Pedro R.
Raimondi, Alejandro
Raffo, Bartolomé M.
Ramaccioni, Danilo
Ramallo, Carlos M.
Ratto, Héctor R.
Rebuelto, Antonio
Rebuelto, Emilio
Reece, William Asher
Repetto, Blas Angel
Repossini, José
Ringuelet, Emilio J.
Rissotto, Atilio A.
Rivarola, Rodolfo

Robles, Angel A.
Rodríguez Aravena, S.
Rodríguez, Germinal
Rodríguez, Miguel
Roffo, Angel H.
Roffo, Juan
Roldán, Raimundo
Romero Brest, Enrique
Rokotnitz, Otto
Rospide, Juan
Rossell Soler, Pedro
Ruata, Luis E.
Ruíz Moreno, Isidoro
Ruiz Moreno, Adrián
Ruml, Tomás J.
Sabaria, Enrique
Salomón, Hugo
Sánchez, José Ricardo
Sánchez, Gregorio L.
Sánchez Díaz, Abel
Sánchez Sorondo, M. G.
Sanromán, Iberio
Santángelo, Rodolfo
Sarhy, Juan F.
Sarrabayrouse, Eugenio
Savon, Marcos A.
Schnack, Benno J.
Schulz, Guillermo
Selva, Domingo
Selzer, Samuel
Sesma,, Angel
Sheahan, Juan F.
Silva, Leónidas L.
Simonoff, Miguel
Simons, Hellmut
Siri, Luis
Sobral, Arturo
Solari, Emilio F.
Solari, Miguel A.
Sordelli, Alfredo
Soler, Frank L.
Spinetto, David J.
Spota, Víctor J.
Storni, Segundo R.
Talana, Alberto F.
Taiana, Jorge
Tarragona, José
Tello, Eugenio
Torre Bertucci, Pedro
Torello, Pablo
Tossini, Luis
Trelles, Rogelio A.
Trucco, Sixto E.
Valeiras, Antonio
Valentini, Argentino
Valentinuzzi, Máximo
Vallebella, Colón B.
Vanossi, Reinaldo
Varela, Rufino
Varela Gil, José
Vecchi, Arístides de
Vela Huergo, Julio
Verdaguer, Juan
Veyga, Francisco de
Vidal, Eduardo
Vignati, Milcíades A.
Villalobos D., C.
Vignaux, Juan C.
Vinardell, Alberto
Volpatti, Eduardo
Walner, Jacobo
Wauters, Carlos
Wernicke, Raúl
White, Guillermo J.
Williams, Adolfo T.
Wysztelewski, W. de
Zamboni, Agustín
Zappi, Enrique V.
Zavalla, Carlos M.
Zuloaga, Angel M.

SOCIOS ADHERENTES

Bazzanella, José
Cotlar, Mischa
Devoto, Carlos Alberto
Ferramola, Raúl
Folcini, Martin L. G.
García, Eduardo D.
Goyena, Ricardo J.
Gorchs, Agustín C.
Laclau, Juan Pedro
Magne de la Croix, P. A.
Mailhos, Luis E.
Milesi, Emilio Angel
Quevedo Capdevila, Eduardo A.
Recoder, Roberto F.
Repetto, Cayetano
Rusconi, Carlos
Sadosky, Manuel
Somonte, Eduardo
Vistalli, Alina M.
Wechsler, Wolf

CASAS ADHERENTES

Angel Estrada y Cía.
Benvenuto y Cía.
Lutz, Ferrando y Cía.
Hijos de Atilio Massone
Otto Hess, S. A.
T. Gr. "Tomás Palumbo"
Jacobo Peuser, S. A. Ltda.

SOCIO VITALICIO

Huergo, Eduardo María

MIEMBROS PROTECTORES DE LA ORGANIZACION DIDACTICA DE BUENOS AIRES

Anchorena, Juan E.
Beslo Moreno, Nicolás
Tornquist, E. y Cía. (Lda.)

SECCION CORDOBA

COMISION DIRECTIVA

Presidente, Dr. Juan Olsacher; Vice-presidente, Dr. Miguel Fernández; Vice-presidente, Ing. Daniel A. García; Secretario de actas, Dr. Guillermo V. Stuckert; Secretario de correspondencia, Prof. Tulio Mácola; Tesorero, Sr. Bernardo Pilotto; Pro-tesorero, Dr. Carlos C. Hosseus; Vocales: Ing. Clodoveo Pascualini; Ing. Jorge E. Bobone; Ing. Luis Chechi; Ing. Ambrosio L. Taravella; Dr. Federico Padula; Dr. José Carlomagno; Dr. Meade L. Zimmer; Sr. Enrique Sparn.

SOCIOS ACTIVOS

Aguiar, Henoch D.
Bobone, Jorge E.
Brandan, Ramón A.
Broglia, Alberto A.
Buteler, Jesús E.
Camilloni, Carlos
Carlomagno, José
Chaudet, Enrique
Checchi, Luis
Deheza, Eduardo
Esteban, Fernando
Fernández, Miguel
Fontana, Lorenzo P.
García, Daniel
Godoy, Salvador A.
Gordillo, Pedro N.
Hosseus, Carlos Curt
Larrauri, Agustín C.
Mácola, Berardo A.
Mácola, Tulio
Mirizzi, Pablo Luis
Ninci, Raúl T.
Olaf Lützow, Holm
Olsacher, Juan
Padula, Federico
Pasqualini, Clodoveo
Peláez J. Gambastiani de

Pllotto, Bernardo
Ponce Laforgue, Carlos
Rothlln, Edwin
Schmledecke, Augusto
Sparn, Enrique
Stuckert, Guillermo V.
Taravella, Ambroslo L.
Trebino, Natalio
Urciolo, Vlctorio
Vercello, Carlos
Yadarola, Maurlclo L.
Zimmer, Mesde L.

SECCION SANTA FE

COMISION DIRECTIVA

Presidente, Dr. Gustavo A. Fester; Vlce-presidente, Dr. José Piazza; Secretario de correspondencla, Ing. Quím. Franclsco A. Bertuzzl; Secretario de actas, Ing. Quím. José Cruellas; Tesorero, Ing. Quím. Enrlque Virasoro; Vocal 1º, Ing. José Babinl; Vocal 2º, Prof. Rolando Hereñú; Vocal suplente 1º, Prof. Julio Salaber; Vocal suplente 2, Ing. Quím. Guillermo Berraz; Encargado de Biblloteca y Canje, Ing. Quím. Rodolfo Rouzaut; Encargado de Publlcaciones, Ing. José Babinl.

SOCIOS ACTIVOS

Anadón, Leónidas
Ariottl, Juan Carlos
Babini, José
Benet, Pedro José
Berraz, Guillermo
Bertuzzl, Francisco A.
Bonazzola, César J.
Borzone, Rodolfo
Bossl, Celestlno
Caballero, Martín A.
Cerana, Mlguel
Claus, Guillermo
Cohan, Marcos
Courault, Pablo
Crouzellles, A. L. de
Cruellas, José
Christen, Carlos
Christen, Rodolfo G.
Damlanovlch, Horacio
Falco, Federico
Fester, Gustavo A.
Frenguelli, Joaquín
Gollán, Josué (h.)
Gschwind, Eduardo P.
Hereñú, Rolando
Hotschewer, Curto
Juliá, Tolrá Antonio
Kleer, Gregorlo
Lachaga, Dámaso A.
Mal, Carlos
Mántaras, Fernando
Marelli, Hipólito
Martino, Antonio E.
Montpellier, Luis Marcos
Mounier, Celestino
Muzzio, Enrique
Nlgro, Angel
Nlklison, Carlos A.
Oliva, José
Peresutti, Luis
Plazza, José
Piñero, Rodolfo
Pozzo, Hlram J.
Ragonese, Arturo E.
Reinares, Serglo
Rouzaut, Rodolfo
Salaber, Julio
Salgado, José
Santini, Bruno L. P.
Schlvazappa, Marlo
Simonuttl, Atlllo A.
Tissembaum, Marlano
Urondo, Francisco E.
Vlrasoro, Enrique

SECCION MENDOZA

COMISION DIRECTIVA

Presidente, Dr. Juan B. Lara; Vlce-presldente, Ing. Agr. José Raúl Ponce; Secretarlo, Ing. Agr. Jullo Tolosa (h); Tesorero, Ing. Cayetano C. Piccione; Blbllotecarlo, Sr. Adrián Ruíz Leal; Vocales: Dr. Eduardo Carette; Dr. Marlo Bldone; Ing. Alfredo Rosenthal; Sr. Manuel Tellechea; Ing. Agr. Rafael E. Pontis.

SOCIOS ACTIVOS

Alurralde, Juan Carlos
Anzorena, Jaclnto
Ayala Castagnino, G.
Basso, Germlnal
Benegas, Raúl
Bidone, Marlo
Borsanl, Carlos Pablo
Burgoa, Pedro A.
Carette, Eduardo
Castillo, José
Croce, Francisco M.
Espinosa, Norberto A.
Flor Alvarado, José M.
Gabrlelll, Franclsco J.
Galeano, Edgardo
García, José Federico
Godoy Vergelin, G.
Gomensoro, José N.
Granzella, Sinlbaldo
Guevara, José R.
Guiard, Rlcardo
Jofré, Alberto L.
Lara, Juan B.
Lucero, Braulio G.
Lugones, Manuel G.
Maglstrettl, Gulllermo
Maneschl, Ernesto
Maroso, José Angel
Maveroff, Aquiles
Mayorga, Santiago C.
Mlyara, Salomón
Navarro Correas, José A.
Paganotto, Juan P.
Pelala, Dante
Picclone, Cayetano C.
Ponce, José Raúl
Pontis, Rafael E.
Richard, Alfonso E.
Rosales, Ranulfo S.
Rosenthal, Alfrado
Ruíz, Aníbal
Ruíz Leal, Adrián
San Martín, José Benito de
Serra, Luis Angel
Silvestre, Tomás
Stura, Angel C.
Tellechea, Manuel
Tolosa, Julio (h)
Toso, Juan F.
Villanueva, Mlguel Angel

SECCION LA PLATA

COMISION DIRECTIVA

Presidente, Dr. Carlos A. Sagastume; Secretario, Ing. Adolfo P. Grissi; Tesorero, Dr. Carlos Teobaldo; Vocales: Dr. Hilario Magliano, Dra. Juana Cortelezzi; Ing. Juan Sabato; Dr. Federico E. Christmann.

SOCIOS ACTIVOS

Alsina Fuertes, Fidel
Amarante, Pedro C.
Angli, Jerónimo
Arroyo Basaldúa, Víctor M.
Basualdo, Washington S.
Bauer, Conrado
Bonet, Luis A.
Canals Frau, Salvador
Cortelezzi, Juana
Crespi Gherzi, Rodolfo A.
Christmann, Federico E.
Daló, Héctor R.
Ferrari, Obdulio J. F.
Gascón, Jorge
Gershánik, Simón
Giovambattista, Humberto
Grisi, Adolfo P.
Loedel Palumbo, Enrique
Mc Loughlin, Rogelio P.
Magliano, Hilario
Marmonti, Angel
Massimino, Blas
Méndez, José D.
Micheletti, Luis A.
Nico, Raúl
Oliva, Virgilio
Paternosto, Pedro G.
Pera, Tomás Carlos
Platzceck, Ricardo P.
Rodríguez, Marcelo R. N.
Sabato, Juan
Sáez, Francisco A.
Sagastume Berra, A. E.
Sagastume, Carlos A.
Scheggia, Eduardo R.
Teobaldo, Carlos
Toranzos, Fausto L.
Trejo, César A.
Ucha Udabe, Manuel
Vucetich, Danilo C.
Wilkens, Alejandro

SOCIOS CORRESPONDIENTES

Aguilar y Santillán, R.	México
Alvarez, Antenor	Sgo. del Estero
Amaral, Afranio de	San Pablo (Br.)
Avendaño, Leónidas	Lima
Bachmann, Carlos J.	Lima
Bodenbender, Guillermo	Córdoba
Bolívar, Ignacio	Madrid
Bonarelli, Guido	Gubbio (It.)
Borel, Emile	París
Bragg, William Henry	Londres
Bruch, Carlos	Olivos (B. A.)
Cabrera, Blás	Madrid
Campos Porto, Pablo	Río de Janeiro
Carabajal, Melitón M.	Lima
Darmois, Eugenio	Nancy (Fr.)
Darmois, Georges	París
Dávila, Rubén	Santiago (Ch.)
Escomel Edmundo	Arequipa (P.)
Fiebrig, Carlos	Munich (Al.)
Fontecilla Larrain, Arturo	Santiago (Ch.)
Fort, Michel	Lima
González del Riego, Felipe	Lima
Greve, Germán	Santiago (Ch.)
Guinier, Philibert	Nancy (Fr.)
Hadamard, Jacques	París
Hauman, Luciano	Bruselas
Hernández, Juvenal	Santiago (Ch.)
Hijar y Haro, Luis	México
Janet, Pierre	París
Jiménez de Asúa, Luis	Madrid
Keiper, Guillermo	Berlín
Kinart, Fernando	Amberes
Lahille, Fernando	Tarn (Fr.)
Langevin, Paul	París
Levi Civita, Tulio	Roma
Lobo, Bruno	Río de Janeiro
Mardones, Francisco	Santiago (Ch.)
Molina, Enrique	Concepc. (Ch.)
Monjaráz, Jesús E.	México
Moretti, Gaetano	Milán
Oliver Schneider, Carlos	Santiago (Ch.)
Pereira d'Andrade, Lencastre	Nova Goa (I. P.)
Perrin, Tomás G.	México
Perrine, Carlos D.	Córdoba
Pi y Suñer, Augusto	Barcelona
Portor, Carlos E.	Santiago (Ch.)
Reyes Cox, Eduardo	Santiago (Ch.)
Rowo, Leo S.	New York
Shepperd, William R.	Wáshington
Tello, Julio C.	Lima
Valle, Rafael H.	México
Vélez, Daniel M.	México
Villarán, Manuel V.	Lima
Vitoria, Eduardo	Barcelona
Volterra, Vito	Roma

ANALES

DE LA

SOCIEDAD CIENTIFICA ARGENTINA

ADOPTADOS PARA SUS PUBLICACIONES POR LA

ACADEMIA NACIONAL DE CIENCIAS EXACTAS, FISICAS Y NATURALES

DIRECTOR: EMILIO REBUELTO

MARRO 1939 — ENTREGA III — TOMO CXXVII

SUMARIO

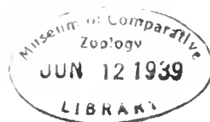
BUENOS AIRES
Calle Santa Fe 1145

1939

SOCIEDAD CIENTIFICA ARGENTINA

ADVERTENCIA. — Los colaboradores de los Anales son personalmente responsables de la tesis sustentada en sus escrito. Tienen derecho a la corrección de do pruebas. Los que deseen tirada aparte de 50 ejemplares de sus artículos, deben solicitarla por escrito. Los manuscritos, correspondencia, etc. se enviarán a la sede social, Santa Fe 1145.

Impreso en los Talleres Gráficos "TOMAS PALUMBO" - La Madrid 321-325 - Buenos Aires



EXTENSIONES DEL TEOREMA DE ABEL-STOLZ
Y
SOBRE ALGUNAS TRANSFORMACIONES FUNCIONALES LINEALES

Por J. C. VIGNAUX

(Conclusión)

CAPITULO II

LA TRANSFORMACION DE LE-ROY

19. Le-Roy (1) ha considerado la integral curvilínea

$$\int_C \frac{\varphi(x)}{1 - z\,x}\,ax$$

donde C es una curva abierta o cerrada, para dar una representación analítica, de una función $f(z)$ dada por su desarrollo tayloriano

$$f(z) = \sum_0^{\infty} a_n\, z^n\,,$$

mediante integrales de aquel tipo.

Aquí nos vamos a ocupar, del estudio de la correspondencia funcional que establece la integral de Le-Roy

$$f(z) = \int_C \frac{\varphi(x)}{1 - x\,z}\,dx \qquad [1]$$

entre una función dada $\varphi(x)$ y la función $f(z)$ definida por la integral [1]. Luego proponemos algunas generalizaciones de la misma.

Trataremos primeramente el caso que la [1] esté tomada sobre el intervalo real (0,1).

(1) *Sur les séries divergentes et les fonctions définies par un dévéloppement de Taylor.* Ann. Toulouse (2) 2 (1900).

Sea la integral

$$f(z) = \int_0^1 \frac{\varphi(t)}{1 - zt}\, dt \qquad [1]$$

donde $\varphi(t)$ es una función integrable y acotada en $(0,1)$, y z una variable compleja: $z = x + iy$. Representaremos los valores de z en el plano coordenado que tiene el mismo eje real t.

La integral [1] tiene un valor finito y bien determinado en el intervalo $(+1, +\infty)$; luego dada la función $\varphi(t)$ esta integral define una función $f(z)$, continua en todo el plano de la variable z, excluyendo los puntos del intervalo $(+1, +\infty)$. Esta correspondencia la indicaremos con la notación

$$f(z) = R[\varphi(x)]$$

A las funciones $\varphi(x)$ y $f(z)$, las llamaremos respectivamente *función generatriz* (R) y *función determinante* (R).

La función $f(z)$ *es holomorfa en todo el plano con la cortadura* $(+1, +\infty)$.

En efecto; sea C una curva cerrada situada en el plano de la variable z, que no tenga ningún punto común con el segmento $(+1, \infty)$; se tiene

$$\int_C f(z)\, dz = \int_C dz \int_0^1 \frac{\varphi(x)}{1 - xz}\, dx$$

$$= \int_0^1 \varphi(x)\, dx \int \frac{dz}{1 - xz}.$$

La función

$$\frac{1}{1 - xz}$$

es holomorfa en el dominio cerrado limitado por C, luego según el teorema de Cauchy se tiene

$$\int_C \frac{dz}{1 - xz} = 0$$

por tanto, resulta

$$\int_C f(z)\, dz = 0,$$

luego, en virtud del teorema de Morera la $f(z)$ es holomorfa en el interior de C.

Derivación. — Las derivadas sucesivas de la función holomorfa

$$f(z) = \int_0^1 \frac{\varphi(x)}{1 - xz} dx$$

se deducen fácilmente derivando bajo la integral respecto de z Se tiene

$$f'(z) = \int_0^1 \frac{x \cdot \varphi(x)}{(1 - zx)^2} dx$$

$$f''(z) = 2! \int_0^1 \frac{x^2 \varphi(x)}{(1 - zx)^4} dx$$

. . . . . .

$$f^{(n)}(z) = n! \int_0^1 \frac{x^n \varphi(x)}{(1 - xz)^{n+1}} dx . \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots$$

En particular, para $z = 0$

$$\frac{f^{(n)}(0)}{n!} = \int_0^1 x^n \varphi(x) dx$$

20. *Propiedades fundamentales.* — Vamos a deducir algunas propiedades fundamentales de la transformada (R).

Sea

$$f(z) = \int_0^1 \frac{\varphi(z)}{1 - zx} dx, \quad [1] \qquad g(z) = \int_0^1 \frac{\varphi(x)}{1 - xz} dx \quad [2]$$

Puesto que

$$f(z) \pm g(z) = \int_0^1 \frac{\theta(x)}{1 - zx} dx$$

donde

$$\theta(x) = \varphi(x) \pm \psi(x)$$

resulta: *La suma* (diferencial) *de dos transformadas* (R) *es una transformada* (R), *cuya generatriz es la suma* (diferencia) *de las generatrices de los primeros.*

Probaremos ahora que el producto de dos transformadas (R) es una transformada (R) (1).

Haciendo el producto de las integrales [1] y [2], se tiene

$$f(z) \cdot g(z) = \int_0^1 \int_0^1 \frac{\varphi(u) \psi(v)}{(1 - uz)(1 - vz)} du\, dv$$

(1) Seguiremos un razonamiento análogo al utilizado por M. Borel para el caso análogo del producto de integrales de Stieltjes (*Leçons sur les séries divergentes*, París, 1928, pág. 79).

El núcleo de esta integral doble se puede escribir en la forma siguiente

$$\frac{1}{(1-uz)(1-vz)} = \left[\frac{1}{1-uz} - \frac{1}{1-vz}\right]\frac{1}{z(u-v)}$$

luego la relación anterior resulta

$$z\,f(z)\,g(z) = J_1(z) + J_2(z) \qquad [2]$$

donde

$$J_1(z) = \int_0^1\int_0^1 \frac{\varphi(u)\ \psi(v)}{(u-v)(1-uz)}\,du\,dv$$

$$J_2(z) = \int_0^1\int_0^1 \frac{-\varphi(u)\,\psi(v)}{(u-v)(1-vz)}\,du\,dv$$

Estas integrales no tienen sentido debido a la presencia del factor $(u-v)$ en el denominador. En cambio existe el *valor principal* en el sentido de Cauchy.

La integral J_1 se puede poner en la forma

$$J_1 = \int_0^1 \frac{\varphi(u)}{1-uz}\left[\int_0^1 \frac{\psi(v)\,dv}{u-v}\right]du$$

$$= \int_0^1 \frac{\varphi(u)\,T(u)}{1-uz}\,du$$

donde

$$T(u) = \int_0^1 \frac{\varphi(v)\,dv}{u-v}$$

Del mismo modo

$$J_2 = \int_0^1 \frac{\psi(v)}{1-vz}\left[\int_0^1 \frac{-\varphi(u)\,du}{u-v}\right]dv$$

$$= \int_0^1 \frac{\varphi(v)\ S(v)}{1-vz}\,dv$$

donde

$$S(v) = \int_0^1 \frac{-\varphi(u)}{u-v}\,du\,. \qquad (\beta)$$

Según la definición de valor principal de una integral definida, se tiene

$$T(u) = \lim_{\delta \to 0} \left[\int_0^{u-\delta} \frac{\psi(v)\, dv}{u - v} + \int_{u+\delta}^{1} \frac{\varphi(v)\, dv}{u - v} \right]$$

donde $\delta > 0$.

La integración por parte nos da

$$\int_0^{u-\delta} \frac{\psi(v)\, dv}{u - v} = \Big| - \varphi(v) \log(u - v) \Big|_0^{u-\delta} + \int_0^{u-\delta} \log(u - v)\, \psi'(v)\, dv$$

$$= - \varphi(u - \delta) \log \delta + \psi(0) \log u +$$

$$+ \int_0^{u-\delta} \log(v - u)\, \varphi'(v)\, dv$$

y análogamente

$$\int_{u-\delta}^{1} \frac{\psi(v)\, dv}{u - v} = - \psi(1) \log u + \psi(u + \delta) \log \delta +$$

$$+ \int_{u-\delta}^{1} \log(v - u)\, \psi'(v)\, dv$$

Luego la suma de las integrales que figuran dentro del corchete es igual a

$$[\psi(0) - \psi(1)] \log u + [\psi(u + \delta) - \psi(u - \delta)] \log \delta$$

$$+ \int_0^{u-\delta} \log(v - u)\, \psi'(v)\, dv + \int_{u-\delta}^{1} \log(v - u)\, \psi'(v)\, dv$$

Supongamos además que $\psi'(u)$ existe y sea acotada; entonces resulta

$$\log \delta\, [\psi(u + \delta) - \psi(u - \delta)] = 2\, \delta \,.\, \log \delta \,.\, \psi'(u + \theta \delta), \ |\theta| < 1$$

por tanto el primer miembro de esta relación tiende a cero cuando $\delta \longrightarrow 0$.

Se tiene finalmente

$$T(u) = \lim_{\delta \to 0} \left[\int_0^{u-\delta} + \int_{u+\delta}^{1} \right] = [\psi(0) - \psi(1) \log u +$$

$$+ \int_0^{1} \psi'(v) \log |v - u|\, dv$$

Razonando en la misma forma, se prueba que el valor principal de la integral $S(v)$ existe [1].

Según esto, la relación [2] se puede escribir

$$z f(z) g(z) = \int_0^1 \frac{\omega(x)}{1 - xz} dx$$

donde

$$\boxed{\omega(z) = \varphi(x) T(x) + \psi(x) S(x)} \qquad (\gamma)$$

Por tanto,

Si

$$f(z) = R[\varphi(x)] \quad , \quad g(z) = R[\psi(x)]$$

resulta

$$z f(z) . g(z) = R[\omega(x)]$$

donde $\omega(x)$ *está dada por la relación* (γ).

La transformación de Le Roy tiene además, las dos propiedades siguientes:

Sea

$$f(z) = \int_0^1 \frac{\varphi(x)}{1 - xz} dx \qquad [1]$$

y veamos cuál es la transformada (R) de la función: $x\,\varphi(x)$.

Pongamos

$$g(z) = \int_0^1 \frac{x\,\varphi(x)}{1 - xz} dx$$

se tiene

$$\frac{x}{1 - xz} = \left(-1 + \frac{1}{1 - xz}\right)\frac{1}{z}$$

luego

$$g(z) = -\frac{1}{z}\int_0^1 \varphi(x)\,dx + \frac{1}{z}\int_0^1 \frac{\varphi(x)\,dx}{1 - xz}$$

$$= \frac{1}{z}\left[f(z) - C\right]$$

de donde resulta

$$\frac{1}{z} f(z) = \int_0^1 \frac{x\,\varphi(x)}{1 - xz} dx + \frac{C}{z}$$

(1) Para establecer este valor principal, se ha supuesto que las funciones generatrices $\varphi(x)$ y $\psi(x)$ sean derivables, a fin de simplificar los cálculos.

De aquí, se deduce igualmente que

$$\frac{1}{z^2} f(z) = \int_0^1 \frac{x^2 \varphi(x)}{1 - xz} dx + \frac{C}{z^2} + \frac{C_1}{z}$$

y en general,

$$\frac{1}{z^n} f(z) = \int_0^1 \frac{x^n \varphi(x)}{1 - xz} dx + A_n(z)$$

donde $A\ (z)$ es un polinomio de grado n en la variable $\frac{1}{z}$.

Por tanto: *si la función $f\ (z)$ es la determinante (R) de la función $\varphi\ (x)$, la función $x^n\ \varphi\ (x)$ tiene por determinante (R) a la función*

$$\frac{1}{z^n} f(z),$$

a menos de un polinomio en $\frac{1}{z}$ de grado n.

Consideremos nuevamente la relación [1] y supongamos además que la generatriz $\varphi\ (x)$ sea derivable. Veamos cómo se obtiene la transformada (R) de la derivada $\varphi'\ (x)$.

Pongamos

$$h(z) = \int_0^1 \frac{\varphi'(x)}{1 - xz} dx,$$

la integración por parte nos da

$$h(z) = \left| \frac{\varphi(x)}{1 - xz} \right|_{x=0}^{x=1} - \int_0^1 \varphi(x) \frac{z}{(1 - x)^2} dx$$

$$= \frac{\varphi(1)}{1 - z} - \frac{\varphi(0)}{1} - z \int_0^1 \frac{\varphi(x)}{(1 - xz)^2} dx$$

es decir

$$h(z) = \frac{\varphi(1)}{1 - z} - \varphi(0) - z f'(z).$$

Por tanto

$$z f'(z) = - \int_0^1 \frac{\varphi'(z)}{1 - xz} dx + A(z).$$

21. *Desarrollo de Taylor.* — Determinemos el desarrollo tayloriano de la función determinante (R), en la proximidad del origen. Para ello, partamos del desarrollo de su núcleo

$$\frac{1}{1 - xz} = \sum_0^\infty (xz)^n.$$

Puesto que esta serie de potencias es uniformemente convergente para $|z| < 1$ y todo t de $(0,1)$; resulta entonces

$$f(z) = \int_0^1 \frac{\varphi(x)}{1 - xz} dx = \int_0^1 \varphi(x) \left(\sum_0^\infty (xz)^n \right) dx$$

$$= \sum_0^\infty z^n \int_0^1 x^n \varphi(x)\, dx.$$

Poniendo

$$a_n = \int_0^1 x^n \varphi(x)\, dx$$

el desarrollo de $f(z)$ es

$$f(z) = \sum_0^\infty a_n z^n$$

El radio de convergencia de esta serie que se determina por el teorema de Cauchy-Hadamar, resulta: $R \leq 1$.

La función $f(z)$ coincide en el interior del círculo de convergencia con la suma de la serie [1]; por tanto, esta integral da la prolongación analítica en todo el plano de la función representada por esta serie.

Los puntos singulares de $f(z)$ solamente pueden estar situados en el intervalo $(+1, +\infty)$. En particular, si el radio de convergencia es $R = 1$, la función tiene solamente un punto singular: $z = 1$.

La $f(z)$ tiene como *cortadura* el segmento $(+1, +\infty)$ de la Ox. Esta cortadura es *esencial* si la generatriz $\varphi(x)$ no es analítica en el intervalo abierto $(0 < x < 1)$. En cambio si la $\varphi(x)$ es holomorfa en un área que contiene este segmento en su interior, entonces la integración se puede efectuar a lo largo de una curva de extremos 0 y 1; de donde se concluye que la cortadura no es *esencial* y que la función $f(z)$ no tiene otros puntos singulares que $z = 1$ y $z = +\infty$.

22. *Desarrollo en serie de polinomios.* — Vamos ahora a probar que la función $f(z)$ determinante (R) puede estar representada, en todo dominio D cuyo contorno no tenga ningún punto común con la

cortadura $(+1, \infty)$, por una serie uniformemente convergente de polinomios, cuyos coeficientes están determinados en función de su generatriz $\varphi(z)$. Para ello utilizaremos un razonamiento ya clásico, debido a M. Borel [1].

Sea

$$f(z) = \int_0^1 \frac{\varphi(x)\, dx}{1 - xz} \qquad [1]$$

sabemos que la función $\frac{1}{1-t}$ puede ser desarrollada en serie uniformemente convergente de polinomios, en toda región del plano a distancia finita, cuyo contorno no tiene ningún punto común con el segmento $(+1, +\infty)$ del eje real. Sea entonces,

$$\frac{1}{1-t} = \sum_0^\infty P_n(t)$$

uno de estos desarrollos. El término general $P_n(t)$ es un polinomio de grado m

$$P_n(t) = C_{0n} + C_{1n}\, t + \ldots + C_{n,n}\, t^m$$

Según esto, el núcleo de la integral [1] admite el desarrollo en serie de polinomios

$$\frac{1}{1-xz} = \sum_0^\infty P_n(xz)$$

uniformemente convergente, en un cierto dominio que se deduce del anterior por la transformación

$$t = xz$$

donde x varía en el intervalo $(0,1)$.

En virtud de la convergencia uniforme, resulta entonces

$$f(z) = \int_0^1 \varphi(x) \left(\sum_0^\infty P_n(xz) \right) dx =$$

$$= \sum_0^\infty \int_0^1 \varphi(x) \,.\, P_n(xz)\, dx = \sum_0^\infty Q_n(z)$$

(1) E. Borel, *Loc. cit.*

donde

$$Q_n(z) = \int_0^1 \varphi(x) P_n(xz)\, dx$$

representa un polinomio en z. La expresión de este polinomio se calcula, teniendo presente que

$$P_n(xz) = C_{0\,n} + C_{1\,n}(xz) + \ldots + C_{m,\,n}(xz)^m$$

luego

$$Q_n(z) = \sum_{p=0}^{m} C_{p,\,n}\, z^p \int_0^1 \varphi(x)\, x^p\, dx$$

$$= \sum_{p=0}^{m} C_{p,\,n}\, a_p\, z^p$$

donde

$$a_p = \int_0^1 \varphi(x)\, x^p\, dx\,.$$

Se ve que, para todo punto z de la estrella rectilínea, resulta el desarrollo

$$f(z) = \sum_0^{\infty} Q_n(z)\,,$$

el cual, es también uniformemente convergente, en todo dominio D interior a la estrella.

23. *Relación con la integral de Borel.* — Consideremos la función $f(z)$ definida por la integral de Le-Roy

$$f(z) = \int_0^1 \frac{\varphi(x)\, dx}{1 - xz}\,, \qquad [1]$$

y sea

$$f(z) = \sum_0^{\infty} a_n z^n \qquad [2]$$

donde

$$a_n = \int^1 x^n \varphi(x)\, dx\,,$$

su desarrollo de Taylor, convergente en el círculo de radio $R \leq 1$.

Si aplicamos a la serie divergente [2], el proceso de sumación de M. Borel [1], debemos considerar su función asociada

$$\psi\,(xt) = \sum_{0}^{\infty} \frac{a_n}{n!}\,(zt)^n$$

luego la integral de Borel, será

$$f\,(z) = \int_{0}^{\infty} e^{-t}\,\psi\,(zt)\,dt \qquad [3]$$

tomada sobre el semi-plano real positivo.

Como los puntos singulares de la función $f\,(z)$ definida por la serie [2] en los puntos interiores de su círculo de convergencia, se encuentran en el intervalo $(+\,1,\ +\,\infty)$; el polígono de sumabilidad se reduce al semiplano que contiene el origen y limitado por la recta paralela al eje $0y$, trazada por el punto singular $z = 1$ más próximo del origen.

Por tanto, la integral de Borel [3] representa a la función determinante (R) en el semi-plano: $R\,(z) < 1$.

Se puede lograr un resultado más general, tomando la integral de Borel sobre un semi-rayo de origen 0, en lugar del camino real. En efecto: sea Δ uno de estos semi-rayos de argumento φ, y consideremos la integral de Borel

$$\int_{0}^{\infty} e^{-t}\,\psi\,(tz)\,dt \qquad [4]$$

donde t pertenece a Δ. Ella define la misma función $f\,(z)$ en todo el semi-plano D determinado del siguiente modo. Por el punto $z = 1$ tracemos la perpendicular (δ) al semi-rayo Δ' de argumento $(-\,\varphi)$. El dominio de convergencia D de la integral [4] es el semi-plano limitado por la recta (δ) y que contiene el origen [2].

(1) E. Borel, *Leçons sur les series divergentes*. Gauthier-Villard, París 1928.

(2) J. C. Vignaux, *Sobre la sumación de la serie de Taylor en una estrella rectilínea*. Publicación de la Univ. de Buenos Aires (1924).

La idea de considerar caminos radiales para la integral de M. Borel, creo que se inicia en este trabajo; donde se determina la región de sumabilidad (B) en el caso que la función definida por su desarrollo de Taylor

$$f\,(z) = \sum_{0}^{\infty} a_n\,z^n$$

tiene *uno* o *dos* puntos singulares. El problema general fué completamente resuelto

De este modo se consigue la prolongación analítica de la función $f(z)$ definida por la serie [2] a toda su estrella rectilínea de rayo $(+1, \infty)$.

24. *Prolongación analítica.* — La solución dada por Hausdorff, Polya y Amoroso, del problema de los momentos del tipo

$$a_n = \int_0^1 x^n \varphi(x)\, dx \qquad n = 0, 1, 2, \ldots \quad [1]$$

permite resolver completamente el problema de prolongación analítica propuesto por M. Le-Roy.

Si se da una función $f(z)$ definida por su desarrollo de Taylor

$$f(z) = \sum_0^\infty a_n z^n \quad [2]$$

cuyo radio de convergencia se supone igual a la unidad, y sus puntos singulares estén en el intervalo $(+1, +\infty)$; entonces la $f(z)$ se puede expresar en toda su estrella rectilínea por una integral de Le-Roy. En efecto; dada la sucesión $\{a_n\}$ se puede determinar una función $\varphi(x)$ solución de la [1]; por tanto, la [2] se puede escribir

$$f(z) = \sum_0^x z^n \int_0^1 x^n \varphi(x)\, dx = \int_0^1 \varphi(x)^n \left(\sum_0^\infty (xz) \right) dx$$

es decir

$$f(z) = \int_0^1 \frac{\varphi(x)}{1 - xz}\, dx.$$

Mientras la integral de M. Borel, tomada sobre el camino real, permite solamente representar la $f(z)$ definida por la serie de potencia [2] en el semiplano $R(z) < 1$, la integral de M. Le-Roy permite representarla en todo el plano en el cual se ha efectuado la *cortadura* $(+1, +\infty)$ sobre el eje real; y esta representación tiene la gran ventaja de ser *única* y además de estar expresada mediante una integral entre límites finitos muy sencilla.

---

independientemente, adoptando también caminos radiales, por el profesor G. Doestch, en varios trabajos interesantes. Véase: G. DOETSCH, *Theorie und Anwendung der Laplace - transformation*, A. (1937) p. 77, y la bibliografía que adjunta.

25. Los resultados anteriores se pueden extender a las integrales de Le-Roy

$$f(z) = \int_C \frac{\varphi(t)}{1 - tz} dt$$

donde C es un arco de curva y $\varphi(t)$ función de los puntos de C.

Más general que la transformación (R) es la definida por la relación

$$f_{(\alpha)}(z) = \int_0^1 \frac{\varphi(x)\, dx}{(1 - xz)^{\alpha}}$$

donde α es un número real: $\alpha \neq -1, -2, -3, \ldots$ que llamaremos *transformación* (R) *de orden* α.

El caso particular $\alpha = 1$ corresponde al estudiado.

Si $|z| < 1$, el núcleo de esta integral

$$\frac{1}{(1 - xz)^{\alpha}}$$

puede ser desarrollado en una serie uniformemente convergente para todos los valores reales de x del intervalo $(0,1)$

$$\frac{1}{(1 - xz)^{\alpha}} = \sum_0^{\infty} \frac{\alpha(\alpha + 1) \ldots (\alpha + n - 1)}{n!} (xz)^n.$$

Multiplicando todos los términos por $\varphi(x)$, se obtiene una nueva serie, la cual se puede integrar término a término, es decir

$$f_{\alpha}(z) = \int_0^1 \varphi(x)\, x^n \left(\sum_0^{\infty} \frac{\alpha(\alpha + 1) \ldots - (\alpha + n - 1)}{n!} z^n \right) dx$$

$$= \sum_0^{\infty} \frac{\alpha(\alpha + 1) \ldots (\alpha + n - 1)}{n!} z^n \int_0^1 \varphi(x)\, x^n\, dx$$

$$= \sum_0^{\infty} \frac{a_n}{n!} \alpha^{(n} . z^n$$

donde

$$a_n = \int_0^1 \varphi(x)\, x^n\, dx$$

y

$$\alpha^{(n} = \alpha(\alpha + 1) \ldots (\alpha + n - 1).$$

Se puede considerar la transformada de Le-Roy, adoptando integrales en el sentido de Stieltjes; es decir

$$f(z) = \int_0^1 \frac{d\,\varphi(x)}{1 - xz}$$

que llamaremos *transformación* de Le-Roy-Stieltjes. Nos limitaremos aquí a señalar estas nuevas cuestiones, que será tema de estudios posteriores.

26. *Transformada doble de Le-Roy.* — Vamos a ocuparnos ahora brevemente sobre la integral doble

$$f(z, w) = \int_0^1 \int_0^1 \frac{\varphi(x, y)}{(1 - xz)(1 - yw)} dx\,dy$$

A cada función real $\varphi(x, y)$ definida en el cuadrado $\{ 0 \leq x \leqq 1, 0 \leq y \leq 1 \}$ corresponde una función compleja $f(z, w)$ de las variables complejas z y w, que llamaremos la transformada de Le-Roy doble

$$f(z, w) = R[\varphi(x, y)]$$

Representemos las variables complejas z y w respectivamente en sus planos coordenados, en los cuales se ha hecho las cortaduras $(+1, +\infty)$ y $(+1, +\infty)$ sobre sus ejes reales.

La función $f(z, w)$ es holomorfa en este sistema de planos asociados. En efecto; sea C y C' dos curvas cerradas respectivamente situadas en cada uno de los planos de las variables z, w y cuyos contornos no tengan ningún punto común con las cortaduras; se tiene entonces

$$\int_C \int_{C'} f(z, w)\,dz\,dw = \int_0^1 \int_0^1 \varphi(x, y)\,dx\,dy \int_C \int_{C'} \frac{dz\,dw}{(1 - xz)(1 - yw)}$$

y como la función

$$\frac{1}{(1 - xz)(1 - yw)}$$

es holomorfa en el dominio cerrado; resulta

$$\int_C \int_{C'} \frac{dz\,dw}{(1 - zx)(1 - y)} = 0$$

luego

$$\int_C \int_{C'} f(z, w)\, dx\, dz = 0$$

por tanto la función $f(z, w)$ es holomorfa en el dominio asociado $[C, C']$.

Sus derivadas parciales sucesivas se obtienen con la fórmula

$$\frac{\partial^{m+n} f}{\partial z^m\, \partial w^n} = m!\, n! \int_0^1 \int_0^1 \frac{(-1)^{m+n}\, x^m\, y^n\, \varphi(x, y)\, dx\, dy}{(1 - xz)^{m+1}\, (1 - y)^{n+1}}$$

$$(m, n = 0, 1, 2, \ldots)$$

El núcleo tiene el siguiente desarrollo

$$\frac{1}{(1 - xz)(1 - yw)} = \sum_0^\infty \sum_0^\infty (xz)^m\, (yw)^n$$

uniformemente convergente para $\{|z| < 1,\ 0 \leq x \leq 1,\ |w| < 1,\ 0 \leq y \leq 1\}$; se deduce entonces que

$$f(z, w) = \int_0^1 \int_0^1 \varphi(x, y) \left(\sum_0^\infty \sum_0^\infty (xz)^m\, (yw)^n \right) dx\, dy$$

$$= \sum_0^\infty \sum_0^\infty z^m\, w^n \int_0^1 \int_0^1 x^m\, y^n\, \varphi(x, y)\, dx\, dy$$

es decir

$$f(z, w) = \sum_0^\infty \sum_0^\infty a_{m, n}\, z^m\, w^n \qquad [2]$$

donde

$$\boxed{a_{m, n} = \int_0^1 \int_0^1 x^m\, y^n\, \varphi(x, y)\, dx\, dy} \qquad [3]$$

La [2] da el desarrollo tayloriano de la función $f(z, w)$ definiad por la integral doble [1].

Para resolver el problema recíproco, es decir, representar por una integral doble de Le-Roy, una función definida por su desarrollo [2], en el sistema de círculos $\{|z| < 1,\ |w| < 1\}$; es necesario resolver el siguiente problema, que llamaremos de los *momentos dobles*

de Le-Roy-Hausdorff: *dada la sucesión doble $a_{m,n}$ determinar una función única $\varphi(x, y)$ de dos variables reales, tal que*

$$a_{m,n} = \int_0^1 \int_0^1 x^m y^n \varphi(x, y)\, dx\, dy \qquad (m, n = 0, 1, \ldots)$$

La aplicación del método de sumación de Borel a la serie doble de potencias [2] nos conduce al siguiente resultado.

La función asociada, es

$$\psi(zx, wy) = \sum_0^\infty \sum_0^\infty a_{m,n} \frac{(zx)^m}{m!} \frac{(wy)^n}{n!}$$

luego la integral doble de Borel, resulta

$$f(z, w) = \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-x-y} \psi(zx, wy)\, dx\, dy \qquad [3]$$

donde x e y son reales y positivas (1).

Si en los puntos: $z = 1$ y $w = 1$, trazamos las rectas δ y δ' paralelas a los ejes imaginarios, la integral doble [3] converge en el semi plano asociado $\{ |z| < 1, \; |w| < 1. \}$

(1) J. C. Vignaux, *a*) *Sobre el método de sumación exponencial para las series dobles.* Publicaciones de la Fac. de Ciencias exactas de Buenos Aires, Enero 1933.

b) *Sulla sommabilita della serie doppia de Taylor col método exponentiale.* Pontificia. Accad. della Sc. 1933.

c) *Sur la sommation de la série double de Taylor divergente,* Accad. R. de Belgique (1933).

CAPITULO III

LA TRANSFORMACION DE HEINE

27. Introduccion. — La integral definida

$$f(z) = \int_a^b \frac{\varphi(x)}{z - x}\, dx \qquad [1]$$

donde $\varphi(x)$ es una función dada e integrable en (a, b), ha sido utilizada frecuentemente por Heine en sus interesantes investigaciones sobre las *funciones de Lamé* [1], y por L. Schlessinger [2] en el estudio de las *ecuaciones diferenciales lineales.* Ella tiene, en efecto, la propiedad siguiente: si $\varphi(x)$ es una integral de una ecuación diferencial llineal a coeficientes racionales

$$\Delta\, \varphi(x) = 0, \qquad [2]$$

la función $f(z)$ definida por la (1), satisface a la ecuación lineal *no omogénea.*

$$\Delta\, \varphi(x) = \psi(x), \qquad [3]$$

donde $\psi(x)$, es *función racional.*

La transformada de una función $\varphi(x)$ en otra $f(z)$ por medio de la relación (1) ha sido denominada por S. Pincherle *transformación de Heine,* en una breve Nota [3].

Más general que la anterior, Pincherle considera la integral

$$f(z) = \int_C \frac{\varphi(t)}{t - z}\, dt$$

sobre una curva C abierta o cerrada del plano, siendo $\varphi(t)$ una función de la variable t sobre C.

(1) H. Heine, *Journal de Crelle,* t. LX, LXI, LXII.
(2) L. Schlesinger, *Handbuch der linearen Differential.* Gleichungen. Berlin.
(3) S. Pincherle, *Funzioni Analitiche,* 1923.

En este capítulo, vamos a estudiar esta correspondencia funcional, dando algunas propiedades nuevas y estableciendo su relación con el problema de la prolongación analítica. Finalmente proponemos algunas generalizaciones.

Consideremos la integral definida

$$f(z) = \int_0^1 \frac{\varphi(x)}{x - z} dx \qquad [1]$$

donde $\varphi(x)$ es una función de la variable real x de $(0,1)$, y tal que la integral

$$\int_0^1 |\varphi(x)| \, dx$$

exista. Representaremos la variable compleja z en el mismo plano coordenado.

La función $f(z)$ definida por la (1), tiene un valor finito y bien determinado en todo punto z no situado en el intervalo $(0,1)$, puesto que en este caso el integrando carecería de sentido.

Por tanto, dada la función integrable $\varphi(x)$ en $(0,1)$ la (1) determina una función $f(z)$ de la variable compleja z, continua en todo el plano, en el cual se ha hecho la *cortadura* $(0 - 1)$ sobre el eje real. Esta correspondencia funcional se llama *transformación de Heine* y se indica con la notación

$$f(z) = H[\varphi(x)].$$

A las funciones $f(x)$ y $f(z)$ llamaremos *generatriz* (H) y *determinante* (H) respectivamente.

La función $f(z)$ es holomorfa en todo el plano de la variable z en el cual se ha efectuado la cortadura $(0 \ldots 1)$. En efecto; sea C una curva cerrada tal que el segmento $(0,1)$ sea completamente exterior al dominio D limitado por C; se tiene

$$\int_c f(z) \, dz = \int_c dz \int_0^1 \frac{\varphi(x) \, dx}{x - z} = \int_0^1 \varphi(x) \, dx \int_c \frac{dz}{x - z}$$

y como la función $\dfrac{1}{x - z}$ es holomorfa para todo punto z de D y x del intervalo $(0,1)$, resulta por el teorema de Cauchy

$$\int_C \frac{dz}{x - z} = 0.$$

luego

$$\int_C f(z)\, dz = 0;$$

por tanto, según el teorema de Morera, la función $f(z)$ es holomorfa en D.

Las derivadas sucesivas de $f(z)$ se obtienen derivando sucesivamente bajo signo integral

$$f'(z) = \int_0^1 \frac{\varphi(x)\, dx}{(x - z)^2}$$

$$f''(z) = 2! \int_0^1 \frac{\varphi(x)\, dx}{(x - z)^3}$$

. . . . . .

$$f^{(n)}(z) = n! \int_0^1 \frac{\varphi(x)\, dx}{(x - z)^{n+1}} \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots)$$

Propiedades. — I. *Si*

$$f(z) = H[\varphi(x)] \quad , \quad g(z) = H[\varphi(x)]$$

resulta entonces

$$f(z) + g(z) = H[\theta(x)]$$

donde

$$\theta(x) = \varphi(x) + \psi(x).$$

La demostración es inmediata.

II. *Si*

$$f(z) = H[\varphi(x)] \quad , \quad g(x) = H[\psi(x)]$$

y las generatrices $\varphi(x)$ *y* $\psi(x)$ *son derivables en* $(0, 1)$, *entonces*

$$f(z)\, g(z) = H[w(x)]$$

donde

$$\omega(x) = \varphi(x) \int_0^1 \frac{\psi(v)\, dv}{v - x} + \psi(x) \int_0^1 \frac{-\varphi(v)\, dv}{v - x}$$

En efecto; se tiene

$$f(z) \cdot g(z) = \int_0^1 \frac{\varphi(u)\, du}{u - z} \int_0^1 \frac{\varphi(v)\, dv}{v - z} \qquad]1]$$

$$= \int_0^1 \int_0^1 \frac{\varphi(u)\, \varphi(v)}{(u - v)\,(v - z)}\, du\, dv$$

El núcleo de esta integral doble se puede escribir del siguiente modo

$$\frac{1}{(u - v)\,(v - z)} = \left[\frac{1}{u - z} - \frac{1}{v - z}\right] \frac{1}{v - u},$$

por tanto

$$f(z) \cdot g(z) = \int_0^1 \int_0^1 \frac{\varphi(u)\, \varphi(v)}{(u - z)\,(v - u)}\, du\, dv +$$

$$+ \int_0^1 \int_0^1 \frac{-\varphi(u)\, \psi(v)}{(v - z)\,(v - u)}\, du\, dv = I_1 + I_2$$

Además, se tiene

$$I_1 = \int_0^1 \frac{\varphi(u)}{u - z} \left[\int_0^1 \frac{\psi(v)\, dv}{v - u}\right] du = \int_0^1 \frac{\varphi(u)\ T\ (u)\, du}{u - z}$$

donde

$$T(u) = \int_0^1 \frac{\psi(v)\, dv}{v - u} \qquad (\alpha)$$

y

$$I_2 = \int_0^1 \frac{\psi(v)}{v - z} \left[\int_0^1 \frac{-\varphi(u)\, du}{v - u}\right] dv = \int_0^1 \frac{\psi(v)\, s(u)\, du}{v - z}$$

donde

$$S(v) = \int_0^1 \frac{-\varphi(u)\, du}{u - v} \qquad (\beta)$$

Estas integrales están tomadas en el sentido de *valor principal* de Cauchy, y su existencia se prueba en forma análoga al caso ya tratado para la transformada de Le-Roy.

Teniendo presentes estos resultados, la igualdad (1) resulta finalmente

$$f(z) \cdot g(z) = \int_0^1 \frac{\omega(x)\, dx}{x - z}$$

donde

$$\omega(x) = \varphi(x)\, T(x) + \psi(x)\, S(x)$$

$T(x)$ y $S(x)$ expresan las integrales (*1*) y (2).

28. Desarrollo en serie de potencias. — Como todos los puntos singulares de la función $f(z)$ están situados en el intervalo (0, 1), su desarrollo en serie de potencias de $\frac{1}{z}$, se deduce del siguiente modo. Sea

$$f(z) = \int_0^1 \frac{\varphi(x)\, dx}{x - z}, \qquad [1[$$

podemos escribir

$$\frac{1}{z - x} = \frac{1}{z} \cdot \frac{1}{1 - \frac{x}{z}} = \frac{1}{z} + \frac{x}{z^2} + \ldots + \frac{x^n}{z^{n+1}} + \ldots$$

desarrollo convergente uniformemente para todo x de (0, 1) y $|z| > 1$; luego la (1) resulta

$$f(z) = -\int_0^1 \varphi(x) \left(\sum_0^\infty \frac{x^n}{z^{n+1}} \right) dx = \sum_0^\infty \frac{-1}{z^{n+1}} \int_0^1 x^n\, \varphi(x)\, dx.$$

Si ponemos

$$a_n = -\int_0^1 x^n\, \varphi(x)\, dx,$$

se tiene

$$f(z) = \sum_0^\infty \frac{a_n}{z^{n+1}}$$

y esta relación vale para todos los puntos exteriores del círculo de centro en el origen y radio $R \leq 1$.

El punto en el infinito $r = \infty$, pertenece al campo de regularidad de la $f(z)$ y el desarrollo tayloriano relativo está dado por la (2).

Supongamos ahora que la función $f(z)$ esté definida por su desarrollo tayloriano

$$f(z) = \sum_0^\infty \frac{\alpha_n}{z^{n+1}} \qquad [3]$$

en los puntos exteriores a un círculo de centro en el origen y radio $R \leq 1$; esta función se puede expresar por una integral (4). En efecto, como el problema de los momentos de Le Roy-Hausdorff

$$x_n = -\int_0^1 x^n \varphi(x)\, dx$$

admite solución $\varphi(x)$ única, entonces la (3) se puede escribir

$$f(z) = \sum_0^\infty \frac{-1}{z^{n+1}} \int_0^1 x^n \varphi(x)\, dx =$$

$$= -\int_0^1 \varphi(x) \left[\frac{1}{z} \sum_0^\infty \left(\frac{x}{z}\right)^n\right] dx =$$

$$= \int_0^1 \frac{\varphi(x)}{z\left(1 - \frac{x}{v}\right)}\, dx$$

es decir

$$f(z) = \int_0^1 \frac{\varphi(x)}{x - z}\, dx.$$

29. La integral de Heine se puede transformar en una integral de Laplace como sigue:

Sea

$$f(z) = \int_0^1 \frac{\varphi(z)}{z - x}\, dx, \qquad [1]$$

su núcleo, se puede escribir

$$\frac{1}{z - x} = \int_0^\infty e^{-t(z-x)}\, dt \qquad (t \geq 0) \qquad [2]$$

para todo z tal que: $R(z - x) > 0$. Como el punto x pertenece al intervalo $(0, 1)$, la integral (2) converge en el semi-plano $R(z) > 1$, y la convergencia es además uniforme en toda región cuyo contorno no tenga ningún punto común con la recta de convergencia $R = 1$; se tiene entonces

$$f(z) = \int_0^1 \varphi(x) \left[\int_0^\infty e^{-tz+xt}\, dt\right] dx$$

$$= \int_0^\infty e^{-tz} \left[\int_0^1 \varphi(x)\, e^{xt}\, dx\right] dt$$

pues la permutación de la integración es legítima en el caso presente (1).

Finalmente, si llamamos con $\psi(t)$ la transformada de Laplace limitada,

$$\psi(t) = \int_0^1 e^{zt} \varphi(x)\, dx \qquad [3]$$

la relación anterior se puede escribir

$$f(z) = \int_0^\infty \psi(t)\, e^{-zt}\, dt$$

integral de Laplace de camino real y cuya generatriz (L), es la determinante (L_1), de la generatriz (H).

Teniendo presente que la generatriz $\psi(t)$ de la transformada de Laplace es entera, se puede también de aquí concluir, en virtud de un conocido teorema de Pincherle, que la función $f(z)$ es regular y nula en el infinito.

La función definida por la integral de Heine, se puede expresar, por ser holomorfa y nula en el infinito, mediante una integral de Laplace

$$f(z) = \int_0^\infty e^{-zt}\, F(t)\, dt$$

cuya generatriz $F(z)$ entera, se determina por la fórmula de inversión de Rieman (2)

$$F(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_C f(z)\, e^{zt}\, dz$$

donde C es una curva cerrada cualquiera del plano z que contiene en su interior el segmento $(0, 1)$ (en el cual se encuentran situados todos los puntos singulares de $f(z)$.

La representación de la función $f(z)$ mediante una integral de Laplace de camino real se puede generalizar adoptando caminos radiales en el plano de la variable z, según S. Pincherle.

En efecto; si $f(z)$ es la transformada (H) de $\varphi(x)$, se tiene

$$f(z) = \sum_0^\infty \frac{a_n}{z^{n+1}}$$

(1) Véase: S. PINCHERLE, *Lezioni di Calcolo Infinitesimale*, p. 446.
(2) Véase Cap. I, pág. 2; G. DOETSCH, obra citada, p. 64.

donde

$$a_n = -\int_0^1 x^n \varphi(x)\, dx,$$

y la serie converge en el exterior del círculo de centro en 0 y radio 1. Como es bien conocido, la $f(z)$ tiene por generatriz $\varphi(t)$ la función entera de tipo exponencial [1]

$$\varphi(t) = \sum_0^\infty \frac{(-1)^n a_n t^n}{n!}$$

y, por tanto, la expresión de $f(z)$ mediante la $\varphi(t)$ es

$$f(z) = \int_0^{\theta\ \infty} \varphi(t)\, e^{-tz}\, dt$$

donde la integral se toma sobre el rayo de origen 0 y argumento θ. El campo de convergencia de esta integral, es el semi-plano que contiene el rayo de origen 0 y argumento $(-\theta)$ y limitado por la recta tangente a la circunferencia de convergencia en el punto de intercepción con este último rayo.

Al variar θ se tiene la prolongación analítica de la $f(z)$, en todo punto exterior a su círculo de convergencia.

30. Desarrollo en serie de facultad. — Consideremos la transformada (II)

$$f(z) = \int_0^1 \frac{\varphi(x)}{z-x}\, dx,$$

su núcleo $\dfrac{1}{z-x}$ se puede escribir en la forma

$$\frac{1}{z-x} = \frac{1}{z} + \frac{x}{z(z+1)} + \frac{x(x+1)\ldots(x+n-z)}{z(z+1)\ldots(z+n)} + \\ + \frac{x(x+1)\ldots(x+n)}{z(z+1)\ldots(z+n)} \cdot \frac{1}{z-x}$$

por tanto

$$f(z) = \sum_{v=0}^{n} \frac{1}{z(z+1)\ \ldots\ (z+0)} \int_0^1 x(x+1)\ldots(x+n-1)\, \varphi(x)\, dx + R_n$$

(1) Doetsch, obra citada, pág. 66.

donde

$$R_n = \frac{x(x+1)\dots(x+n)}{z(z+1)\dots(z+n)} \frac{\varphi(x)}{z-x} dx.$$

Pongamos

$$a_n = \int_0^1 x(x+1)\dots(x+n-1)\,\varphi(x)\,dx$$

es decir [1]

$$\boxed{a_n = \int_0^1 x^{(n}\,\varphi(x)\,dx} \qquad [2]$$

entonces resulta

$$f(z) = \sum_{\nu=0}^{n} \frac{a_\nu}{z(z+1)\dots(z+0)} + R_n$$

Para todo punto z del semiplano: $R(z) \geq 1 + \delta$ $(\delta < 0)$ se tiene:

$$|R_n| < \frac{M}{\delta} \prod_0^n \left| \frac{x+n}{z+n} \right|$$

donde M es el extremo superior de la función $\varphi(x)$ en $(0, 1)$. De aquí resulta

$$\lim_{n \to \infty} R_n = 0$$

y por tanto la determinante (H): $f(z)$ está representada por la serie de facultad

$$f(z) = \sum_0^\infty \frac{a_n}{z(z+1)\dots(z+n)} \qquad [3]$$

convergente en el semi-plano $R(z) > 1$, donde los coeficientes a_n están determinados por la generatriz (H) : $\varphi(x)$, mediante la relación [2]. De aquí resulta que: *dada la determinante* (H) $f(z)$, *de generatriz* (H) *igual a* $\varphi(x)$, *su desarrollo en serie de facultad, convergente en el semiplano* $R(z) > 1$ *queda perfectamente determinado por la* [3], *donde los coeficientes* a_n *se determinan con la* [2]. Se puede dar también para la determinante H, $f(z)$ un desarrollo en series de polinomios análogo al caso de la transformada (R).

(1) La solución de la igualdad [2] cuando se da la sucesión $\{a_n\}$, es decir la determinación de una función $\varphi(x)$, que verifique la [2] para $i = 0, 1, 2 \dots$ hemos denominado problema de los *momentos factoriales de Hausdorff*.

EL GRANITO Y LAS EFUSIONES BASÁLTICAS DEL EXTREMO AUSTRAL DE LAS SIERRAS DE CÓRDOBA

POR EL

Dr. VLADIMIR BORZACOV

(*Conclusión*)

LAS EFUSIONES BASALTICAS

Las efusiones basálticas de que vamos a ocuparnos en este capítulo, aparecen formando los cerros « La Leoncita », « La Madera », «La Garrapata », « El Fortín », « Las Piedras » y « La Pícara », cuya ubicación relativa y con respecto al extremo austral de la Sierra de Córdoba, puede apreciarse en el plano nº 2 adjunto.

Ellos emergen sobre la llanura Pampeana con formas suaves y redondeadas.

Todos son accesibles en caminos de regular estado desde la localidad de Chaján (F. C. P. Estación « Glorialdo Fernández »).

A continuación se describe cada cerro en particular y finalmente se harán consideraciones generales sobre la base de todas las observaciones reunidas.

El cerro « La Leoncita »

A medio kilómetro al norte de la localidad de Chaján, se levanta el pequeño cerro « La Leoncita » a unos 60 metros sobre la llanura Pampeana, que lo rodea y sobre la cual se halla dicha población a 505 metros sobre el nivel del mar.

El rumbo longitudinal del cerro es N. 75° O., teniendo una extensión de 150 metros y un ancho en la cumbre de 10 a 15 metros.

Las faldas no son abrutas y permiten un acceso fácil a la cumbre del cerro.

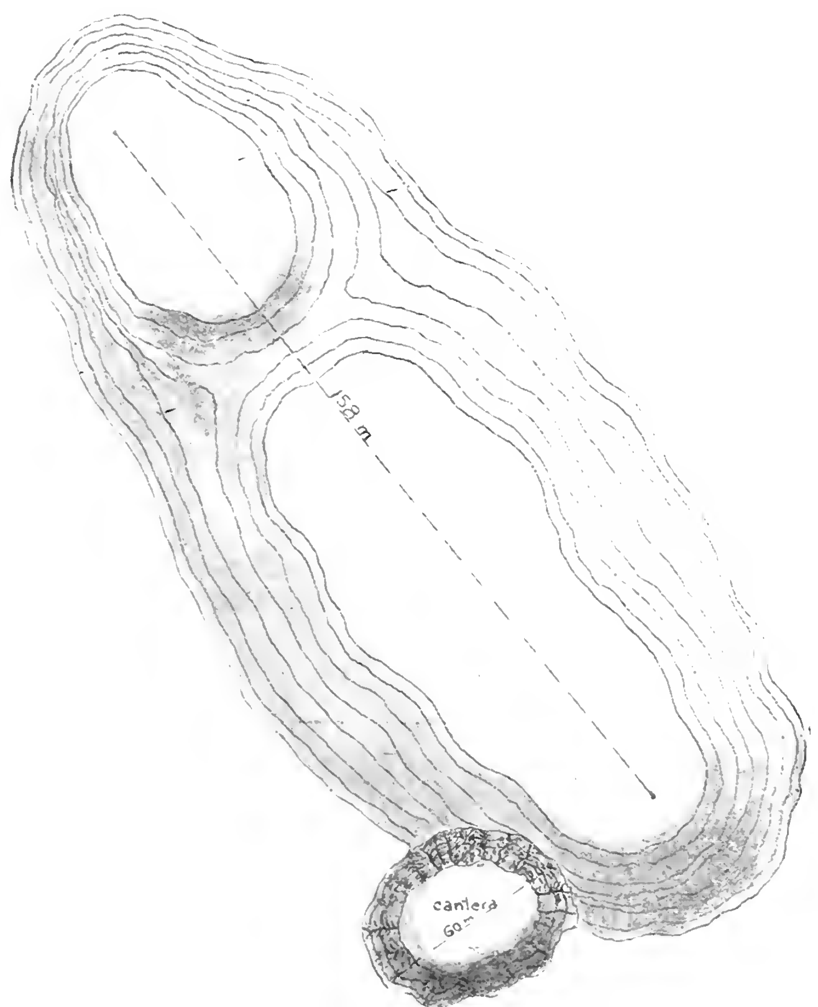


FIG. 13. - Croquis topográfico del cerro basáltico « La Leoncita ». Dpto. Río Cuarto Escala 1:1000

Una cantera abierta en el extremo S.O del cerro de forma circular y con un diámetro de 60 metros y que sirvió para la extracción de granito, permite conocer su constitución geológica hasta cierta profundidad.

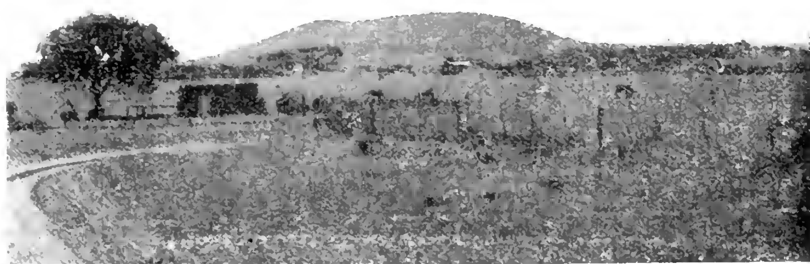


FIG. 14. - Vista del cerro basáltico « La Leoncita ». Chaján, F.C.P.

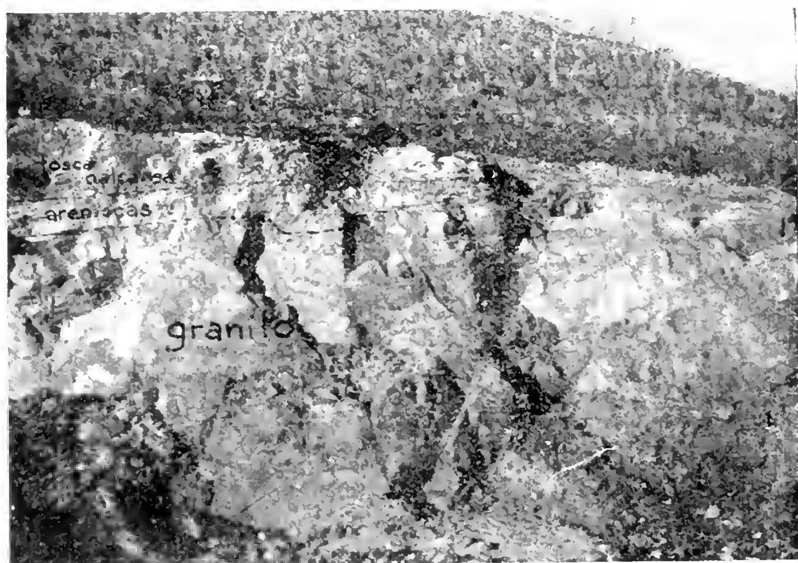


FIG. 15 - Cantera de granito al pie del cerro « La Leoncita »

LA CONSTITUCION DEL CERRO « LA LEONCITA »

El basalto nefelínico (1)

Microscópicamente este basalto es una roca negruzca con cierto tinte verdoso. La masa es muy compacta y en ella resaltan los fenocristales de *olivino*, transparente y verdoso, que pueden llegar a medir, en algunos casos, hasta medio centímetro.

En la superficie, la parte descompuesta es de un color pardo claro. En nuestro trabajo (2) : « Investigaciones sobre el magnetismo de los cerros « La Leoncita », « La Madera » y « La Garrapata », se consignan las determinaciones del fuerte magnetismo que manifiesta este basalto. Microscópicamente se advierten los siguientes componentes:

El *olivino*, aparece en individuos nítidamente contorneados. Es perfectamente incoloro y carece de pleocroísmo en las preparaciones. Está casi siempre parcialmente alterado en serpentina y la descomposición se ha realizado en el borde de los cristales y en las líneas de factura. Otras veces, la alteración ha consistido en la segregación de óxido de hierro.

Algunos cristales de olivino han sido transformados en un mineral de color anaranjado, con un pleocroísmo muy débil (iddingsita ?).

La *augita* es muy abundante en pequeñas agujas de color verde claro y de secciones muy nítidas.

(1) Esta roca ha sido minuciosamente descrita por G. Avé Lallemant, « Estudios micromineralógicos hechos en las rocas de la provincia de San Luis (República Argentina)». Actas de la Academia Nacional de Ciencias de Córdoba. Tomo I, 1875.

Referencias de este basalto se encuentran también en los siguientes trabajos del Dr. G. Bodenbender:

1. « La Sierra de Córdoba ». Anales del Ministerio de Agricultura, Sec. Geología, Mineralogía y Minería. Tomo I, Nº II, págs. 66, 136 y 136.
2. « Petrografía ». Anales del Ministerio de Agricultura id. id. Tomo II, Nº 3. Buenos Aires, 1907, págs. 14 y 15.
3. « Triásico y Terciario en la Falda Oriental de la Sierra de Córdoba ». Boletín de la Acad. Nac. de Ciencias. Tomo XXXI, págs. 136 y 137. Córdoba 1929.

(2) *Revista del Museo Provincial de Ciencias Naturales de Córdoba*. Nº 2. Córdoba 1936.

El pleocroísmo es muy reducido y la extinción es de 45°.

Las pequeñas varillas de este mineral forman una red muy cerrada dentro de la cual están alojados los individuos de *nefelino* que ha debido adaptar sus contornos al espacio que le dejaban libre aquellas.

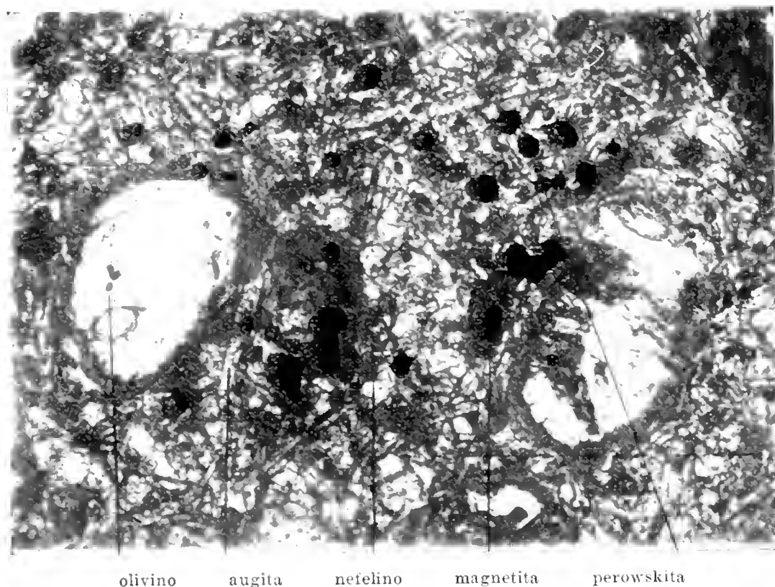


FIG. 16. - Microfotografía del basalto de cerro « La Leoncita ». (40 aumentos)

La proporción de ese mineral es muy inferior a la de la augita. Son frecuentes las maclas de dos individuos.

La *magnetita* es un componente abundante y pueden distinguirse secciones cúbicas y octaédricas de tamayo muy variable. La *perowskita* se muestra en granos isométricos de color gris parduzco. La distribución de ambos minerales es muy irregular. Algo de vidrio intersticial también se ha advertido.

La textura de la pasta es algo fluidal lo que se advierte mejor alrededor de los cristales de olivino.

Las labores de la cantera de « La Leoncita », han revelado la existencia de depósitos sedimentarios de interpretación estratigráfica muy dudosa, por la ausencia de otras formaciones sedimentarias con las cuales se las pueden relacionar y por la falta de fósiles.

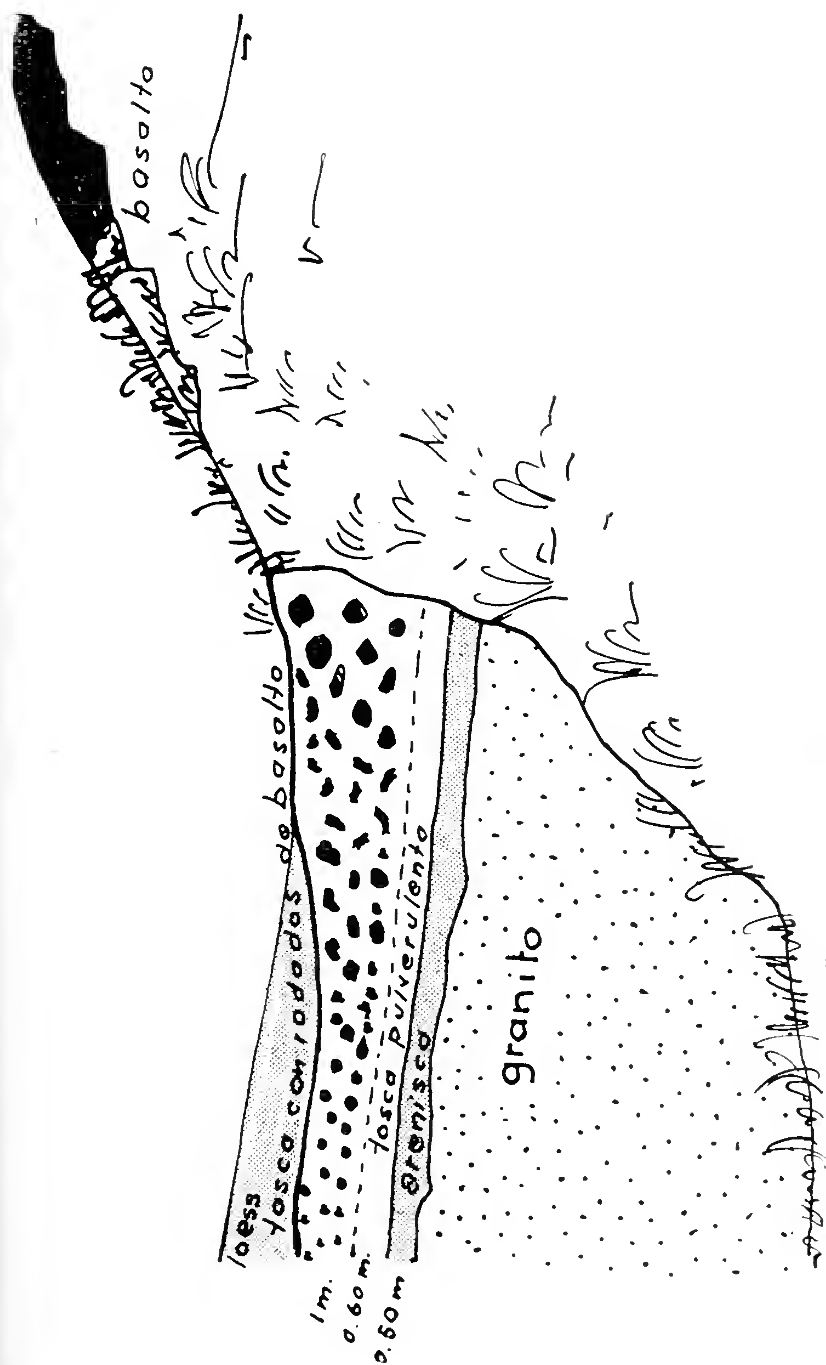


Fig. 17. – Corte a través de la cantera de « La Leoncita »

De arriba tenemos (véase figura 17).

1. Superficialmente hay una capa de tosca dura y compacta, de color gris claro, compuesta de carbonato de calcio y una cierta proporción de arcilla.

Contiene rodados de basalto lo que le comunica el aspecto de un conglomerado.

2. Continúa una capa de tosca pulverulenta blanquecina, sin rodados.

3. Entre esta tosca y el granito existe un banco de un espesor de medio metro constituído por una arenisca compuesta por abundantes hojas de mica, granos de cuarzo y feldespato, ligados por un cemento calcáreo — ferruginoso de color rojo — pardusco.

Se trata de una roca deleznable que se deja disgregar entre los dedos.

Su composición y aspecto hace muy probable que pertenezca al terciario moderno.

Lamentablemente las labores de la cantera no han llegado al punto en que debe haber un contacto entre esta arenisca y el basalto firme, circunstancia que no permite conocer la diferencia de edad relativa entre ambas rocas [1].

En la falda del cerro, estos depósitos desaparecen debjo del loes.

El cerro « La Madera »

Este cerro se eleva a unos doce kilómetros y medio al sud del cerro « La Leoncita ». Su altura máxima sobre la llanura que lo circunda es de unos 80 metros.

Un relevamiento topográfico ha revelado que el cerro « La Madera », tiene la forma representada en la figura 18.

Como puede verse en ella la efusión basáltica ha adoptado la forma de una herradura, dentro de la cual puede reconocerse que aquella se ha realizado de acuerdo a los siguientes rumbos:

1ª parte .... N.75° O.
2ª parte .... N. 15° E.
3ª parte .... N 75° O.
4ª parte .... N. S.

[1] A. Stelzner, menciona de que al pie del cerro andesítico Poca (Dptos. Pocho y Minas do Córdoba) existen « Areniscas amarillas y coloradas alternadas con tobas volcánicas » a las que atribuye edad terciaria. R. Beder, considera a esas areniscas como correspondientes a los estratos calchaqueños (terciario moderno).

Véase G. Bodenbender: Triásico y Terciario en la Falda Oriental de la Sierra de Córdoba, etc. etc., págs. 137 a 139.

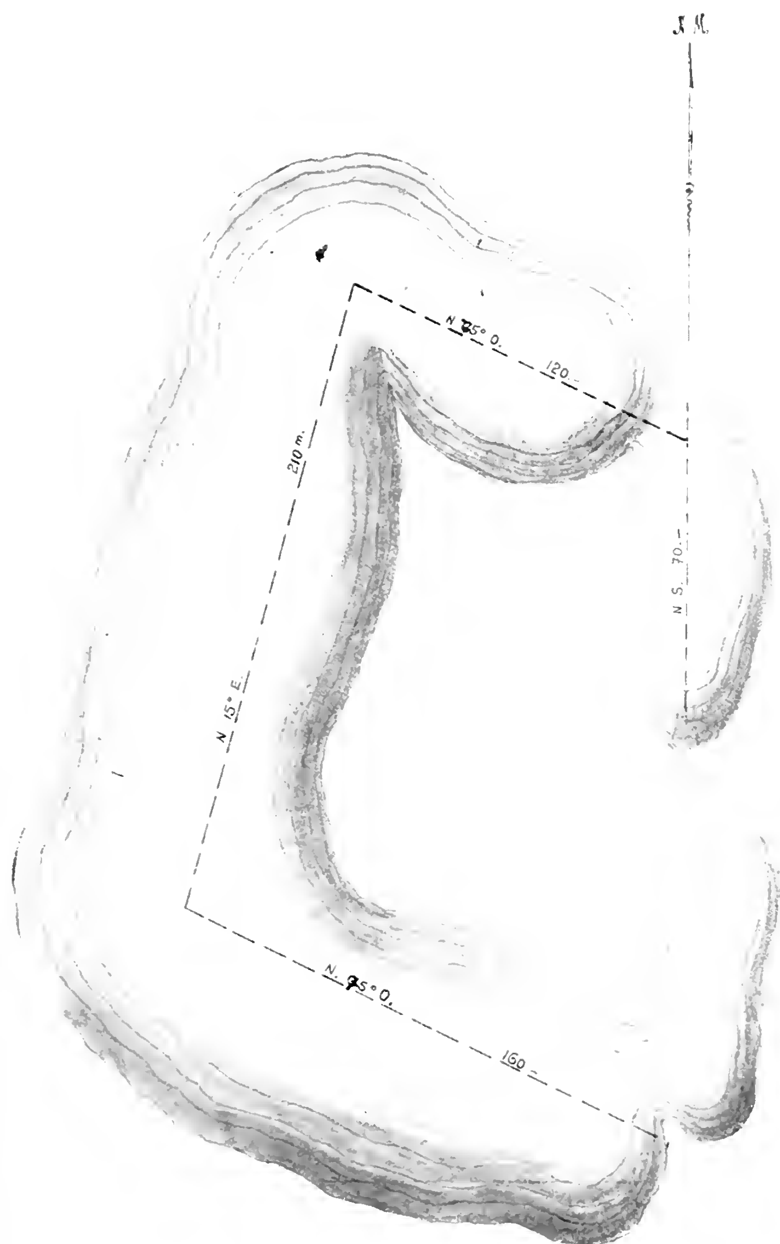


Fig. 18. - Croquis topográfico del cerro basáltico « La Madera ». Dept. Río Cuarto
Escala 1:2000

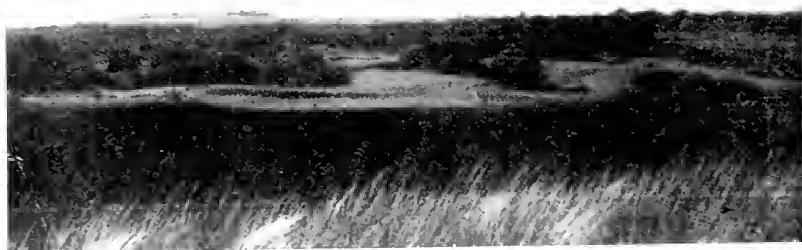


Fig. 19. - Vista del cerro « La Madera »



Fig. 20. - Vista del cerrito basáltico « El Fortín »

Más adelante veremos la correspondencia que existen entre estos rumbos y los de las diaclasas del granito de la cantera de « La Leoncita ».

El fundamento del cerro « La Madera », está constituído por el mismo granito de « La eLoncita », según lo comprueba el hecho de que en varias partes se han encontrado fragmentos de aquella roca dentro del basalto. Igualmente se ha observado la tosca calcárea que cementa rodados de basalto.



FIG. 19 a - Cerro « La Madera »

Otras observaciones no pudieron hacerse por falta de labores que permitan conocer el interior del cerro.

El basalto nefelínico de este cerro, muestra la misma composición que el de « La Leoncita ». Las diferencias consisten en que aquí los individuos de nefelino adquieren un tamaño mayor y tienen la tendencia a asociarse. Los individuos de olivino son más pequeños en « La Madera », pero existen en mayor número.

El cerro « La Garrapata »

Este cerro se encuentra ubicado en dirección S.O. y a veinticinco kilómetros de « La Leoncita », dentro del territorio de la Provincia de San Luis y muy aproximadamente al límite de la Provincia de Córdoba.

Se trata igualmente de una elevación chata que llega a una altura máxima de 120 metros sobre la llanura.

La efusión ha producido tres cuerpos aislados cuya posición es la siguiente (véase croquis topográfico adjunto, figura 21).

1ª parte .... N. 45° E.
sigue una depresión de 150 metros de largo.
2ª parte .... E. O.
sigue una depresión de 100 metros de largo.
3ª parte, es un cuerpo de forma cónica sin rumbo determinado.

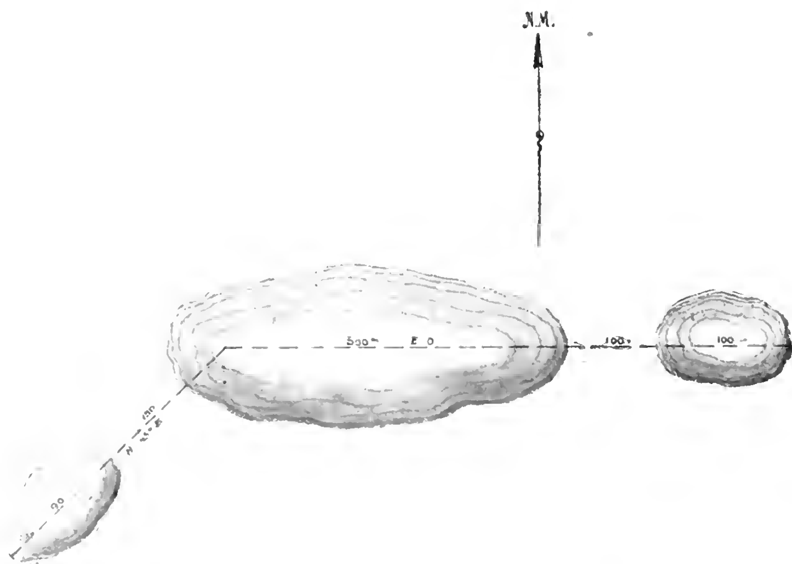


Fig. 21. - Croquis topográfico del cerro basáltico « La Garrapata ». Dept. Río Cuarto
Escala 1:5000

La falta de labores no permite conocer la constitución interna del cerro, pero puede deducirse que ha de ser análoga a la de « La Leoncita », pues incluídos dentro del basalto se han encontrado fragmentos del granito conocido de este último cerro.



FIG. 20 a - Cerro « La Garrapata »



FIG. 24. - Vista de la superficie del basalto en el cerro « La Garrapata » mostrando la separación concéntrica y la textura fluidal.

En las faldas del cerro se encuentran también los conglomerados de tosca calcárea con rodados de basalto.

El basalto nefelínico no muestra diferencias con respecto del de « La Leoncita ».

En algunas partes se nota un fenómeno particular en el basalto y especialmente en la parte nº 1 del cerro.

El basalto muestra una textura marcadamente fluidal y en partes llega a una separación concéntrica.

Normalmente a los círculos existen planos de separación orientados convergentemente hacia el centro de aquellos.

Al N.E. del cerro y a unos 600 metros de distancia, se abrió un pozo para la obtención de agua.

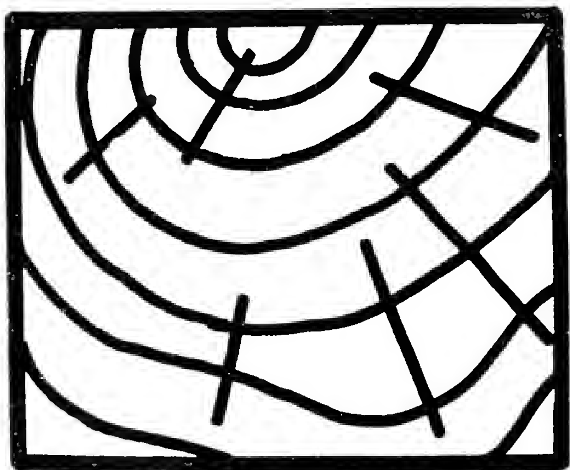


FIG. 25. – Esquema correspondiente a la fotografía de la Fig. 24

Dicho pozo tiene una profundidad de treinta metros y no dió con la roca viva.

Como efusiones menores del basalto, deben considerarse las dos pequeñas ondulaciones del terreno, conocidas con el nombre de « El Fortín » y « Las Piedras ».

El pequeño cerrito « El Fortín », no había sido señalado antes de la presente investigación y consiste en una ligera ondulación cuya altura máxima llega a 12 metros.

Sobre ella se construyó a mediados del siglo pasado una fortificación destinada a la defensa contra las invasiones de los indios.

No se observa el basalto como roca firme pero sí la tosca con fragmentos de esa roca.

En la construcción de la fortificación, se emplearon fragmentos mayores de basalto, que fueron extraídos al abrirse los cimientos.

El cerrito « El Fortín », se encuentra casi sobre la línea de unión entre los cerros « La Madera » y « La Garrapata » y a una distancia de 6 kilómetros del primero.

A unos ocho kilómetros al S.O. de « La Leoncita » y sobre la línea de unión de este cerro con el de « La Garrapata », existe una pequeña elevación — menos importante aún que « El Fortín » — constituída por basalto y que es conocida con el nombre de « Cerrito de Las Piedras », o « La Pícara ».

Recapitularemos ahora las observaciones relativas a la posición y orientación de los cuerpos efusivos de los cerros basálticos.

Compararemos los rumbos de dichos cuerpos con los rumbos de las diaclasas del granito que les sirve de base:

Diaclasas del granito	CERROS		
	« La Leoncita »	« La Madera »	« La Garrapata »
N. S.	—	N. S.	—
N. 15° E.	—	N 15° E.	—
N. 50° E.	—	—	N. 45° E.
E. O.	—	—	E. O.
N. 50° O.	—	—	—
N. 75° O.	N. 75° O.	N. 75° O.	—

De esta estrecha concordancia — representada gráficamente en la Fig. 28 — deducimos que las efusiones del basalto han atravesado el granito, aprovechando las diaclasas que atraviesan a éste.

En cuanto a la ubicación relativo de los diversos cerros pueden hacerse las siguientes observaciones:

Los cerros « La Garrapta », « Las Piedras » y « La Leoncita », se encuentran sobre una línea que prolongada coincide con la dislocación que divide las areniscas de Cerro Suco y de las canteras de Sampacho.

La circunstancia de encontrarse toda la región cubierta por un

espeso manto de sedimientos modernos impide hacer otras deducciones sobre el mecanismo de las erupciones basálticas.

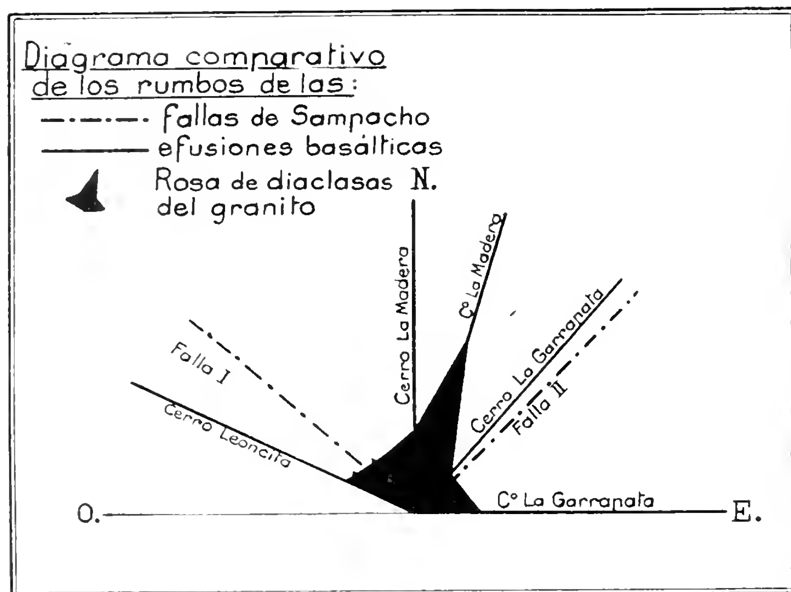


Fig. 26

Es imposible saber si la salida del basalto ha producido abovedamientos del fundamento, semejantes a los observados en « El Mo-Morro » de San Luis.

Es muy sugestivo el hecho de que los pozos de agua existentes al lado de algunos de los cerros (« La Leoncita » y « La Garrapta ») y que llegan hasta treinta metros de profundidad, no hayan dado con la roca viva.

No se puede decir si la desaparición del granito en esos puntos se debe a la deudación o si a la inversa los afloramientos del granito en los puntos de erupción se deben a que han sido empujados por la presión de la roca efusiva, ascendente, elevándolos sobre el nivel del granito de la llanura que se extiende entre los cerros.

LA TECTONICA TERCIARIA

Trataremos ahora de ubicar cronológicamente al sistema de dislccaciones N. O. - S. E. y N. E. - S. O., que se hace presente en la región de las areniscas de Sampacho y con el cual están relacionadas, como lo hemos visto, las efusiones basálticas consideradas anteriormente.

Para ello, recordaremos nuestros conocimientos acerca de los procesos orogénicos ocurridos en nuestro territorio a partir del cretácico, en la que tuvo comienzo una gran fase orogénica que continuó durante el terciario y el pleistoceno y que se hace visible en la cordillera andina, en las sierras pampeanas y en las sierras bonaerenses (1).

La segunda fase de los movimientos terciarios en el área de nuestro país, tuvo su mayor exponente en el proceso de desaparición del antiguo continente basiloetiópico.

Esa destrucción está ligada a procesos que revelan la estructura de bloques del área continental.

La elevación del área de las sierras bonaerenses, arrasadas durante la era mesozóica, es debida a que sufrieron un movimiento ascendente mientras que otros elementos se movieron en sentido opusto, es decir, descendente.

Así se hundió un área desde la boca del Río de la Plata hasta el pié de las sierras de Catamarca y hasta más al sur de la sierra de San Luis.

En esa área penetró por la boca del Río de la Plata, el mar de la formación entrerriana.

Como ya lo señaló el Dr. A. Windausen (2), el suelo argentino muestra en sus particularidades orográficas e hidrográficas, un sistema de diaclasas que corresponden a aquel proceso de destrucción de la Arquelenis.

Ese sistema se pone de manifiesto con toda evidencia en la planicie costanera del norte de la Patagonia y las perforaciones realizadas en la llanura pampeana y que tocaron el zócalo cristalino, revelan igualmente la existencia de fallas que muestran una correspondencia de orientación con aquel sistema de diaclasas.

(1) A. Windhausen. « Geología Argentina ». Segunda parte. Buenos Aires, 1931. Pág. 416.

(2) A. Windhausen. « Rasgos de la Historia Geológica de la Planicie Costanera de la Patagonia Septentrional ». Boletín de la Academia Nacional de Ciencias. Tomo XXIII. Año 1918. Pág. 15.

Aquí en el zócalo cristalino cubierto por la llanura pampeana que se extiende hacia el Este y hacia el Sud de la Sierra de Córdoba, se ha comprobado la existencia de grandes líneas de dislocación de rumbo meridional o submeridional y otras de rumbo N.O. - S.E., es decir, en la misma dirección de la Sierra de la Ventana.

Ella hizo pensar a Stappenbeck en la existencia de una interferencia de los dos sistemas de montañas.

En el cruce de las líneas de los sistemas, habría una tendencia ascendente del antiguo terreno, es decir, un afloramiento.

E. Gerth, ha señalado la existencia de hundimientos transversales de rumbo N.O. - S.E., en el extremo austral de la Sierra de San Luis y a las que se debe la desaparición de las rocas cristalinas ([1]).

La depresión ocupada por el Dique del Potrero, es uno de esos hundimientos en las rocas cristalinas, lo mismo que el Bajo del Portezuelo y el de Chorrillos, que atraviesan toda la Sierra.

Esas fosas están rellenadas con capas terciarias. Según Getrh, las interrupciones en las prolongaciones de la misma Sierra de San Luis, más al Sud, son debidas a hundimientos análogos.

Relacionado a esos procesos orogénicos, se exteriorizó un vulcanismo cuyas efusiones se produjeron en diversas partes del sistema de las Sierras Pampeanas (San Luis y Córdoba).

Por los trabajos de E. Gerth ([2]) y F. Pastore ([3]), conocemos la disposición de las efusiones andesíticas de la Sierra de San Luis.

Así dice Gerth: « Hay tres centros de erupciones (Cº Tomolasta, Cº Tiporco, Sierra del Morro,) situados en una línea que cruza la Sierra con rumbo N.O. - S.E.

El primero, en el medio de la montaña es el más extendido; pertenecen a él los cerros de La Carolina, una fila de erupciones andesíticas, que han seguido fallas de rumbo N. - S. ».

Comparando las líneas tectónicas en la parte ausral de las Sierras de Córdoba y San Luis, de acuerdo al mapa geológico de la Prov. de San Luis, construida por E. Gerth, con los rumbos de las líneas de diaclasas, señalados por A. Windhausen, y con las

([1]) 7. GERTH. « Constitución Geológica, Hidrogeológica y Minerales de Aplicación de la Prov. de San Luis ». Anales del Ministerio de Agricultura. Sección Geológica. Mineralogía y Minería. Tomo X, Nº 2. Año 1914, págs. 28 y 33.

([2]) E. GERTH. Op. cit. pág. 28.

([3]) F. PASTORE. « Estudio geológico y petrográfico de la Sierra Del Morro, Prov. de San Luis ». Anales del Min. de Agricultura, Sec. Geología, etc. Tomo XI, Nº 3. Buenos Aires, 1915.

líneas de dislocaciones, que atraviesan la región de Sampacho y que están en la relación con las efusiones basálticas, encontramos que la concordancia entre todos esos rumbos es sorprendente y ella nos sirve de fundamento para sincronizar esas líneas tectónicas y atribuirlas a la segunda fase orogénica del terciario, de acuerdo a las razones expresadas anteriormente.

Como también queda dicho, esas líneas tectónicas pertenecen al sistema de las Sierras Bonaerenses.

Si ahora consideramos las líneas de dislocación de rumbo N. - S., que han dividido la Sierra de Córdoba dándole su estructura actual y a la que corresponde la falla que limita por el O., la Sierra de Comechingones, estamos en presencia de una interferencia de los dos sistemas tectónicos (Sierras Bonaerenses y Sierras Pampeanas) que se evidencia en el extremo austral de las Sierras de Córdoba y San Luis.

Esa interferencia ya había sido supuesta, como se dijo anteriormente, por R. Stappenbeck (1), sobre la base de las revelaciones de las perforaciones profundas hechas en la llanura Pampeana, al E. y al S. de la Sierra de Córdoba.

La edad de las diaclasas del granito

Estamos ahora en condiciones de ensayar una clasificación cronológica de los diversos sistemas de diaclasas reconocidos en el granito de « La Leoncita », cerros « Blanco » y « Negro » y « Las Achiras ».

1º Par

N. 15° E. diaclasas « S » primarias
N. 75° O. diaclasas « Q » primarias.

Este par corresponde por su orientación a la textura del granito y en consecuencia debe ser considerado como « primario », es decir, de edad paleozoica.

2º Par

N. 50° E. diaclasas « S » secundarias
N. 50° O. diaclasas « Q » secundarias.

(1) R. Stappenbeck. « Geologie und Grundwasserkunde der Pampa, Stuttgart, 1926, páginas 19 a 30.

Este par coincide con el sistema de fallas que hemos considerado como correspondiente a la 2ª fase orogénica del terciario.

3º Par

N. S. diaclasas « S » secundarias
E. O. diaclasas « Q » secundarias.

Este par corresponde al sistema de la Sierra de Córdoba (3ª fase orogénica del terciario).

LA POSICION GEOLOGICA DE LAS EFUSIONES BASALTICAS DEL EXTREMO AUSTRAL DE LA SIERRA DE CORDOBA

Vamos a ensayar de determinar la edad geológica de las erupciones basálticas de los cerros « La Leoncita », « La Madera » y « La Garrapata ».

Contamos con los siguientes elementos de juicio:

1. Las efusiones basálticas se han realizado a través de las diaclasas del granito y que como hemos visto, corresponden las « primarias » al paleozoico y las « secundarias » a las fases segunda y tercera del terciario.

2. Las erupciones andesíticas de la Sierra de San Iuis (cerros Tomolosta, Tiporco y El Morro), se han producido según líneas N. - S., sobre la falla de rumbo N.O. - S.E. que atraviesa dicha Sierra.

Según las investigaciones de E. Gerth (1), esa actividad volcánica, tuvo lugar durante el terciario superior.

Existen analogías marcadas entre los dos centros volcánicos. El cerro « La Garrapata », se encuentra sobre el cruce de dos líneas: la línea N.S. del sistema de la Sierra de Córdoba, que limita por el oeste la Sierra de Comechingones y la N.E. - S.O. de la falla II de Sampacho (véase Mapa adjunto nº 2).

La circunstancia de encontrarse el subsuelo de la región cubierto de sedimentos Pampeanos, impide comprobar si en los cerros « Las Piedras » y « La Leoncita », situados sobre esa falla, hay también fallas N.S.

(1) E. Gerth. « El Morro de San Luis ». Boletín de la Academia Nacional de Ciencias en Córdoba. Tomo XXX, pág. 175, año 1927.

Tampoco es posible decir si el cerro « La Madera », se encuentra sobre un cruce semejante.

La circunstancia de haber intervenido en las efusiones basálticas en cuestión las líneas tectónicas que atraviesan la región, correspondientes a la segunda y tercera fases orogénicas del terciario y las diaclasas del granito, que pertenecen a las mismas, apoyan la idea de que *dichas efusiones se han producido durante la tercera fase orogénica del terciario.*

RESUMEN

1º En el extremo austral de la Sierra de Córdoba, en la región de las efusiones basálticas de los cerros « La Leoncita », « La Madera », « La Garrapata », « El Fortín » y « Las Piedras », aparecen los siguientes elementos geológicos de antigüedad decreciente:

esquistos cristalinos (gneis)	arcaico-precámbrico.
granito	paleozóico
areniscas	pérmicas?
basalto	terciario
areniscas?	
toscas calcáreas	
loes pampeano.	

2º La investigación de la tectónica del granito de la región ha revelado la existencia de tres sistemas de diaclasas:

1º par	N. 15° E.	« diaclasas primarias » porque coinciden.
	N. 75° O.	con la textura del granito.
2º par	N. 50° E.	« diaclasas secundarias » que coinciden.
	N. 50° O.	con las fallas de Sampacho, producidas probablemente durante la 2ª fase orogénica del terciario.
3º par	N. S.	coinciden con las líneas tectónicas más modernas de la Sierra de Córdoba (3ª fase orogénica del terciario).

3º Los cerros « La Leoncita », « La Madera », « La Garrapata », « El Fortín » y « Las Piedras », están constituídos por un basalto nefelínico.

Sus efusiones se han hecho según líneas que coinciden con los rumbos de diaclasas del granito correspondientes a los tres pares indicados.

De allí se deduce que las diaclasas han sido aprovechadas para la salida de la roca basáltica.

4º La circunstancia de que las efusiones basálticas han utilizado las diaclasas más modernas para surgir, y las analogías entre ellas y las efusiones andesíticas de la Sierra de San Luis, llevan a al conclusión de que se produjeron durante el terciario moderno.

TARIFAS FERROVIARIAS DE UTILIDAD MAXIMA

POR EL

Ing. EMILIO REBUELTO

I. — GENERALIDADES

La fijación de las tarifas ferroviarias, de modo tal que se obtenga con ellas un máximo de utilidad, constituye un interesante problema de economía ferroviaria, objeto ya, desde larga fecha, de numerosos estudios. Iniciadas estas investigaciones por los analistas belgas, pronto se creó toda una teoría — hoy clásica, — mediante la cual, Launhardt obtuvo, hace más de medio siglo, interesantes resultados fundamentales.

Recordaremos que Guillermo Launhardt, ilustre director de la Escuela Politécnica de Hannover, expuso los resultados de sus estudios en una obra que sobre el *Trazado de los ferrocarriles*, desde el punto de vista comercial, publicó en 1887. Muchos años después se tradujo al italiano, pero antes lo fué al español, en una versión libre de sus principales capítulos, publicada precisamente en los *Anales de la Sociedad Científica Argentina*, tomo XXXIX, 1er. semestre de 1895, págs. 5 a 76 y siguientes. El autor de esta versión española fué el ingeniero Alberto Schneidewind, quien desarrolló después estas teorías en sucesivas publicaciones, y en sus conferencias de clase como profesor de Ferrocarriles en la Facultad de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales de Buenos Aires.

Los estudios de Launhardt y de su escuela, han sido, pues, conocidos y vulgarizados desde muy antiguo entre nosotros, no sólo por la acción de Schneidewind, sino también por los comentarios y aplicaciones que de ellos han hecho los ingenieros González Roura, Labarthe y Nogués entre otros.

Pero no creo que ahora se recuerden suficientemente estos trabajos ni merezcan, en el momento actual, toda la importancia a que

son acreedores. He tenido ocasión de presenciar frecuentemente cómo los « expertos » en tarifas resuelven en numerosos casos cuestiones de esta índole, recurriendo a la ayuda de su experiencia — indiscutiblemente valiosa, — más que a la de su propio raciocinio; y aplicando en un sitio o en un caso lo que hicieron o vieron hacer con buen resultado en otro, sin detenerse a verificar antes la igualdad o semejanza de ambientes, circunstancias y características que son indispensables para asegurar el éxito de semejantes trasplantes de tarifas. Y si precauciones de esta clase han sido siempre necesarias, lo son más todavía en los momentos actuales, cuando la industria de los trasportes por riel se halla en todo el mundo bajo los efectos de una intensa crisis, para salvarse de la cual es forzoso evitar cuidadosamente todo error, aguzar el ingenio e intensificar los trabajos de investigación y análisis en varias direcciones.

Una de ellas es la de estudiar lo más profundamente que sea posible — y, por lo tanto, no sólo con los métodos económicos y estadísticos, sino con los matemáticos, — la determinación de los precios del transporte o tarifas, tratando de fijarlas de modo que procuren a la empresa transportadora una utilidad máxima, lo que no es tan fácil ni tan concreto como pueda aparecer a primera vista. Obsérvese, por de pronto, que las tarifas *más caras* pueden no ser las que aportan los *mayores productos* o entradas brutas, pues el mayor precio influye naturalmente en la disminución del volumen transportado, originando mermas en el monto de las sumas a cobrar. Por su parte, las que proporcionan los mayores productos, tal vez no permitan obtener la *máxima utilidad* o ganancia, pues a partir de cierta longitud para el transporte, los gastos pueden crecer con más rapidez que los productos; y las tarifas de máxima utilidad, no siempre van a darnos el *coeficiente de explotación más favorable*, pues aquélla resulta de la diferencia entre productos y gastos, y éste del cociente de gastos y productos; y las de mejor coeficiente de explotación, tampoco aseguran el *más alto interés* al capital, pues una mayor inversión, obligada por un incremento de tráfico, puede muy bien procurar un aumento en las ganancias de menor monto que el correspondiente al interés del nuevo capital, rebajando en consecuencia el interés medio resultante para la totalidad del negocio.

Y esto no es todo; porque la máxima utilidad obtenida con un tráfico, puede serlo a expensas de otro, en cuyo caso es preferible contentarse con no llegar al máximo en el primer tráfico y plantear el problema de modo que nos conduzca a encontrar el máximo de la suma de los dos. También debe tenerse en cuenta que la relación

entre la utilidad obtenida por la Empresa y el valor total de las mercaderías transportadas, o la extensión de las superficies cultivables (en el caso de tratarse de tarifas de productos agrícolas, etc.), o de las ganancias que por su parte obtengan los productores (o los consumidores de las cargas que transporta el ferrocarril, etc.) son factores muy dignos de tenerse en cuenta: porque si una tarifa ferroviaria le produce a la empresa una utilidad máxima en un año — o en un intervalo de tiempo dado, — pero a condición de agotar económicamente la zona, no es aconsejable el adoptarla. Esta consideración del « tiempo » en los cálculos económicos es un detalle casi siempre descuidado, a pesar de su innegable importancia.

La complejidad del problema implicado por la fijación de las tarifas ferroviarias es, pues, lo suficientemente grande, para que sea difícil abarcar todas las relaciones existentes entre las causas y efectos que en ellas actúan, sin más auxilio que los raciocinios a base exclusiva de palabras y los tanteos de cálculos aritméticos, por más numerosos que éstos sean; se hace forzoso tomar como guía, la expresión abreviada y sintética que suministran las fórmulas matemáticas, efectuando, claro está, la más cuidadosa discusión de los resultados teóricos, para corregirlos y complementarlos con las informaciones de la experiencia; pues siempre será la práctica bien interpretada, la que debe decir la última palabra.

En las páginas que siguen, recuerdo primeramente algunos conceptos fundamentales en la teoría clásica de las tarifas ferroviarias, y expongo después varios resultados que creo nuevos, así como diversas formas de comparar y combinar tarifas, de las que es fácil desprender conclusiones tan interesantes como de inmediata aplicación al actual medio ambiente argentino.

II. — FORMULAS FUNDAMENTALES

Todas nuestras consideraciones, las suponemos referidas al transporte de *una* sola clase de mercadería (o de un conjunto de mercaderías distintas pero poseyendo suficiente número de caracteres comunes para ser agrupadas en una misma clase); suponemos también que se trata de un transporte en sentido descendente, hacia la estación cabecera del ferrocarril, donde suponemos esté el mercado de consumo o el puerto de exportación de la mercadería transportada, hipótesis que corresponde a la realidad en el caso de los ferrocarriles que llegan a los puertos (Buenos Aires, Rosario, Santa Fe,

Bahía Blanca, etc.) desde las zonas cerealistas. Igualmente haremos la hipótesis de que la región atravesada por el ferrocarril es llana, uniforme, de igual capacidad de producción agrícola, sin accidentes geográficos que alteren su continuidad, interrumpiendo las comunicaciones transversales o radiales de acceso al ferrocarril (ríos, sierras), o estableciendo partes estériles (grandes salinas, bosques impenetrables, etc.). Precisamente, la extensa planicie de la « pampa » argentina, cumple bien estas condiciones, y en ella la realidad no se aleja mucho de las condiciones teóricas supuestas.

Sea P_v el precio de venta de la mercadería (supongamos, para fijar las ideas, que se trata de un cereal, trigo, maíz... o de un oleaginoso como el lino); y C_p el costo de producción, incluso la ganancia normal del capital invertido en la explotación agrícola correspondiente. Entonces, la diferencia $P_v - C_p$ es la cantidad de \$ m/n por tonelada, de que puede disponer el productor para gastar en el transporte de su mercadería, tanto en el efectuado por camino hasta la estación (transporte que podemos llamar transversal o radial), como por ferrocarril hasta el punto de venta, donde la mercadería, que valía C_p al empezar a moverse, adquiere la posibilidad de valer P_v. A esta diferencia de precios, $P_v - C_p$, se la acostumbra a llamar *coeficiente de transporte* o amplitud o capacidad de transporte. En lo sucesivo la representaremos por v.

Designemos con y a la ordenada de la curva que nos representa la tarifa a cobrar por el ferrocarril en \$ m/n para transportar una tonelada de carga a la distancia x; entonces y será una cierta función de x, de cuya forma prescindimos por ahora; si llamamos z a la ordenada (en kilómetros) de la curva que limita a ambos lados de la vía la *zona* de producción posible, o sea el lugar geométrico de los puntos más alejados del ferrocarril desde donde le es posible al productor traer cargas sin pérdida hasta la estación, que suponemos ubicada a la distancia x del mercado, tendremos que, siendo f el costo del transporte por caminos, en \$ m/n por ton-Km., se verificará, por definición, que

$$v = y + zf,$$

pues y es la tarifa, o lo que el productor va a gastar por el transporte en ferrocarril, y zf es el costo del transporte de z kilómetros por caminos, a razón de f \$ m/n el Km.; y la suma de estos dos gastos, será *menor* que v para puntos cercanos a la estación del ferrocarril e igual a v, tal como lo hemos escrito para las cargas provenientes

del límite extremo de la zona, a la distancia z. De la fórmula anterior sale

$$z = \frac{v - y}{f}$$

expresión con la cual es fácil calcular el ancho de la posible zona de influencia de un ferrocarril de acuerdo con la tarifa y que se aplique a una mercadería de coeficiente de transporte v en una zona donde el acarreo cuesta f. O también el valor de v que debe tener una mercadería producida en un punto dado para que su transporte sea posible; o la tarifa máxima que puede soportar la producción de un lugar determinado, etc. Como el objeto principal del presente trabajo no es el de resolver estos problemas, los dejaremos de lado.

Haremos una excepción observando que la influencia de las variaciones de f en el valor de z, es superior a la que tienen las de y. O sea, que muchos pretendidos problemas de tarifas ferroviarias se resuelven más fácilmente actuando sobre otros de los elementos que también intervienen en la cuestión. Los transportes automotores por caminos, que tan gran desarrollo están adquiriendo entre nosotros, pueden prestarse a solucionar muchas dificultades, si colaboran con los ferrocarriles, contribuyendo a abaratar el transporte.

El ejemplo siguiente muestra un aspecto de esta cuestión:

En los alrededores de cierta estación, se produce determinada mercadería cuyo coeficiente de transporte es 11 $ m/n, y a la cual la empresa del ferrocarril aplica una tarifa de 9 $ m/n. Los caminos de la zona, o los procedimientos de acarreo, se supone que son malos, por lo cual el costo respectivo es de 0,10 $ m/n por ton-Km. En estas condiciones la distancia máxima de la estación a la que puede producirse la mercadería es

$$\frac{11 - 9}{0{,}1} = 20 \text{ Km}$$

Se desea poder llegar a producirla hasta los 30 Km, para lo cual la empresa debería rebajar la tarifa a 8 $ m/n.

Supongamos que el tráfico total fuera de 10.000 ton. y que por haber aumentado el ancho de la zona en un 50 % (de 20 Km. a 30 Km.), el tráfico pudiera experimentar análogo incremento, llegando a 15.000 ton. que a la nueva tarifa de 8 $ m/n, darían 120.000 $ m/n.

A la empresa le conviene más invertir 10.000 $ m/n en el arreglo de los caminos de acceso a la estación, o en adquirir y poner a disposición de los productores elementos más eficientes que reduzcan el costo del transporte por camino a 0,07 $ m/n por ton-Km., y rebajar ella además la tarifa ferroviaria sólo a 8,90 $ m/n; el ancho de la zona de producción posible, sería, entonces, a cada lado de la vía, de

$$\frac{11 - 8{,}90}{0{,}07} = \frac{2{,}10}{0{,}07} = 30 \text{ Km.}$$

tal como se desea, habiéndose obtenido el resultado con la simple rebaja de diez centavos. En cuanto a la suma cobrada por la empresa va a alcanzar a

$$15.000 \times 8,90 = 133\,500 \ \$ \ m/n,$$

y aun descontando de aquí los 10.000 $ m/n empleados en mejorar el costo del transporte caminero, siempre queda un total superior al que se obtiene con la tarifa de 8 $ m/n.

Si no se hiciera ninguna rebaja, pero la empresa consiguiera organizar mejor el transporte caminero, gastando los 10.000 $ m/n supuestos, reduciendo el costo a 0,07 $ m/n, el ancho de la zona sería

$$\frac{11 - 9}{0,7} = \frac{2}{0,7} = 28,6 \text{ Km},$$

habiendo aumentado en un 43 %. Si el tráfico, supuesto de 10.000 toneladas, aumenta en la misma proporción, daría 38.700 $ m/n más. Quiere decirse que no sólo 10.000, sino 20.000 y hasta 30.000 $ m/n podría gastar la empresa ferroviaria, y aun saldría beneficiada, (respecto al total de productos), sin tener necesidad de rebajar sus tarifas.

Sea g el gasto en $ m/n que le irroga al ferrocarril el transporte de una ton-Km. de peso útil, valor que suponemos bien determinado para cada mercadería, según el aprovechamiento que hace del peso muerto del vagón, y de otras modalidades del transporte (a velocidad de tren expreso o a común de carga, vagón completo o en lotes, etc.); entonces gx es el gasto originado por el transporte a la distancia x; y como el ferrocarril cobra por ese servicio la tarifa y, le quedaría como ganancia o utilidad por tonelada transportada, la diferencia $y - gx$.

Para avaluar la utilidad total habrá que multiplicar esta diferencia, por el total de toneladas que constituyen el tráfico. Consideremos un elemento diferencial de vía, dx, y el área del rectángulo de zona que le corresponde a cada lado, zdx, lo que hace una área infinitesimal de $2\,zdx$. Llamando γ la producción en toneladas por Km. cuadrado, la expresión diferencial de la producción Q será

$$dQ = 2\,\gamma\,z\,dx = 2\,\gamma\,\frac{v - y}{f}\,dx$$

y la expresión diferencial de la utilidad de la Empresa, será

$$dU = (y - gx)\,dQ = 2\,\gamma\,\frac{(v - y)}{f}\,(y - gx)\,dx$$

de la cual obtendremos la utilidad total, por simple integración entre los límites relativos a las distancias propias de cada caso.

En general, se supone que v, γ y f son constantes a todo lo largo de la línea, de modo que su valor no está influenciado por el de x, lo cual simplifica mucho los cálculos. Por otra parte, esta hipótesis corresponde bien a la realidad, pues la constancia de v presupone la de P_v y la de C_p. O sea, que la mercadería producida en los diferentes puntos de la zona es de igual calidad y obtiene por lo tanto igual precio de venta; y que también el costo de su producción, en el que influye el valor de los arrendamientos, los jornales, el precio de las semillas, los gastos de recolección, etc. (si se trata de un cereal), es el mismo a diferentes distancias del mercado de venta o del puerto exportador, todo lo cual es muy aproximadamente cierto sobre grandes extensiones de la zona agrícola argentina. Lo mismo cabe decir de γ, o número de toneladas producidas por Km. cuadrado, que son sensiblemente constantes a través de centenares de kilómetros de terrenos geológicamente uniformes y con muy pocas variantes de lluvia, clima y temperaturas. Y lo mismo cabe decir de f, pues si la región es uniforme, lo es también en término medio el estado de los caminos, y por lo tanto el costo f del transporte a lo largo de ellos.

Pero si v, γ y f fueran variables, con igual o diferente ley; o si unos fueran constantes y otros variables; o si los constantes lo fueran sólo dentro de ciertos límites, adoptando fuera de ellos otro valor, constante o variable, no habría ningún inconveniente en considerarlo así en la fórmula, dejando bajo el signo integral las cantidades variables, o efectuando integraciones parciales o combinando ambos procedimientos. Todas las particularidades susceptibles de presentarse en la práctica, pueden ser tenidas en cuenta para hacer un buen estudio teórico.

Tomando el caso más sencillo, de que fueran constantes, e integrando, hasta la distancia x, resulta

$$U = \frac{2\gamma}{f}\int_0^x (y - gx)\,(v - y)\,dx$$

fórmula general con la que, como veremos en seguida, se resuelven numerosos problemas. En cuanto al límite superior de la integración, se elige generalmente el que resulta de igualar la tarifa y a los gastos de transporte, pues es evidente que la cantidad cobrada por el ferrocarril y, deberá ser mayor o a lo sumo igual a los gastos:

$$y \geq gx \quad \therefore \quad x \leq \frac{y}{g}.$$

Este valor de x lo llamaremos *distancia máxima de transporte* posible por ferrocarril, y es el que, como hemos dicho, se adopta frecuentemente como límite superior de la integración. Otras veces se fija teniendo en cuenta que la tarifa y, no puede ser mayor que la cantidad v de que dispone el productor para gastar en transporte, deduciendo de aquí el valor correspondiente de x, según la expresión en x que tenga y. También puede ser determinado según la longitud del ferrocarril, o la de la zona productora, o la ubicación de puntos de competencia, o de interferencia, o combinación con otras tarifas, etc.

Para seguir adelante en nuestro estudio, hay ahora que elegir una expresión para y, en función de la distancia x, o sea, determinar explícitamente la forma de la tarifa. Los tres tipos de estas expresiones más comúnmente usados, son:

El correspondiente a las *tarifas kilométricas*, en las cuales

$$y = ax;$$

El de las *tarifas terminales*,

$$y = mx + n;$$

Y el de las *tarifas parabólicas*,

$$y = K\sqrt{x}$$

Los valores de las constantes a, m, n y K, se determinan por condiciones de máximo. Es curioso observar que la famosa tarifa de máxima utilidad de Launhardt, puede deducirse inmediatamente, observando que para cualquier distancia x, lo que gana la empresa por tonelada transportada es $y - gx$; y como el número de toneladas transportadas es proporcional al ancho de la zona transversal o $v - y$, la utilidad total es proporcional al producto

$$(y - gx)\ (v - y)$$

Pero estos dos factores, ambos positivos, tienen, para cada x, una suma constante:

$$y - gx + v - y = v - gx.$$

Luego su producto (y, por lo tanto, la utilidad de la empresa) será máximo cuando ambos sean iguales,

$$y - gx = v - y$$

$$y = \frac{v + gx}{2}$$

que es, efectivamente, la ecuación de la tarifa de máxima utilidad encontrada por Launhardt, con raciocinios bastante más complicados, pues hacía intervenir el cálculo de variaciones y la resolución de la ecuación diferencial de Euler-Lagrange. (Ver *Teoría de las Tarifas*, por A. Schneidewind, en « Revista del Centro Estudiantes de Ingeniería », nº 195, Septiembre de 1918, 2ª ed., pág. 525).

La distancia máxima a la que podrá aplicarse, resultará de

$$x \leq \frac{y}{g} \quad \therefore \quad x \leq \frac{v + gx}{2\,g} \quad \therefore \quad x \leq \frac{v}{g}$$

Habiendo encontrado así el límite superior de la integración y la expresión de y, sustituyendo en la fórmula que nos daba U y operando, resultará sucesivamente

$$U = \frac{2\,\gamma}{f}\int_0^{\frac{v}{g}} \left(\frac{v + gx}{2} - gx\right)\left(v - \frac{v + gx}{2}\right) dx$$

$$= \frac{\gamma}{2\,f}\int_0^{\frac{v}{g}} (v - gx)^2\, dx = \frac{\gamma}{6\,fg}\Big[(gx - v)^3\Big]_0^{\frac{v}{g}}$$

$$= \frac{\gamma\, v^3}{6\,fg} = 0{,}166\,\frac{\gamma\, v^3}{fg}$$

Esta es la utilidad máxima que puede aportarle a una empresa la implantación de una *tarifa terminal*, dentro de las hipótesis hechas.

Para determinar el valor de a correspondiente a la tarifa *kilométrica* de la forma $y = ax$, sustituiremos el valor de y en la expresión de U, dejando por ahora indeterminado el límite superior de la integral: tendremos

$$U = \frac{2\,\gamma}{f}\int_0^{x} (ax - gx)\,(v - ax)\, dx$$

$$= \frac{2\,\gamma\,(a - g)}{f}\int_0^{x} x\,(v - ax)\, dx$$

$$= \frac{2\,\gamma\,(a - g)}{f}\left[\frac{vx^2}{2} - \frac{ax^3}{3}\right]_0^{x}$$

El valor máximo de x, lo determinaremos por la condición de que

la tarifa, ax, debe ser menor, o a lo sumo igual a la cantidad v de que dispone el productor para gastar en transportes, o sea

$$v \geq ax \quad \therefore \quad x \leq \frac{v}{a}$$

Sustituyendo este valor límite, queda

$$U = \frac{2\gamma(a-g)}{f}\left[\frac{v^3}{2a^2} - \frac{v^3}{3a^2}\right]$$

$$= \frac{\gamma v^3}{3f} \cdot \frac{a-g}{a^2}$$

El primer factor es constante; el segundo, depende de a, y podemos buscar entonces un valor de a que haga máxima a U. Derivando dos veces a U con respecto a a,

$$\frac{dU}{da} = \frac{\gamma v^3 (2g-a)}{3fa^3}$$

$$\frac{d^2U}{da^2} = \frac{2\gamma v^3(a-3g)}{3fa^4}$$

Igualando a cero la primera derivada, resulta

$$a = 2g$$

valor de a que hace negativa a la derivada segunda; luego se trata en realidad de un máximo. La tarifa respectiva será

$$y = 2gx$$

La distancia máxima de aplicación, resulta

$$x = \frac{v}{a} = \frac{v}{2g}$$

y la utilidad que proporciona a la empresa, de acuerdo al valor encontrado para a, es:

$$U = \frac{\gamma v^3}{3f}\frac{2g-g}{4g^2} = \frac{\gamma v^3}{12} = 0{,}083\frac{\gamma v^3}{fg}$$

Esta es la utilidad máxima que puede aportarle a una empresa la implantación de una *tarifa kilométrica*, dentro de las hipótesis hechas. Como se ve, es justamente *la mitad* de la obtenida con la

tarifa terminal, lo que justifica la tendencia de las empresas a adoptar, siempre que pueden, el tipo de tarifas terminales. Observemos también que la distancia máxima de transporte es doble en la terminal, $\frac{v}{g}$, que en la kilométrica $\frac{v}{2g}$, lo que permite extender la benéfica influencia del ferrocarril a doble distancia en el interior del país, gracias a las tarifas terminales, detalle éste muy digno de tenerse en cuenta por lo que representa como ventaja para los intereses generales. De ahí que el Gobierno haya prestado siempre su aprobación a las gestiones llevadas a cabo por las empresas para facilitar la paulatina sustitución de sus primitivas tarifas kilométricas, o *proporcionales,* por otras de tipo terminal o *diferenciales,* a pesar de las protestas que generalmente ocasionan estas últimas entre el público transportador.

Protestas que, justo es decirlo, tienen su razón fundada en el mayor precio que se cobra con las terminales en los transportes a distancias cortas, que precisamente son los más numerosos. En efecto: siendo en la kilométrica

$$y = 2\,gx$$

y en la terminal

$$y = \frac{v + gx}{2}$$

la primera resulta menor que la segunda hasta una distancia tal que

$$2\,gx = \frac{v + gx}{2}$$

$$\therefore \quad x = \frac{v}{3\,g}$$

o sea, hasta la tecera parte de la distancia máxima de aplicación.

Este inconveniente de las terminales, ha sido corregido con las parabólicas, de la forma

$$y = K\sqrt{x}$$

en las cuales se determina a K de modo que se llegue con el valor máximo v a la distancia máxima a que permiten alcanzar las terminales que era $\frac{v}{g}$; luego

$$v = K\sqrt{\frac{v}{g}} \quad \therefore \quad K = \sqrt{v\,g}$$

Entonces la tarifa es

$$y = \sqrt{v\,gx}$$

y calculando con ella la utilidad máxima, resulta

$$U = \frac{2\gamma}{f}\int_0^{\frac{v}{g}} (\sqrt{v\,gx} - gx)\,(v - \sqrt{v\,gx})\,dx$$

$$= \frac{2\gamma}{f}\left[\frac{2}{3}\,v\sqrt{vg}\;x^{3/2} - v\,g\,x^2 + \frac{2}{5}\,g\sqrt{vg}\;x^{5/2}\right]_0^{\frac{v}{g}}$$

$$= \frac{2\gamma v^3}{15fg} = 0{,}133\,\frac{\gamma v^3}{fg}$$

o sea, un poco menos que con las terminales, que dieron $0{,}166\,\frac{\gamma v^3}{fg}$; pero tal resultado es obtenido gravando los transportes cortos mucho menos que con las terminales y permitiendo a la vez transportes largos hasta una distancia doble que con las kilométricas. Las tarifas parabólicas representan, pues, un conjunto de propiedades ventajosas simultáneamente para el público productor (baratura en los transportes cortos); para la empresa transportadora (una utilidad bastante elevada); y para los intereses generales del país (máxima distancia de aplicación). En particular, estos últimos resultan especialmente beneficiados por todo cuanto contribuye a favorecer los transportes de largo recorrido.

En resumen: con los tres tipos de tarifas

kilométricas	*terminales*	*parabólicas*

cuyas ecuaciones son:

$y = 2\,gx$	$y = \frac{v + gx}{2}$	$y = \sqrt{v\,gx}$

se extiende la influencia del ferrocarril hasta la distancia máxima

$x = \frac{v}{2g}$	$x = \frac{v}{g}$	$x = \frac{v}{g}$

y con ellas obtiene la empresa, en el supuesto de que toda la zona

cultivable (o productora) se encuentre efectivamente en actividad, una utilidad de

$$U = \frac{\gamma v^3}{12 fg} \qquad U = \frac{\gamma v^3}{6 fg} \qquad U = \frac{2 \gamma v^3}{15 fg}$$

o sea, proporcional a los números

0,083 0,166 0,133

Tales son los resultados fundamentales que proporciona la teoría clásica de las tarifas ferroviarias; en base a ellos, y ampliando el método aplicado para obtenerlos, se pueden llegar a resolver interesantes problemas de economía ferroviaria.

Efectuando investigaciones de esta clase, pero variando un poco las hipótesis de partida o generalizando las condiciones finales, hemos obtenido los resultados que exponemos a continuación, principiando con problemas sencillos y continuando con otros cada vez mas complicados.

III. — TRANSPORTE DESDE UN PUNTO UNICO

En vez de suponer que la producción de la mercadería a transportar se haga o pueda hacerse uniformemente a ambos lados de la vía sobre toda la zona atravesada por el ferrocarril, consideraremos el caso en que se produzca o pueda producirse *exclusivamente* alrededor de una estación, ubicada a la distancia x. A su vez, la distancia desde el punto más alejado de producción posible hasta la estación, puede estar limitada, o no, dos casos muy distintos para la determinación de la tarifa.

Considerando las mismas notaciones anteriores empleadas, tendremos ahora que la máxima distancia de transporte radial, o hacia la estación por los caminos, será $\frac{v - y}{f}$. El área total será un círculo de este radio y con centro en la estación, que proveerá un tráfico en toneladas de

$$\gamma \pi \left(\frac{v - y}{f}\right)^2$$

el cual, transportado a la tarifa y, ocasionando por unidad transportada el gasto gx, dejará una utilidad igual a

$$U = \frac{\gamma \pi}{f^2} (v - y)^2 (y - gx)$$

El problema es determinar y de modo que U sea máximo; las dos primeras derivadas de U respecto a y, son

$$U' = \frac{\gamma \pi}{f^2} [(v - y)^2 - 2 (v - y) (y - gx)]$$

$$= \frac{\gamma \pi}{f^2} (v - y) (v - 3 y + 2 gx)$$

$$U'' = \frac{2 \gamma \pi}{f^2} [3 y - 2 v - gx]$$

Igualando U' a cero, y despreciando la solución $y = v$, que evidentemente no conviene al problema, resulta

$$v - 3 y + 2 gx = 0$$

$$y = \frac{v + 2 gx}{3}$$

tarifa de tipo terminal, más baja que la de Launhardt, y con la cual se llega, lo mismo que con ésta, a la distancia máxima $\frac{v}{g}$. El signo de U'' es efectivamente negativo para el valor encontrado de y, pues sustituído éste en U'', da

$$U'' = \frac{2 \gamma \pi}{f^2} [- v + gx]$$

y por ser siempre $x < \frac{v}{g}$, resulta $U'' < 0$.

El valor de la utilidad máxima, será

$$U = \frac{\gamma \pi}{f^2} \left(v - \frac{v + 2 gx}{3}\right)^2 \left(\frac{v + 2 gx}{3} - gx\right)$$

$$= \frac{\gamma \pi}{27 f^2} (2 v - 2 gx)^2 (v - gx)$$

$$= \frac{4 \gamma \pi}{27 f^2} (v - gx)^3$$

fórmula con la cual calcularíamos la utilidad correspondiente a la carga recogida en la estación ubicada a la distancia x. Si en vez de una, se trata de varias estaciones, A, B, C, D... a las distancias respectivas x_1; x_2; x_3; x_4;... repetiríamos los cálculos aisladamente para cada una de ellas, y tendríamos, por un lado, la serie de precios a cobrar,

$$y_1 = \frac{v + 2\,gx_1}{3} \quad ; \quad y_2 = \frac{v + 2\,gx_2}{3} \quad ; \quad y_3 = \frac{v + 2\,gx_3}{3}$$

y por otro la serie de utilidades

$$U_1 = \frac{4\,\gamma\,\pi}{2\,7\,f^2}(v - gx_1)^3$$

$$U_2 = \frac{4\,\gamma\,\pi}{2\,7\,f^2}(v - gx_2)^3$$

. . . .

cuya suma nos daría la utilidad total. En esta forma, es más sencillo el tener en cuenta las variaciones en los valores de γ, v y f, que con el método clásico de integración, pues si en las diferentes zonas de afluencia de las varias estaciones fueron γ_1, γ_2, γ_3... v_1, v_2, v_3... f_1, f_2, f_3... determinaríamos las sucesivas tarifas

$$y_1 = \frac{v_1 + 2\,g_1\,x_1}{3} \quad ; \quad y_2 = \frac{v_2 + 2\,g_2\,x_2}{3} \quad ; \quad y_3 = \frac{v_3 + 2\,g_3\,x_3}{3}$$

y las diversas utilidades

$$U_1 = \frac{4\,\gamma_1\,\pi}{2\,7\,f_1^2}(v_1 - gx_1)^3$$

$$U_2 = \frac{4\,\gamma_2\,\pi}{2\,7\,f_2^2}(v_2 - gx_2)^3$$

$$U_3 = \frac{4\,\gamma_3\,\pi}{2\,7\,f_3^2}(v_3 - gx_3)^3$$

. . . .

También se prestan estas fórmulas para evidenciar la rápida disminución de la utilidad al crecer x, pues aumenta con ello el término sustractivo gx, rebajándose notablemente el valor del binomio $v - gx$ que debe ser elevado a la tercera potencia. Igualmente muestra la importancia del valor de f: una disminución cualquiera

en éste, sea por mejora en los caminos de acceso a las estaciones o por efectuarse el servicio con vehículos automotores de mayor rendimiento, aumenta el radio del círculo que forma la zona de afluencia, y por lo tanto el tráfico posible, a igualdad de los otros factores, incrementando así la utilidad en proporciones muy fuertes, pues f figura elevado al cuadrado y en el denominador. Una disminución de 20 % en este costo de acarreo, por ejemplo, obligaría a multiplicar el valor de U por

$$\frac{1}{(0{,}8)^2} = \frac{1}{0{,}64} = 1{,}56.$$

o sea, la disminución del 20 % en el costo del transporte caminero, puede originar un aumento de 56 % en la utilidad del ferrocarril. Esto permite vislumbrar la importancia que tiene el transporte caminero barato para los ferrocarriles y las ventajas que pueden derivarse de una buena coordinación con los vehículos automotores.

Ejemplo. — Un ferrocarril tiene a la distancia de 210 Km. de la estación cabecera, una zona apta para producir, a razón de 80 ton. por Km. cuadrado, una mercadería cuyo coeficiente de transporte es 9 $ m/n ton.; el transporte caminero en la región, cuesta 0,08 $ m/n por ton-Km., y el gasto ferroviario se ha calculado en 0,024 $ m/n por ton-Km. ¿Cuál es la tarifa que producirá el máximo de utilidad a la empresa, suponiendo cultivada toda la zona?

Sustituyendo valores se tiene

$$y = \frac{v + 2\,gx}{3} = \frac{9 + 2\,(0{,}024)\,310}{3} = 6{,}36 \text{ \$ m/n.}$$

Con esta tarifa, el radio de la posible zona de afluencia, será

$$\frac{v - y}{f} = \frac{9 - 6{,}36}{0{,}08} = \frac{2{,}64}{0{,}08} = 33 \text{ Km.}$$

El área de la zona resultará

$$\pi\left(\frac{v - y}{f}\right)^2 = 3{,}14\,(33)^2 = 3419 \text{ Km. cuadr.}$$

La producción total, llegará a

$$\gamma\,\pi\left(\frac{v - y}{f}\right)^2 = 80\,(3419) = 273.520 \text{ ton.}$$

Lo que cobrará la empresa, a razón de 6,36 $ m/n la ton. importa

$$\gamma \pi \left(\frac{v - y}{f} \right)^2 y = 273,520 \ (6,36)$$
$$= 1.739.587 \ \$ \ m/n.$$

y lo que gasta por hacer el transporte alcanzará a

$$\gamma \pi \left(\frac{v - y}{f} \right)^2 gx = 273\ 520 \ (0,024) \ (210)$$
$$= 1.378.541 \ \$ \ m/n.$$

Luego la ganancia será

$$\gamma \pi \left(\frac{v - y}{f} \right)^2 (y - gx) = 1.739.587 - 1.378.541$$
$$= \ 361.046 \ \$ \ m/n.$$

A este mismo resultado hubiéramos llegado directamente con la fórmula

$$u = \frac{4 \gamma \pi (v - gx)^3}{27 f^2}$$

que con los valores numéricos correspondientes, da, despreciando decimales en los cálculos

$$u = \frac{4 \ (80) \ (3,14) \ [9 - 0,024 \ (210)]^3}{27 \ (0,08)^2}$$
$$= \frac{1.004,80 \ (3,96)^3}{0,1728} = 361.046 \ \$ \ m/n.$$

Para comprobar que, en efecto, con la tarifa de 6,36 $ m/n se obtiene un máximo de utilidad, calcularemos los resultados con una algo menor, de 6,30 $ m/n, y con otra mayor, de 6,40 $ m/n. Para facilitar las comparaciones, dispondremos los diferentes elementos del cálculo en la forma siguiente:

Resultados con las tarifas de:

	6,30 $ m/n	6,36 $ m/n	6,40 $ m/n
Radio de la zona de afluencia en Km. . .	33,7	33	32,5
Area de la zona de afluencia en Km² . . .	3567	3419	3318
Producción total en ton.	285.360	273.520	265.440
Productos cobrados en $ m/n.	1.797.768	1.739.587	1.698.816
Gastos del transporte en $ m/n.	1.438.214	1.378.541	1.337.817
Utilidad en $ m/n	359.554	361.046	360.999

Las diferencias son pequeñas, pero es bien evidente que la tarifa de 6,36 $ m/n directamente suministrada por la fórmula, es la que proporciona la utilidad o ganancia máxima.

En la práctica, debe cuidarse de que se cumpla la hipótesis hecha, y que la zona explotable sea la supuesta, pues, de lo contrario, los resultados son otros. Por ejemplo, con los mismos datos del ejemplo anterior, supongamos que la zona de producción posible se extendiera *solamente* hasta una distancia R igual a 20 Km. alrededor de la estación, por impedir una mayor amplitud un accidente geográfico, una modificación en la composición química del suelo, o la proximidad de otra estación. Entonces la tarifa la determinaríamos por la relación

$$\frac{v - y}{f} = 20 \quad \therefore \quad y = v - 20f$$

que con los valores supuestos de v y f, daría

$$y = 9 - 20\,(0{,}08) = 9 - 1{,}60 = 7{,}40 \text{ \$ m/n}$$

y con ella obtendríamos en este caso la utilidad máxima, pues no siendo posible que aumente la zona más allá de los 20 Km. fijados de antemano, *si rebajamos la tarifa, rebajaríamos los productos a obtener; y si elevamos la tarifa, rebajaríamos también los productos, porque disminuiríamos la zona.*

Esta manera de fijar una tarifa por la relación

$$y = v - Rf$$

no es en realidad muy lógica, pues no se hace intervenir la distancia a que va a ser hecho el transporte, pero permite obtener del tráfico todo lo que el tráfico puede dar, y se presta bien para la determinación de una tarifa especial a aplicarse en un punto aislado. Por otra parte, y como veremos más adelante, pueden existir tarifas en las que no intervenga para nada el factor distancia, tal como sucede en las tarifas tranviarias y en las postales.

Cuando se fija el valor de y por medio de la relación últimamente escrita, hay que tener en cuenta los gastos propios de la empresa, para limitar de acuerdo a ellos las condiciones de aplicación. Por lo tanto, habrá que tener cuidado de no utilizarla más que cuando

$$v - Rf > gx \quad \therefore \quad R < \frac{v - gx}{f}$$

Cuando R es mayor que este valor límite, no se lo toma en cuenta

y se fija directamente otro valor de R por la condición de obtener la utilidad máxima. Como la tarifa correspondiente es

$$y = \frac{v + 2\,gx}{3}$$

y el radio de la zona es $\frac{v - y}{f}$, resultará

$$R = \frac{v - y}{f} = \frac{v - \frac{v + 2\,gx}{3}}{f} = \frac{2\,(v - gx)}{3\,f}$$

Si el radio real de la zona posible es mayor que el calculado así, se toma el calculado, pues es el que dará la utilidad máxima. Si es menor, se toma el real, pues el calculado no podrá ser obtenido, por hipótesis.

Cuando f disminuye, R aumenta rápidamente; para una disminución de 50 % en f, R aumenta, no en 50 sino en 100 %. Cuando la distancia x aumenta, acercándose el producto gx a valer v, el transporte va dejando de ser remunerativo para la empresa y la zona de producción posible, o mejor dicho, explotable, tiende a anularse.

Ejemplo. — Con los mismos datos anteriores, se trata de fijar las tarifas a aplicarse en tres estaciones de un ferrocarril cercanas a la punta de rieles de un ramal: La primera, a 280 Km., tiene una zona de producción posible de 16 Km. de radio alrededor de la estación. La segunda, a los 300 Km. puede producir hasta los 20 Km. La tercera, a los 350 Km., puede disponer de zona hasta los 10 Km. Se trata de buscar las tarifas que proporcionen mayor utilidad.

Las deducidas con la fórmula

$$y = \frac{v + 2\,gx}{3}$$

serían, respectivamente,

7,48 \$ m/n ; 7,80 \$ m/n ; 8,60 \$ m/n

pero esto supone que se cultivan todas las zonas de producción posibles, cuyos radios calculados según la fórmula

$$R = \frac{2\,(v - gx)}{3\,f}$$

serían

19 Km ; 15 Km ; 5 Km,

Y de acuerdo a los datos del problema, la primera estación no dispone más que

de una zona posible de 16 Km. de radio; la tarifa respectiva podría, en consecuencia, subirse hasta la deducida de

$$y = v - Rf = 9 - 16\ (0{,}08) = 7{,}72\ \$\ \text{m/n},$$

que es la que procuraría en este caso la utilidad máxima. En cuanto a las otras dos, no podrían, evidentemente, cultivar toda la zona posible a su alrededor, de 20 y 10 Km, respectivamente, con los valores supuestos para v, f y g, y debido, también, al alto valor de x. No hay que olvidar que hemos supuesto estaciones extremas, próximas a punta de rieles: para la última de ellas, los gastos son

$$gx = 0{,}024\ (350) = 8{,}40\ \$\ \text{m/n},$$

con muy escaso margen sobre los 8,60 $ calculados para la tarifa.

Y eso que estamos tratando de tarifas de utilidad máxima.

La designación de « utilidad máxima para las empresas », es un engañoso calificativo, que puede inducir al lector hacia consideraciones equivocadas, suponiendo que prevemos ganancias fabulosas para los ferrocarriles. Nada de eso. La utilidad máxima que puede conseguir una empresa, es siempre — o casi siempre — muy inferior a la permitida por la ley.

En efecto; la ley 5315 (ley Mitre), en su art. 9, establece como valor normal de la relación de gastos a productos o coeficiente de explotación, E, el 0,60. Este coeficiente mide la cantidad a gastar para conseguir 100 $ de productos brutos, y de ahí que la ganancia líquida o utilidad sea $(1 - E)\ P$. Interesa, pues, que E sea lo menor posible, pues con eso aumenta U. Para la tarifa de utilidad máxima que estamos considerando, se tiene

$$E = \frac{G}{P} = \frac{gx}{y} = \frac{gx}{\dfrac{v + 2\,gx}{3}} = \frac{3\,gx}{v + 2\,gx}$$

$$= \frac{3\,g}{2\,g + \dfrac{v}{x}}$$

expresión que varía, *creciendo* evidentemente con x. Quiere decirse que sólo en los primeros kilómetros es posible esperar un coeficiente de explotación favorable. Si quisiéramos determinar hasta qué distancia puede ser inferior a 0,60, escribiríamos

$$\frac{3\,gx}{v + 2\,gx} \leq 0{,}60 \quad \therefore \quad x < \frac{0{,}6\,v}{1{,}8\,g} = \frac{v}{3\,g}$$

o sea, hasta la tercera parte de la distancia máxima de transporte; y en las dos terceras partes restantes, las tarifas de utilidad máxima, proporcionan por tonelada una utilidad inferior a la máxima permitida por la ley.

Con los datos empleados en los ejemplos anteriores, se tendría

$$x = \frac{v}{3\,g} = \frac{9}{3\,(0{,}024)} = \frac{9000}{72} = 128{,}5 \text{ Km.}$$

Prácticamente, a partir de los 130 Km, tendríamos ya coeficientes de explotación superiores al normal de 0,60. Para la última estación, supuesta a los 350 Km, resulta

$$E = \frac{8{,}40}{8{,}60} = 0{,}97,$$

a pesar de tratarse, como ya hemos dicho, de tarifas de utilidad máxima.

Un ferrocarril que dispusiese de 2000 a 3000 Km. de vía, y que determinase las tarifas en sus diferentes estaciones por las condiciones de utilidad máxima, resultaría en total con un coeficiente de explotación evidentemente alto y por lo tanto poco favorable.

Esto llevaría equivocadamente a pensar que las empresas ferroviarias obtendrían mejores resultados económicos fijando sus tarifas de acuerdo al máximo de utilidad que les permite la ley, o sea, escribiendo

$$\frac{G}{P} = \frac{gx}{y} = 0{,}6 \quad \therefore \quad y = \frac{gx}{0{,}6} = 1{,}66\,gx$$

tarifa de tipo kilométrico, perfectamente legal, pero inaplicable en algunas estaciones y antieconómica en otras, como se comprueba en los ejemplos a continuación.

Para la estación ubicada a 210 Km en la que habíamos obtenido una ganancia de 361.046 $ m/n, con la tarifa de 6,36 $ m/n, resultaría que ahora obtendríamos:

Nueva tarifa: $1{,}66\,(0{,}024)\,(210) = 8{,}37$ $ m/n.

Radio de la zona de afluencia:

$$\frac{9 - 8{,}37}{0{,}08} = \frac{0{,}63}{0{,}08} = 8 \text{ Km.}$$

Antes era 33 Km. Esta reducción del radio indica ya una fuerte disminución en a extensión de la zona, en el volumen de las cargas transportadas y en la suma de los productos percibidos. En efecto:

Area de la zona: 3,14 (64) = 200,96 Km².
Producción total: 80 (200,96) = 16.077 ton.
Productos cobrados: 8,37 (16.077) = 134.564,49 \$ m/n.
Gastos del transporte: 0,024 (16.077) (210) = 81.026,40 \$ m/n.

Utilidad resultante: 53.538,09 \$ m/n, en vez de los 361.046 \$ m/n que había producido la tarifa anteriormente calculada. Una séptima parte. Pero el coeficiente de explotación resulta mucho menor.

Para las tres estaciones últimas, también estudiadas en un ejemplo anterior, la tarifa deducida con el coeficiente de explotación de 0,60 resulta inaplicable, pues ya a los 280 Km. se tendría

$$y = 1,66\ (0,024)\ 280 = 11,15\ \$\ m/n,$$

cuando el coeficiente de transporte de la mercadería no es más que 7 \$ m/n.

Un inconvenicente susceptible de presentarse en la práctica, es el originado por la interferencia o superposición de las zonas de dos estaciones sucesivas. Si los radios de los dos círculos respectivos son tales que su suma es mayor que la distancia entre las dos estaciones, o sea cuando

$$\frac{2\,(v - gx_1)}{3\,f} + \frac{2\,(v - gx_2)}{3\,f} > x_2 - x_1$$

siendo x_1 y x_2 las distancias desde las estaciones hasta el origen de la línea, la superposición de zonas se produce. Entonces es inútil esperar que en cada estación afluya el tráfico calculado; los resultados prácticos no coincidirán con las previsiones teóricas y la utilidad máxima no será obtenida.

En principio, si la superposición no es muy grande, se puede prescindir de ella, calculando antes la merma que va a tenerse en la producción, para juzgar si vale o no la pena efectuar algún trámite para compensarla. Uno de éstos puede ser elevar la tarifa en la segunda estación, para reducir su zona, hasta que no se superponga con aquella de la estación precedente, y así, en ésta por lo menos, se consigue la utilidad máxima. También se puede elevar la tarifa, (dentro de ciertos límites) en la precedente, para obtener la utilidad máxima en la siguiente, aunque, en este caso, el resultado no sería tan favorable, pues los gastos de transporte crecen proporcionalmente con la distancia más de prisa que la tarifa, y por lo tanto una tonelada de carga deja más ganancia cuando de más cerca se la transporta, y por eso conviene intensificar el tráfico en la estación más cercana al origen de la línea.

Pero si la superposición es grande, y los valores del transporte caminero son distintos en las dos estaciones sucesivas, el problema

puede adquirir otros aspectos, pues el productor dirigirá la carga a una u otra estación, según el importe que le represente a él, no sólo la tarifa ferroviaria, sino el total de los gastos de transporte por camino y por ferrocarril. La línea de separación entre las zonas propias de las dos estaciones, cuyas zonas se superponen, no es entonces la línea recta, cuerda común de los dos círculos, sino un arco de hipérbola, y esto hace que el estudio puramente teórico del problema sea complicado, con poca ventaja práctica, pues las líneas de real separación de las zonas se establecen más bien de acuerdo a los caminos existentes, división de las propiedades, y otros detalles locales que un buen plano catastral permite determinar sin mayores cálculos; y la teoría puede conducirnos aquí a graves discordancias con la realidad. El mejor procedimiento es, pues, en estos casos, fijar una serie de tarifas, determinar sobre un plano catastral las zonas que pueden realmente dominarse con ellas desde cada estación y calcular las utilidades respectivas, hasta encontrar la máxima en la serie de resultados sucesivos. Bien entendido que se trata de la utilidad máxima obtenida en las dos estaciones, por suma de las dos utilidades, y no de la utilidad máxima en cada una de ellas.

Finalmente, debe observarse, una vez más, que la utilidad de la empresa depende, en fuerte porporción, del valor de f, y que éste, en la práctica, lo fijan los automotores establecidos en la zona, los cuales es lógico que traten ellos también de fijar sus tarifas de modo a obtener utilidades máximas. Es fácil demostrar, que si f_0 es el costo directo del transporte automotor por camino, la tarifa f que proporciona la utilidad máxima a los automotores es igual a 1,5 f_0. La demostración puede verse en *Anales de la Sociedad Científica Argentina*, tomo XXXIX, 1er. semestre 1895, pág. 49. Teniendo en cuenta este valor resultará, pues

$$U = \frac{8 \gamma \pi}{81 f_0^2} (v - g)^3$$

o muy aproximadamente

$$U = 0,1 \frac{\gamma \pi}{f_0^2} (v - gx)^3$$

Como f_0 aumenta mucho (y por lo tanto disminuye U) con el mal estado de los caminos, se evidencia el interés vital que reviste para las empresas ferroviarias todo cuanto influya para mejorar las condiciones viales de las zonas que atraviesan sus líneas.

(Continuará)

SOBRE LA ETIMOLOGIA DE LA PALABRA « GARÚA »

Por el Dr. W. KNOCHE

Aparentemente el sentido o concepto de la palabra garúa, es algo diferente en las distintas partes de Sudamérica. Como se trata de un fenómeno típicamente sudamericano, aunque no falta en otras regiones de la tierra, como por ejemplo en la costa oeste desértica de Sudáfrica, será conveniente fijar el significado del vocablo de referencia para las distintas zonas Iberoamericanas.

El « Diccionario Marítimo Español », por José de Lorenzo, O. Gonzalo de Murya y D. Martín Ferreira, Madrid 1864, da la siguiente definición:

Garúa = Neblina muy húmeda que deja caer gotitas muy finas de agua pero que no llegan a correr por el suelo como las de la lluvia.

Citaremos las siguientes fuentes para este continente:

J. J. Tschudy, « Kechua-Sprache », Wien 1853, menciona:

Garúa = Vocablo quechua.

« Vocabulario Rioplatense razonado », por O. Daniel Granada, 2ª Edición por O. Juan Valera, Montevideo 1890.

Garúa = Llovizna.

Voz propia en Chile (Rodríguez) y en el Perú (Palma). En Lima, de donde quizás venga el vocablo, llaman de muy antiguo garúa, a la finísima llovizna en que se condensan las nieblas que durante el invierno oscurecen su cielo. Lloviznas menudas que es lo que llaman (en el Perú) garúas (Ulloa).

« Tesoro de Catamrqueñismos », por Samuel A. Lafone Quevedo, Buenos Aires 1898.

Garúa = Nombre que se da a la bruma o cerrazón, en el litoral.

Garúa. - Etim. puede asegurarse que está aún por determinarse. Así con g puede ser voz del Cuzco; pero dado la confusión de p y k puede ser « purua » que encierra la raíz « para », llover.

« Diccionario de Chilenismo », por Zorobabel Rodríguez, Santiago, 1875.

Garúa = Garuar es provincialismo peruano y chileno.

Garúa es en español llovizna, mollizna, cernidilla.

En Chile la gente zafia dice garuga y garugar.

« Diccionario de Peruanismos ». Ensayo filológico por Juan de Asona, Lima 1883.

Garúa = Llovizna menuda o como decían nuestros escritores del siglo pasado mollizna (del latín « mollis », blando, suave), rocío que puede caer en cualquier parte y que constituye la única lluvia del litoral peruano; extensión como de 500 leguas de arenales desiertos, con risueños valles interpuestos. Desde los primeros días de la conquista los historiadores primitivos de Indias denuncian esta peculiaridad y procuran explicarla físicamente a su manera sin usar más palabras que la de rocío y comparándola, éste, ya a las nieblas de Valladolid, ya a las de Escocia. El americanismo garúa es uno de esos provincialismos; lo llamamos americanismo, porque no lo creemos ni peruanismo, ni hispanismo de América... Garuar, lloviznar tenuamente.

« Diccionario de barbarismos y provincialismos de Costa Rica », por Carlos Gazini, San José de Costa Rica, 1893.

Garúa = Con este nombre se designa en Costa Rica, en el Perú, en Chile, y acaso también en otras partes, la lluvia fina que los Españoles llaman llovizna, cernidilla, matapolvo. Garúa consta como Peruanismo en la 11ª Edición del Diccionario de la Academia. Garuar: lloviznar, molliznar, molliznear.

Nuestro vocablo se encuentra también en las Antillas:

« Diccionario Provincial de voces cubanas », por O. Esteban Pichardo, Habana 1862.

Garúa = Sinónimo de llovizna aun más menuda o leve.
Garuar (Peruanismo) o como sinómimo de garuíta, diminutivo de garúa. Lloviznar más a menudo — o levemente...

« Diccionario Cubano », José Miguel Macías, Vera Cruz 1885.

Garúa = Sig. Met. Llovizna menuda. Cit. en Salva se lee garúa.
Prov. per.: llovizna. Garuar (Prov. per.): lloviznar. Etim.: Guardan silencio los etimologistas. Deriv. garuar y garuíta.

De una fuente desconocida damos la siguiente descripción:

Garúa = Nombre que dan en el Perú a la lluvia menuda y cuasi imperceptible que no incomoda como la niebla cuando cae. Es por extremo contigua de la lluvia, principalmente de la más menuda, que llamamos garúa (P. Lozana). Paraguay; Reino de la Plata y Tucumán.
Garuar — lloviznar.

La « Enciclopedia Spasa-Calpe » se restringe a la siguiente explicación:

Garúa = (Voz quechua). Americanismo: llovizna, mollizna.
Garúa, mar.: Neblina muy húmeda que deja caer gotitas muy finas pero que no llegan a correr por el suelo como las de la lluvia. Garuar (Etim. de garúa) Amer. lloviznar.
Garuga, garugar: cernidilla.

« Diccionario de la Lengua Castellana », por la Real Academia Española, Madrid 1914, dice:

Garúa = Voz quichua Amer. y Mar. llovizna.

El Diccionario Enciclopédico Hispano-Americano, 1912:

Garúa = Neblina muy húmeda que deja caer gotitas muy finas de agua, pero

que no llegan a correr por el suelo como las de lla lluvia. Es voz usada por los marinos y en las Repúblicas de Sudamérica.

Debe agregarse que se usa en el Perú también los aumentativos de: Garúa = Garugón y garugoncito.

También en la Argentina la palabra garúa se refiere a un hidrometeoro más fino que la llovizna en transición a neblina.

V. Tschudi, en su « Fisonomía del Perú », se refiere al fenómeno de la garúa de la costa chileno-peruana, entre el río Loa y el Cabo Tumbes, y la describe en la forma siguiente:

« Al principio y al fin del invierno la niebla generalmente asciende entre 9 y 10 horas de la mañana y baja rara vez a las 3 horas de la tarde. En Agosto y Septiembre esta niebla es la más densa y queda durante semanas inmóvil sobre el suelo. Nunca se disuelve en lluvia verdadera sino solamente en una precipitación sumamente fina, penetrante, que los habitantes llaman garúa ».

J. Hann, en su Climatología (tomo II, Stuttgart, 1910), menciona, según Wolf, las garúas de la zona desértica en la costa ecuatoriana: « aparecen en los meses de Junio a Noviembre, es decir, durante el invierno, como lluvias-polvo, casi diarias, pero que pueden adquirir también el carácter de precipitaciones continuas fuertes. Estas garúas, que no tienen el aspecto de las neblinas del Perú, tienen su mayor frecuencia durante la noche y en las horas matinales; durante el día, con aumento de calor sobre la tierra, aparece la sequedad, pero sin estar sereno; durante la época lluviosa el día tiene una insolación fuerte aunque las lluvias en su mayoría también tienen lugar en la noche y en la mañana. Las lluvias de las garúas son en la misma costa más débiles que en tierra adentro, así que la costa es la región más seca, lo que se ve también por la vegetación ».

Weberbauer (Grundzüge von Klima und Pflanzenverteilung in den peruanischen Anden. Pet. Geogr. Mitt. 1906) divide la costa peruana en una sección norte que recibe durante intervalos de 5 a 12 años, precipitaciones en el verano en forma de lluvias, y en una sección sud, abajo de latitud 8° S., caracterizada por neblinas invernales, garúas. En las regiones de las garúas, en las colinas y regiones limítrofes, aparece en la mitad del invierno la « vegetación de la loma », formada principalmente por hierbas, y que se mantiene hasta los primeros meses de verano.

Wolf, en su obra y en sus estudios sobre el Ecuador (1888), habla también de las garúas continuas y muy fuertes, en forma de densas neblinas, en algunas de las Islas Galápagos. Así, por ejemplo, en

la Isla Floriana, durante el mes de Agosto (invierno), a una altura de 270 metros, no pasó un solo día sin 4-5 garúas, quedando los caminos bien mojados.

Koeppen, en su « Die Klimate der Erde », refiriéndose a la costa Oeste de Sudamérica, habla de un « clima de garúa », que produce nieblas frecuentes sobre todo durante el semestre invernal.

Si resumimos las distintas definiciones arriba mencionadas del fenómeno garúa, este vocablo se usa tanto para una lluvia débil, como para una llovizna, ya sea normal o leve, para una niebla húmeda y también para un fenómeno « sui generis ».

El autor, quien ha observado el fenómeno durante muchos años en diferentes partes de la costa Oeste, considera la garúa como un fenómeno típico de las regiones desérticas y estépicas costaneras, al lado de una corriente marítima fría, a pesar de que en ciertas partes este hidrometeoro puede entrar hasta más de 100 km. tierra adentro. Si bien se habla de « finísima llovizna en que se condensan las nieblas », de « lloviznas menudas », de « neblina muy húmeda que deja caer gotitas que no llegan al suelo como las de la lluvia », de « mollizna », « matapolvo », « cernidilla », de « lluvia menuda y cuasi imperceptible que no incomoda como la niebla », de « una precipitación sumamente fina penetrante », de « lluvias-polvo », etc., entonces uno debe darse cuenta que se trata aparentemente de un hidrometeoro típico, diferente tanto de la llovizna como de la neblina (húmeda). Cuando la llovizna todavía puede dar precipitaciones mesurables, aún pequeñas, la garúa, que en sí puede ser débil, mediana o fuerte, casi nunca dará cantidad en el pluviómetro. La garúa se distingue de la neblina por su mayor visibilidad y por la existencia de gotitas que se sienten como tales, generalmente en los pómulos Los extranjeros que bajan en el puerto de el Callao, la consideran como una llovizna, es decir, como una precipitación efectiva, llevando paraguas abiertos. Esta medida provoca la risa de los peruanos, porque aun con una garúa muy fuerte, con sus gotitas en suspensión, el paraguas no presta la menor protección.

Físicamente la garúa tiene gotitas de un diámetro muy pequeño, tal vez de un centésimo hasta un décimo de milímetro, con una velocidad de caída tan pequeña desde 0,00 hasta 0,25 mts/seg., es decir, el tamaño de las gotitas de agua como nieblas y neblinas. Esta velocidad pequeñísima, con el más leve movimiento de aire vertical, producirá el mencionado efecto de una suspensión aparente. Además debe existir, como en la Camanchaca, otro fenómeno de las costas húmedo-desérticas, sin la menor acción termodinámica, el fenómeno

de electrostricción que impide en ambos hidrometeoros la coagulación.

Con la garúa verdadera se observa generalmente una humedad relativa muy alta, de 90 hasta 98 %, pero que raras veces llega al estado de saturación, y menos aún de sobresaturación, como sucede en el caso de neblinas o nieblas.

Geográficamente se forma la garúa en las regiones de corrientes frías y acompañando los desiertos costaneros de atmósfera húmeda, sin dinamismo atmosférico (norte de Chile, Perú, costa sud del Ecuador, costa del sudoeste del Africa, etc.). Para Chile el autor ha demostrado cartográficamente (Ztsch. d. Ges. f. Erdkunde z. Berlín N° 3/4, 1931) la distribución típica de las garúas.

Resumiendo podemos decir que la garúa es una condensación probablemente puntiforme discontinua, que no llega al grado de precipitación como una llovizna fina, ni a un grado de continuidad de condensación, como una niebla húmeda. A pesar que las cantidades no son mesurables, fitogeográficamente tienen una importancia bastante acentuada, formando ellas la vegetación típica de las lomas desérticas.

Por lo anteriormente dicho a la garúa debía adjudicársele un símbolo como se ha hecho con la llovizna (•) o la niebla (≡). En Chile durante muchos años estuvo en uso el símbolo para la garúa.

NOTA SOBRE LA PRESIÓN DE UN SÓLIDO

POR

FÉLIX CERNUSCHI

El estado de equilibrio de un cristal con el vapor producido por el mismo por sublimación, ha sido estudiado especialmente por Fowler (1). El objeto de esta nota es mostrar que dicho problema puede ser resuelto en forma mucho más sencilla, involucrándolo dentro de las ecuaciones de acción de masa (2), sin realizar un razonamiento estadístico especial.

Un cristal puede ser considerado como una enorme molécula construida por un indeterminado número de moléculas simples (las que componen el estado gaseoso). Si llamamos: N_g el número total de moléculas simples; N_s el número de moléculas simples que contiene la «molécula cristalina» (número de moléculas cristalizadas); A la moiácula simple; N_sA la «molécula cristalina». El problema de la presión de vapor de un sólido es equivalente a la presión de equilibrio de un gas constituido por átomos o moléculas A en equilibrio con una «molécula cristalina» N_sA. Por consiguiente. llamando $f\ (T)$ la función de partición de la molécula en el estado gaseoso $K(T)$ la función de partición de las moléculas A en la «molécula cristalina»; la función de partición de la «molécula cristalina» será $[K(T)]\ N_s$ y las mencionadas leyes de la acción de masa se reducen de inmediato a la siguiente:

$$Ng^{N_s} = \frac{f\ (T)^{N_s}}{[K\ (T)]^{N_s}} \qquad [1]$$

o sea:

$$Ng = \frac{K\ (T)}{f\ (T)} \qquad [2]$$

(1) R. H. Fowler, *Satistical Mechanics*, p. 162 (1936).

(2) R. H. Fowler, *Statistical Mechanics* (1936), p. 164- ec. (497).

La ecuación (2) es idéntica a la obtenida por Fowler por otro camino. Llamando como Fowler X el calor de vaporización por átomo o molécula correspondiente al cero de la temperatura absoluta, la función de partición para el átomo o molécula en el estado gaseoso es:

$$f(T) = \frac{(2\,r\,m\,k\,T)^{\frac{3}{2}}}{h^3} V \,.\, b_g(T)\, e^{-\frac{x}{kT}} \qquad [3]$$

en la que $b_g(T)$ representa las posibles rotaciones y vibraciones de la molécula en el estado gaseoso.

De (2) y (3) y aplicando para el vapor la relación de los gases perfectos $pv = N_g kT$, obtenemos:

$$p = \frac{(2\,r\,m\,k\,T)^{\frac{3}{2}}}{h^3\,K(T)}\, k\,T\,bg(T)\, e^{-\frac{x}{kT}} \qquad [4]$$

que nos da la conocida expresión de la presión del vapor en equilibrio con el cristal.

Observatorio Astronómico - Córdoba

BIBLIOGRAFIA

DE FOLLETOS RECIBIDOS EN LA ACADEMIA N. DE CIENCIAS E. F. Y N. DE BS. AS.

POR C. C. D.

Actualités Scientifiques et Industrielles. Folletos ($16\,^1/_2$ cm × 25 cm) editados por Hermann & Cía., París. Número de páginas y precios variables. Se detallan a continuación los últimos recibidos, siguiendo la numeración consecutiva.

Nº 624. — LAPICQUE (LOUIS), *La Chronaxie et ses applications physiologiques.* 118 páginas con algunas figuras; 30 francos; 1938.

Fascículo V de la serie « Physiologique générale du systéme nerveux », dirigida por el autor, miembro del « Institut » y profesor honorario de la Sorbona.

Este folleto abarca la primera parte del tema: Introducción; Histórico y Relación intensidad-duración.

Previamente trata varias cuestiones relativas a la excitabilidad: del punto de vista de la fisiología general; como medio de investigación; orígenes de la teoría eléctrica de la transmisión, etc. Respecto de la Historia, se habla de las épocas pasadas: du Bois Reynaud, Berzold, Fick, Brucke, Engelmann, Koenig, Helmholtz, Hermann, Kries, Gruzner, Biedermann; y luego del período moderno: ley empírica de Hoorweg, *característica* de Waller, *labilidad* de Wendesisky e investigaciones de C. Weiss.

El último capítulo encara la relación intensidad-duración para tejidos diversos, y el libro termina con unas referencias bibliográficas.

El folleto nº 604 trae una comunicación de F. H. A. MARSHALL, en inglés, y las de JACQUES BÉNOIT, REMY COLLIN, L. DESGLIN y LUCIEN BROXCHA (en francés). Estos profesores son, respectivamente, de Cambridge, Estrasburgo, Nancy, Bruselas y Lieja. 66 páginas; 3 láminas. Precio 20 francos.

El último folleto (nº 605) trata del tema: *Pathologie, Toxicité, Antihormones. Cancer*, y trae las comunicaciones de los especialistas H. SELYE (de Montréal), J. W. ROWLANDS (Londres), MAX ARON (Estrasburgo), CH. HAMBURGER (Copenhague), C. S. MC EVEN (Montréal) y consideraciones generales por L. BROUCHA. El 2º y 4º artículo están escritos en idioma inglés; los otros en francés; 74 páginas y dos láminas; 20 francos.

El total comprende así 382 páginas. Precede una Introducción de ANDRÉS MAYER, secretario general de la Fundación Singer Polignac.

Nº 625. — BURCKHARD (E.) y KAYSER (CH), *Régulation neurohormonale du Métabolisme des Glucides, Lipides et Protides.* 106 páginas con algunas figuras. 20 francos. 1938.

Fascículo XIII de la serie « Nutrition », dirigida por Emilio F. Terroine; los autores son: el primero, médico-jefe del Asilo de Stephansfeld; y Kayser, profesor adjunto de Fisiología en la Facultad de Medicina de Estrasburgo.

Los autores se han propuesto establecer, en lo posible, las líneas generales de una regulación neuro-horminal de los metabolismos.

Entre las numerosas publicaciones que han tratado este punto sólo han retenido aquellas que establecen un hecho o abren nuevas vías a la investigación, sin cuidarse del orden cronológico.

La primera parte del trabajo encara las generalidades; la segunda, la regulación neuro-hormonal del metabolismo de los glúcidos; la tercera, la del metabolismo de las grasas; y la última, la del metabolismo azoado.

Al final unas conclusiones generales y una muy nutrida bibliografía.

Nº 626. — PROST ((MAURICE), *Travaux Pratiques de Physique.* 96 páginas con unas 30 figuras; 25 francos; 1938.

Este primer fascículo trata las *Medidas* y el *Calor*. Prost es jefe adscripto a los Trabajos de Física en la Escuela de Aeronáutica, y asistente en la Facultad de Ciencias de París.

Es un manual de trabajos prácticos cuya característica es interesar al alumno para que realice un trabajo personal y se dé cuenta del valor del mismo en un dominio donde, más que el resultado obtenido, se aprecia la manera de interpretar el trabajo realizado. Así lo expresa el autor en un prefacio. Los distintos parágrafos tratan sucesivamente de: Reglas generales para el trazado de curvas. Balanza de precisión. Medida de longitudes. Masas específicas. Densidades de los sólidos y de los líquidos. Péndulo simple y de torsión. Alargamiento de un caucho. Barómetros. Ley de Mariotte. Termómetros. Calorímetros. Tensiones máximas del vapor de agua. Densidad del vapor. Crioscopía. Viscosimetría.

Nº 627. — DUBOIS (PIERRE), *Les Cristaux mixtes et leur structure.* 48 páginas con 38 figuras; 12 francos; 1938.

Es el fascículo XXIX de las Publicaciones de Laboratorio de Ensayos del « Conservatoire National des Arts et Metiers ». El autor, doctor en ciencias, es asistente en ese laboratorio.

Trata sucesivamente las nociones sobre las estructuras cristalinas y las generalidades sobre los cristales mixtos; luego se ocupa de los cristales mixtos con estructura igual o diferente de la de uno de los constituyentes.

Al final trae unas conclusiones: entre otras, dice que se puede clasificar los cristales mixtos, como si fueran simples, de acuerdo con la na-

turaleza de los vínculos que aseguran la estabilidad de los edificios cristalinos. Al final la bibliografía.

Nº 630. — MILLET (L'ABBÉ), *Etude expérimentale de la formation des voyelles*. 72 páginas; 12 francos; 1938.

Es el primer fascículo de la serie « Exposés sur la psycho-physiologie normale et pathologique du langage », dirigida por André Ombredane. El autor era profesor de fonética experimental en el Instituto Católico de París; falleció el 25 de febrero de 1937, lo que ha motivado una nota recordatoria que sirve de entrada. Después de unas definiciones, se exponen las generalidades relativas a las resonancias y a los resonadores, sus propiedades características, las propiedades sonoras del tubo vocal; condicionamiento fisiológico de su resonancia; principio de determinación y de clasificación de las vocales según sus elementos acústicos y físicos; concordancia de dos elementos; principio de determinación y de clasificación de las vocales según sus elementos fisiológicos.

Algunas figuras ilustran al texto.

Al final varias conclusiones interesantes.

Nº 635. — PACOTTE (JULIEN), *L'Espace Hermitien Quantique*. 60 páginas. 12 francos. 1938.

Fascículo XXIII de la serie « Physique Théorique », dirigida por L. de Broglie. El autor es « investigador científico » en Bruselas.

Trata previamente el espacio « infinidimensional » hermitiano; luego la utilización quántica del espacio hermitiano; finalmente, el « ultrafenómeno quántico ».

El último párrafo del libro dice así: « La base matemática verdadera de la mecánica quántica es un álgebra simbólica expresando los hechos del espacio infinitesimal hermitiano al igual que el álgebra simbólica de la geometría pura, no analítica, expresa los hechos del espacio ordinario ».

Nos. 636, 637, 646, 647 y 648. — TERROINE (EMILE F.) Y VARIOS, revista *Physiologie*. Cinco folletos; 1938.

Constituyen los fascículos 6 a 10 de esta revista dirigida por Terroine. Como ya dijimos, « Physologie » es efectivamente una revista anual que tiene por secretarios de redacción a Th. Cahu y Paul Lelu.

El nº 636 (60 págs., 12 fr.) se ocupa de los *Lípidos*. El nº 637 (28 pág., 10 frs.), de los *Estéridos*. El nº 646 (36 págs., 10 frs.), de la *Energética. Metabolismo basal, Termorregulación*; tiene por autores R. Wurmser y L. Chevillard. El nº 647 (44 págs., 12 frs.), de la *Digestión*; tiene por autor a Georges Delrue y diserta sobre la fisiología del tubo digestivo y glándulas anexas.

Finalmente el nº 648, redactado por D. Cordier, Robert Levy y y L. Rapkine, y que corresponde al período febrero 1937-febrero 1938 (84 págs., 20 frs.), trata la *Respiración*; tiene dos partes; la primera de ellas se ocupa de las *Oxidaciones celulares*; la segunda, de la *Función de respiración*.

Nos. 641, 642. — SCHAEFFER (G.) y LE BRETON (E.), *L'Action Dynamique Spécifique des Protides.* Dos folletos de 172 páginas en total; 45 francos; 1938.

Constituyen los dos primeros fascículos de la serie « Physiologie générale des échanges d'énergie », dirigida por G. Schaffer, profesor de la Facultad de Medicina de Strasburgo.

Se ocupan estos dos folletos de las teorías antiguas, y de la moderna, sobre el tema. Por lo demás, este trabajo sobre la acción dinámica específica de los prótidos, forma parte de un conjunto de investigaciones cuyo objeto es despejar en el interior de los intercambios totales de un animal, la parte que toca a la actividad de los diversos tipos bioquímicos de oxidaciones.

El primero de estos fascículos (78 págs., 20 frs.), se ocupa de la Teoría de Rubner y de la situación del problema del punto de vista experimental; así como de la repercusión que sobre el cálculo de la acción dinámica, tiene la retención y eliminación del ázoe ingerido; se ocupa de las teorías propuestas para explicar dicha acción dinámica de los prótidos, y otras cuestiones análogas.

El otro fascículo (182 págs., 25 frs.), se ocupa de las etapas del metabolismo de los prótidos capaces de librar calor extra; también, de las investigaciones experimentales concernientes a los caracteres fisiológicos del extra-calor debida a la acción dinámica de los prótidos en cuestión.

Un último capítulo trata el origen de la acción dinámica específica de los prótidos, que es debida a una excitación del sistema nervioso simpático.

Conclusión: el mecanismo exacto de aparición de la acción dinámica específica de los prótidos permanece ignota.

Los autores terminan con un anexo bioquímico y una bibliografía.

N° 643. — CARTAN (ELIE), *Lecons sur la Théorie des Spineurs.* I. *Les Spineurs de Espace à trois dimensions.* 100 páginas; 25 francos; 1938.

Es el fascículo IX de la serie « Exposés de Geométrie », dirigida por el mismo Elías Cartan. El texto ha sido redactado de acuerdo con los apuntes tomados por Andrés Mercier, doctor en ciencias.

Ese término de « spineurs » ha sido introducido por los físicos, en la Mecánica quántica. En su expresión matemática han sido los « spineurs » en cuestión, descubiertos por Cartan en 1913; dan una representación lineal del grupo de rotaciones de un espacio con un número cualquiera de dimensiones.

El objeto de este folleto es, principalmente, desarrollar sistemáticamente la teoría de los « spineurs » dando a esos entes matemáticos una definición puramente geométrica. Lo hace en cuatro capítulos; el primero de ellos trata el espacio euclídeo de *n* dimensiones, rotaciones y vuelcos. El siguiente trata los tensores; representaciones lineales de los grupos; matrices. El capítulo III trata los espinores del espacio tridimensional. El último se ocupa de las representaciones lineales del grupo de rotaciones del espacio tridimensional, real o complejo.

SOCIOS ACTIVOS

Abrinss, Héctor Aníbal
Aguilar, Félix
Albizzati, Carlos M.
Alessi, Juan M.
Alvarez, Raúl J.
Alvarez de Toledo, Belisario
Allends Lezama, Luciano P.
Anastasi, Camilo
Anchorena, Juan E.
André, Enriqus de
Andrioletti, Juan Luis
Añón Suárez, Vicente
Aparicio, Francisco de
Aráoz Alfaro, Gregorio
Arce, Manuel J.
Armani, Aquiles
Arnaudo, Silvio J.
Avila Méndez, Delfín
Bado, Atilio A.
Bachmann, Ernesto
Baglietto, Eduardo E.
Balbiani, Atilio
Baliani, Luis M.
Bancalari, Agustín
Bandoni, Alfredo J.
Barabino Amadeo, S.
Bargna, Juan L.
Barilari, Mariano J.
Barral Souto, José
Barrancos, Leónidas A.
Bscke, Alejandro von der
Berrino, Juan B.
Bertino, José Carlos
Besio Moreno, Nicolás
Bianchi Lischetti, A.
Biggeri, Carlos
Blaquier, Juan
Boaglio, Santiago
Bolognini, Héctor
Bonanni, Cayetano A.
Bontempi, Luis
Bordas, Alejandro F.
Bordenave, Pablo E.
Borzacov, Vladimir
Borruat, Luis A.
Borzi, Ana María
Bosch, Gonzalo
Bosisio, Anecto J.
Bottaro, Juan C.
Bozzini, Luis (h.)
Briano, Juan A.
Bulch, Raúl
Bunge, Juan C.
Buontempo, Guillermo
Burkart, Arturo
Busso, Eduardo B.
Butty, Enrique
Buzzo, Alfredo
Caillet Bois, Teodoro
Calandra, Raúl E.
Canale, Humberto
Canal Feijoo, Bernardo
Capelli, Pedro F.
Carabelli, Juan José
Carbia, Rómulo D.
Carbone, Esteban
Carbonell, José J.
Cárcova, Enrique de la
Carelli, Antonio
Carelli, Humberto H.
Caride Massini, Pedro
Carman, Ernesto
Carrea, Juan Ubaldo
Casacuberta, Antonio
Castellanos, Alberto
Castello, Manuel F.
Castiñeiras, Julio R.
Celasco, Juan L.
Ceppi, Héctor
Cernuschi, Félix
Clos, Enrique C.
Cock, Guillermo E.
Coni Bazán, F. A.
Curti, Orlando P.
Curutchet, Luis
Chanourdis, Enriqus
Chizzini Melo, Aníbal F.
D'Ascoli, Lucio
Dassen, Claro C.
Dasso, Héctor
Dasso, Ricardo L.
Ds Cssare, Elías A.
Ds Fina, Armando L.
De la Ini, Juan E.
Dsllepiane, Luis J.
Deulofeu, Venancio
Díaz, Emilio C.
Dieulefait, Carlos E.
Doello-Jurado, Martín
Dobranich, Jorgs W.
Domínguez, Juan A.
Dubecq, Raúl E.
Dueñas, José
Duhau, Luis
Dupont, Enriqus
Durañona y Vedia, A.
Durrieu, Mauricio
Escudero, Antonio
Escudero, Pedro
Faré, Santo S.
Fernández, Alberto J.
Fsrnández Díaz, A.
Fernández Long, S.
Figini, Angel
Figuerero, Hernando W.
Fischer, Gustavo Juan
Flores, Emilio M.
Fiorlani, Luis
Florit Carlos J.
Fossa Mancini, E.
Franceschi, Alfredo
Fürnkorn, Divico A.
Gadda, Carlos Manuel
Galmarini, Alfredo G.
Gando, Alfredo R.
Gandolfi Herrero, Augusto
Gandolfo, José S.
Gascón, Alberto
Gaspar, Fernando L.
Géneau, Carlos E.
Gerardi, Donato
Ghigliazza, Sebastián
Giagnoni, Bartolomé E.
Giannone, José
Gradin, Carlos
Grieben, Arturo
Gutiérrez, Ricardo J.
Haussler, Emilio
Herbin, Luis A.
Hermitts, Enriqus
Herrera Vegas, M.
Herzer, Bsrnardo
Hickethier, Carlos F.
Hofmann, Herbert
Hortal, José Angsl
Houssay, Bernardo A.
Hoyo, Arturo
Igartúa, Luis María
Irigoyen, Luis H.
Isetta, José
Ivanissevich, Ludovico
Jorge, José M.
Jakob, Cristofredo
King, Diarmid O.
Kinkelin Pelletán, J. C. ds
Knoche, Walter
Kragilevich, Nicolás T.
Krapf, Eduardo
Labarthe, Julio
Lagunas, Simón
La Menza, Francisco
Laporte, Luis B.
Larco, Esteban
Lasso, Alfredo L.
Latzina, Eduardo
Lignléres, Roberto
Lizer y Trelles, C. A.
Lombardi, Alberto
Loudet, Osvaldo
Loyarte, Ramón G.
Lugones, Arturo M.
Llauró, José
Mac Donagh, E. J.
Magnin, Félix J.
Magnin, Jorgs
Mainini, Carlos
Mailoi, Emilio
Mamberto, Benito
Marcó del Pont, E.
Marchionatto, Juan B.
Maresca, Antonio J.
Martignone, Eduardo
Marotta, F. Pedro
Marotta, R. Armando
Mata, Leopoldo
Méndez, Julio
Meoli, Gabrisl
Meoli, Humbsrto
Mercau, Agustín
Meriggi, Juan C.
Mermoz, Francisco A.
Molfino, José F.
Molina Carranza, L.
Molle, Clotilde C.
Montes, Vicente E.
Moraguss Bernat, Jaime
Moreno, Evaristo V.
Nágsra, Juan José
Natale, Alfredo
Natale, Ernesto
Negrete, Lucía
Negri, Mario L.
Nielsen, Juan
Novelli, Armando
Oliveri, Alfredo B.
Ortega Belgrano, Raúl
Ortiz, Aníbal A.
Ortiz ds Rosas, Jorge
Otamendi, Gustavo
Ottonello, Héctor
Páez, José María
Page, Franklin Nelson
Paitovi y Oliveras, A.
Parodi, Edmundo
Parodi, Lorenzo R.
Parodi, Rodolfo
Pasman, Rodolfo E.
Pastore, Franco
Paz Anchorena, José M.
Pérez Hernández, A.
Perrone, Caystano
Pestalardo, Agustín
Pini, Aldo S.
Platz, Hubert
Podestá, Juan Carlos
Posadas, Carlos
Quinos, José Luis
Quinterno, Bruno F.
Quiroga, Pedro R.
Raimondi, Alejandro
Raffo, Bartolomé M.
Ramaccioni, Danilo
Ramallo, Carlos M.
Ratto, Héctor R.
Rebuelto, Antonio
Rebuelto, Emilio
Rsece, William Asher
Repetto, Blas Angsl
Repossini, José
Ringuelet, Emilio J.
Rissotto, Atilio A.
Rivarola, Rodolfo
Robles, Angel A.

Rodríguez Aravena, S.
Rodríguez, Germinal
Rodríguez, Miguel
Roffo, Angel H.
Roffo, Juan
Roldán, Raimundo
Romero Brest, Enrique
Rokotnitz, Otto
Rospide, Juan
Rossell Soler, Pedro
Ruata, Luis E.
Ruíz Moreno, Isidoro
Ruiz Moreno, Adrián
Rumi, Tomás J.
Sabaria, Enrique
Salomón, Hugo
Sánchez, José Ricardo
Sánchez, Gregorio L.
Sánchez Díaz, Abel
Sánchez Sorondo, M. G.
Sanromán, Iberio
Santángelo, Rodolfo
Sarhy, Juan F.
Sarrabayrouse, Eugenio
Savon, Marcos A.
Schnack, Benno J.
Schulz, Guillermo
Selva, Domingo
Selzer, Samuel
Sesma,, Angel
Sheahan, Juan F.
Silva, Leónidas L.
Simonoff, Miguel
Simons, Hellmut
Siri, Luis
Sobral, Arturo
Solari, Emilio F.
Solari, Miguel A.
Sordelli, Alfredo
Soler, Frank L.
Spinetto, David J.
Spota, Víctor J.
Storni, Segundo R.
Taiana, Alberto F.
Taiana, Jorge
Tarragona, José
Tello, Eugenio
Torre Bertucci, Pedro
Torello, Pablo
Tossini, Luis
Trelles, Rogelio A.
Trucco, Sixto E.
Valeiras, Antonio
Valentini, Argentino
Valentinuzzi, Máximo
Vallebella, Colón B.
Vanossi, Reinaldo
Varela Gil, José
Vecchi, Arístides de
Vela Huergo, Julio
Verdaguer, Juan
Veyga, Francisco de
Vidal, Eduardo
Vignati, Milcíades A.
Villalobos D., C.
Vignaux, Juan C.
Vinardell, Alberto
Volpatti, Eduardo
Wainer, Jacobo
Wauters, Carlos
Wernicke, Raúl
White, Guillermo J.
Williams, Adolfo T.
Wysztelewski, W. de
Zamboni, Agustín
Zappi, Enrique V.
Zavalla, Carlos M.
Zuloaga, Angel M.

SOCIOS ADHERENTES

Bazzanella, José
Cotlar, Mischa
Devoto, Carlos Alberto
Ferramola, Raúl
Folcini, Martín L. G.
García, Eduardo D.
Goyena, Ricardo J.
Gorchs, Agustín C.
Laclau, Juan Pedro
Magne de la Croix, P. A.
Mailhos, Luis E.
Milesi, Emilio Angel
Quevedo Capdevila, Eduardo A.
Recoder, Roberto F.
Repetto, Cayetano
Rusconi, Carlos
Sadosky, Manuel
Somonte, Eduardo
Vistalli, Alina M.
Wechsler, Wolf

CASAS ADHERENTES

Angel Estrada y Cía.
Benvenuto y Cía.
Lutz, Ferrando y Cía.
Hijos de Atilio Massone
Otto Hess, S. A.
T. Gr. "Tomás Palumbo"
Jacobo Peuser, S. A. Ltda.

SOCIO VITALICIO

Huergo, Eduardo María

MIEMBROS PROTECTORES DE LA ORGANIZACION DIDACTICA DE BUENOS AIRES

Anchorena, Juan E.
Besio Moreno, Nicolás
Tornquist, E. y Cía. (Lda.)

SECCION CORDOBA

COMISION DIRECTIVA

Presidente, Dr. Juan Olsacher; Vice-presidente, Dr. Miguel Fernández; Vice-presidente, Ing. Daniel A. García; Secretario de actas, Dr. Guillermo V. Stuckert; Secretario de correspondencia, Prof. Tulio Mácola; Tesorero, Sr. Bernardo Pilotto; Pro-tesorero, Dr. Carlos C. Hosseus; Vocales: Ing. Clodoveo Pascualini; Ing. Jorge E. Bobone; Ing. Luis Chechi; Ing. Ambrosio L. Taravella; Dr. Federico Padula; Dr. José Carlomagno; Dr. Meade L. Zimmer; Sr. Enrique Sparn.

SOCIOS ACTIVOS

Aguiar, Henoch D.
Bobone, Jorge E.
Brandan, Ramón A.
Broglia, Alberto A.
Buteler, Jesús E.
Camilloni, Carlos
Carlomagno, José
Chaudet, Enrique
Checchi, Luis
Deheza, Eduardo
Esteban, Fernando
Fernández, Miguel
Fontana, Lorenzo F.
García, Daniel
Godoy, Salvador A.
Gordillo, Pedro N.
Hosseus, Carlos Curt
Larrauri, Agustín C.
Mácola, Berardo A.
Mácola, Tulio
Mirizzi, Pablo Luis
Ninci, Raúl T.
Olaf Lützow, Holm
Olsacher, Juan
Padula, Federico
Pasqualini, Clodoveo
Peláez J. Gambastiani de

Piiotto, Bernardo
Ponce Laforgue, Carlos
Rothlin, Edwin
Schmiedecke, Augusto
Sparn, Enrique
Stuckert, Guillermo V.
Taravella, Ambrosio L.
Trebino, Natalio
Urciolo, Victorio
Vercello, Carlos
Yadarola, Mauricio L.
Zimmer, Mesde L.

SECCION SANTA FE

COMISION DIRECTIVA

Presidente, Dr. Gustavo A. Fester; Vice-presidente, Dr. José Piazza; Secretario de correspondencia, Ing. Quím. Francisco A. Bertuzzi; Secretario de actas, Ing. Quím. José Cruellas; Tesorero, Ing. Quím. Enrique Virasoro; Vocal 1º, Ing. José Babini; Vocal 2º, Prof. Rolando Hereñú; Vocal suplente 1º, Prof. Julio Salaber; Vocal suplente 2, Ing. Quím. Guillermo Berraz; Encargado de Biblioteca y Canje, Ing. Quím. Rodolfo Rouzaut; Encargado de Publicaciones, Ing. José Babini.

SOCIOS ACTIVOS

Anadón, Leónidas
Ariotti, Juan Carlos
Babini, José
Benet, Pedro José
Berraz, Guillermo
Bertuzzi, Francisco A.
Bonazzola, César J.
Borzone, Rodolfo
Bossi, Celestino
Caballero, Martín A.
Cerana, Miguel
Claus, Guillermo
Cohan, Marcos
Courault, Pablo
Crouzeilles, A. L. de
Cruellas, José
Christen, Carlos
Christen, Rodolfo G.
Damianovich, Horacio
Falco, Federico
Fester, Gustavo A.
Frenguelli, Joaquín
Gollán, Josué (h.)
Gschwind, Eduardo P.
Hereñú, Rolando
Hotschewer, Curto
Jullá, Tolrá Antonio
Kleer, Gregorio
Lachaga, Dámaso A.
Mai, Carlos
Mántaras, Fernando
Marelli, Hipólito
Martino, Antonio E.
Montpellier, Luis Marcos
Mounier, Celestino
Muzzio, Enrique
Nigro, Angel
Niklison, Carlos A.
Oliva, José
Peresutti, Luis
Piazza, José
Piñero, Rodolfo
Pozzo, Hiram J.
Ragonese, Arturo E.
Reinares, Sergio
Rouzaut, Rodolfo
Salaber, Julio
Salgado, José
Santini, Bruno L. P.
Schivazappa, Mario
Simonutti, Atilio A.
Tissembaum, Mariano
Urondo, Francisco E.
Virasoro, Enrique

SECCION MENDOZA

COMISION DIRECTIVA

Presidente, Dr. Juan B. Lara; Vice-presidente, Ing. Agr. José Raúl Ponce; Secretario, Ing. Agr. Julio Tolosa (h); Tesorero, Ing. Cayetano C. Piccione; Bibliotecario, Sr. Adrián Ruíz Leal; Vocales: Dr. Eduardo Carette; Dr. Mario Bidone; Ing. Alfredo Rosenthal; Sr. Manuel Tellechea; Ing. Agr. Rafael E. Pontis.

SOCIOS ACTIVOS

Alurralde, Juan Carlos
Anzorena, Jacinto
Ayala Castagnino, G.
Basso, Germinal
Benegas, Raúl
Bidone, Mario
Borsani, Carlos Pablo
Burgoa, Pedro A.
Carette, Eduardo
Castillo, José
Croce, Francisco M.
Espinosa, Norberto A.
Flor Alvarado, José M.
Gabrielli, Francisco J.
Galeano, Edgardo
García, José Federico
Godoy Vergelin, G.
Gomensoro, José N.
Granzella, Sinibaldo
Guevara, José R.
Guiard, Ricardo
Jofré, Alberto L.
Lara, Juan B.
Lucero, Braulio G.
Lugones, Manuel G.
Magistretti, Guillermo
Maneschi, Ernesto
Maroso, José Angel
Maveroff, Aquiles
Mayorga, Santiago C.
Miyara, Salomón
Navarro Correas, José A.
Paganotto, Juan P.
Pelaia, Dante
Piccione, Cayetano C.
Ponce, José Raúl
Pontis, Rafael E.
Richard, Alfonso E.
Rosales, Ranulfo S.
Rosenthal, Alfrado
Ruíz, Aníbal
Ruíz Leal, Adrián
San Martín, José Benito de
Serra, Luis Angel
Silvestre, Tomás
Stura, Angel C.
Tellechea, Manuel
Tolosa, Julio (h)
Toso, Juan F.
Villanueva, Miguel Angel

SECCION LA PLATA

COMISION DIRECTIVA

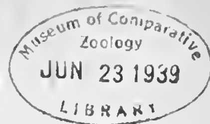
Presidente, Dr. Carlos A. Sagastume; Secretario, Ing. Adolfo P. Grissl; Tesorero, Dr. Carlos Teobaldo; Vocales: Dr. Hilarlo Magliano, Dra. Juana Cortelezzi; Ing. Juan Sabato; Dr. Federico E. Christmann.

SOCIOS ACTIVOS

Alsina Fuertes, Fidel
Amarante, Pedro C.
Angil, Jerónimo
Arroyo Basaldúa, Víctor M.
Basualdo, Washington S.
Bauer, Conrado
Bonet, Luis A.
Canals Frau, Salvador
Cortelezzi, Juana
Crespi Gherzi, Rodolfo A.
Christmann, Federico E
Daló, Héctor R.
Ferrari, Obdulio J. F.
Gascón, Jorge
Gershánik, Simón
Giovambattista, Humberto
Grisi, Adolfo P.
Loedel Palumbo, Enrique
Mc Loughlin, Rogelio P.
Magliano, Hilario
Marmonti, Angel
Massimino, Blas
Méndez, José D.
Micheletti, Luis A.
Nico, Raúl
Oliva, Virgilio
Paternosto, Pedro G.
Pera, Tomás Carlos
Platzceck, Ricardo P.
Rodríguez, Marcelo R. N.
Sabato, Juan
Sáez. Francisco A.
Sagastume Berra, A. E
Sagastume, Carlos A.
Scheggia, Eduardo R.
Teobaldo, Carlos
Toranzos, Fausto L.
Trejo, César A.
Ucha Udabe, Manuel
Vucetich, Danilo C.
Wilkens, Alejandro

SOCIOS CORRESPONDIENTES

Aguilar y Santillán, R.	México
Alvarez, Antenor	Sgo. del Estero
Amaral, Afranio de	San Pablo (Br.)
Avendaño, Leónidas	Lima
Bachmann, Carlos J.	Lima
Bodenbender, Guillermo	Córdoba
Bolívar, Ignacio	Madrid
Bonarelli, Guido	Gubbio (It.)
Borel, Emile	París
Bragg, William Henry	Londres
Bruch, Carlos	Olivos (B. A.)
Cabrera, Blás	Madrid
Campos Porto, Pablo	Río de Janeiro
Carabajal, Melitón M.	Lima
Darmois, Eugenio	Nancy (Fr.)
Darmois, Georges	Paris
Dávila, Rubén	Santiago (Ch.)
Escomel Edmundo	Arequipa (P.)
Fiebrig, Carlos	Munich (Al.)
Fontecilla Larrain, Arturo	Santiago (Ch.)
Fort, Michel	Lima
González del Riego, Felipe	Lima
Greve, Germán	Santiago (Ch.)
Guinier, Philibert	Nancy (Fr.)
Hadamard, Jacques	París
Hauman, Luciano	Bruselas
Hernández, Juvenal	Santiago (Ch.)
Hijar y Haro, Luis	México
Janet, Pierre	París
Jiménez de Asúa, Luis	Madrid
Kelper, Guillermo	Berlin
Kinart, Fernando	Amberes
Lahille, Fernando	Tarn (Fr.)
Langevin, Paul	París
Levi Civita, Tulio	Roma
Lobo, Bruno	Río de Janeiro
Mardones, Francisco	Santiago (Ch.)
Molina, Enrique	Concepc. (Ch.)
Monjaráz, Jesús E.	México
Moretti, Gaetano	Milán
Oliver Schneider, Carlos	Santiago (Ch.)
Pereira d'Andrade, Lencastre	Nova Goa (I.
Perrin, Tomás G.	México
Perrine, Carlos D.	Córdoba
Pi y Suñer, Augusto	Barcelona
Porter, Carlos E.	Santiago (Ch.)
Reyes Cox, Eduardo	Santiago (Ch.)
Rowe, Leo S.	New York
Shepperd, William R.	Wáshington
Tello, Julio C.	Lima
Valle, Rafael H.	México
Vélez, Daniel M.	México
Villarán, Manuel V.	Lima
Vitoria, Eduardo	Barcelona
Volterra, Vito	Roma



ANALES

DE LA

SOCIEDAD CIENTIFICA ARGENTINA

ADOPTADOS PARA SUS PUBLICACIONES POR LA

ACADEMIA NACIONAL DE CIENCIAS EXACTAS, FISICAS Y NATURALES

DIRECTOR: EMILIO REBUELTO

ABRIL 1939 — ENTREGA IV — TOMO CXXVII

SUMARIO

BUENOS AIRES

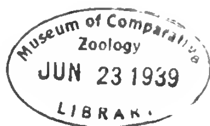
CALLE SANTA FE 1145

1939

SOCIEDAD CIENTIFICA ARGENTINA

ADVERTENCIA. — Los colaboradores de los Anales son personalmente responsables de la tesis sustentada en sus escrito. Tienen derecho a la corrección de do pruebas. Los que deseen tirada aparte de 50 ejemplares de sus artículos, deben solicitarla por escrito. Los manuscritos, correspondencia, etc. se enviarán a la sede social, Santa Fe 1145.

Impreso en los Talleres Gráficos "TOMAS PALUMBO" - La Madrid 321-325 - Buenos Aires



SOBRE LAS FUNCIONES POLÍGENAS DE VARIABLE COMPLEJA Y BICOMPLEJA HIPERBÓLICA (*)

POR

J. C. VIGNAUX

INTRODUCCION. — M. POMPEIU, ha creado en estos últimos años, una nueva y fecunda rama de la teoría de funciones a la cual han aportado ya, valiosas contribuciones y numerosas aplicaciones a la Física Matemática, los recientes trabajos de KASNER, NICOLESCO, CALUGAREANO, THEODORESCO, y otros (1).

El fin principal de esta teoría, es el estudio de las funciones complejas de una variable compleja ordinaria

$$w = f(z) = u(x, y) + i\, v(x, y) \quad , \quad (i^2 = -1)\,,$$

sin imponer a sus componentes reales u y v las condiciones de mono eneidad de CAUCHY-RIEMANN.

En esta teoıía, juega un rol importante la noción de derivada areolar (POMPEIU) y la fórmula de POMPEIU, que generaliza a las funciones polígenas, la célebre fórmula de CAUCHY, de las funciones holomorfas (2).

(*) Trabajo entregado para su publicación en Enero de 1937.

(1) Las investigaciones de KASNER, HEDRICK, ZUGOLD, WESTFALL, y HOFMANN, tienen un caracter puramente geométrico.

(2) Una exposición de los fundamentos de esta teoría y su extensión a las funciones de varias variables, hemos dado en un curso del Colegio Libre Superior correspondiente al año 1933. Véase: *Anales de la Soc. Científica Argentinal* t. CXXI (1935). Sobre las funciones polígenas de varias variables véase una importante memoria del DR. E. MARTINELLI. *Reale Aceademia d'Italia*, nº 3, (1937).

Nos proponemos desarrollar, en la primera parte de esta memoria, una teoría análoga, para las funciones complejas de una variable compelja hiperbólica ([1]); es decir, funciones de la forma

$$f(z) = u(x, y) + j\, v(x, y) = j_1 P(z', z'') + j_2 Q(z', z'')$$

donde

$$z = x + j\, y = z' j_1 + z'' j_2$$

j, es la unidad imaginaria hiperbólica ($j^2 = +1$) y j_1, j_2 son las unidades imaginarias isótropas; sin imponer, a sus componentes la condición de *monogeneida hiperbólica* ([1]).

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \quad , \quad \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial x} \quad \text{o bien} \quad \frac{\partial P}{\partial z''} = 0 \, , \, \frac{\partial Q}{\partial z'} = 0 \, .$$

En la segunda parte de este trabajo, se extienden los resultados de la primera, a las funciones de variable *bicompleja* hiperbólica

$$z = x + j y \qquad (j^2 = +1)$$

donde x e y son dos complejos ordinarios

$$x = x_1 + i x_2 \quad , \quad y = y_1 + i y_2. \qquad (i^2 = -1)$$

A este tipo de bicomplejo se reduce fácilmente el hipercomplejo (cuartenion)

$$\alpha = x_1 + i x_2 + j x_3 + k x_4$$

considerado recientemente por M. Futagawa, el cual desarrolla con método muy complicado, en dos extensas memorias, el Algebra de estos hiperbicomplejos ([2]).

([1]) El estudio de las funciones *analíticas de una variable compleja hiperbólica*, ha sido hecho en el siguiente trabajo: A. DURAÑONA Y VEDIA - J. C. VIGNAUX. *Sobre la teoría de lsa funciones de una variable complcja hiperbólica*. Contribución al Estudio de las C.F.M. La Plata. (1935). E. 2.

Un estudio de las funciones polígenas de variable *complcja dual*, he dado en mi memoria de las *Contribuciones*, (1936) F. 3, 4, y en la Nota I. (*Rendiconti della R. Accademia N. dei Lincei*, Vol. XXVII, giugno 1938).

([2]) M. FUTAGAWA, *On the theory of a quaternary variable* (« Te Tôhoku Math. Journal », v. 29 (1928), pags. 175-222; v. 35 (1932), págs. 69-120).

La reducción de este cuaternion, a la forma normal o isótropa

$$\alpha = x + jy = t'j_1 + t''j_2$$

y los resultados expuestos en la primera parte, nos permite obtener todos los resultados de Futagawa y otros nuevos con método mucho más simple y directo.

El trabajo abarca varios capítulos, que comprende las siguientes cuestiones. En el capítulo I, se estudian las propiedades fundamentales del número complejo hiperbólico, completando en varios puntos un trabajo anterior del autor.

En el Capítulo II, se introduce la noción de *derivada radial* y se dan algunas fórmulas fundamentales. Luego se definen la *derivada areolar hiperbólica* y la *derivada simétrica hiperbólica,* como operadores diferenciales; estableciéndose las relaciones que ligan a éstas con la derivada radial. Concluye el capítulo, con la cuestión de determinar la derivada de una función polígena, respecto a otra función polígena hiperbólica.

Una clase muy particular de estas funciones, es la formada por las funciones holomorfas y seudo-holomorfas. Dichas funciones holomorfas, tienen la particularidad de desempeñar el papel de constantes a los efectos de la derivación areolar hiperbólica. Nuevas propiedades de estas funciones y de las funciones complejas de una variable real, se dan aquí.

Introdúcese en el Capítulo III, la noción de integral para las funciones contínuas y se prueban dos fórmulas fundamentales relativas a las integrales de las funciones polígenas. Termina el mismo con las nociones de derivada areolar y de derivada simétrica como operadores integrales.

En el Capítulo IV se desarrolla el Algebra del bicomplejo hiperbólico.

Finalmente en el Capítulo V, se desarrolla la teoría de las funciones polígenas de variable bicompleja hiperbólica.

PARTE I

CAPITULO I

EL NUMERO COMPLEJO HIPERBOLICO

1. GENERALIDADES. — En el estudio del número complejo binario, se presentan tres tipos fundamentalmente distintos; los complejos ordinarios $a + bi$ donde $i^2 = -1$, los complejos hiperbólicos $a + bj$, con $j^2 = +1$, y los complejos duales $a + bk$ con $k^2 = 0$. De estos tres tipos, es únicamente la clase formada por los complejos ordinarios, los únicos que cumplen con todas las reglas formales del cálculo algebraico [1].

En esta parte, vamos a estudiar, las propiedades y las operaciones fundamentales de los números complejos hiperbólicos, completando en varios puntos una memoria anterior [2].

2. *Definiciones.* — *Se llama número complejo hiperbólico, el par ordenado* (a, b) *de dos números reales, los cuales cumplen a las siguientes condiciones.*

Igualdad. Dos complejos hiperbólicos (a, b), (a', b') son iguales, cuando se verifica

$$a = a', \quad b = b'$$

y se escribe

$$(a, b) = (a', b')$$

La igualdad de dos complejos hiperbólicos es por tanto *reflexiva*, *simétrica* y *transitiva*.

Dos complejos (a, b), (a', b') que no son iguales, se dicen desiguales y se pone en tal caso

$$(a, b) \neq (a', b') .$$

(1) Véase: E. GIGLI, *Dei numeri complessi a due e a più unità. Questioni...* F. ENRRIQUE. Vol. I, pág. 495.

(2) J. C. VIGNAUX, *Sobre el número complejo hiperbólico y su relación con la geometría de Borel*: Contribuciones... Vol. I, E. 1° (1935).

Respecto a la clase de los números complejos hiperbólicos, hay una brevísima indicación en las obras de L. VAN DER WAERDEN: *Moderne Algebra* 2. I. (pág. 150, n° 5 (*a*); STOLZ-GMEINER: *Theoretische Arithmetik* t. II, (pág. 227) y en el artículo de E. STUDY de la *Enzyklopadie d. mahtr. Wessenschaften* I. Bd 155.

Suma. Se llama suma de los complejos hiperbólicos (a, b), (a', b'), al complejo hiperbólico $(a + a', b + b')$; pondremos

$$(a, b) + (a', b) = (a + a', b + b') .$$

La suma es por tanto *conmutativa* y *asociativa.*

Esta definición no difiere de la suma de los números complejos ordinarios.

Producto. El producto de dos complejos hiperbólicos (a, b), $a', b')$ es por definición, el complejo hiperbólico $(aa' + bb', ab' + a'b)$; pondremos

$$(a, b) \times (a', b') = (aa' + bb', ab' + a'b) .$$

El producto es *conmutativo* y también *asociativo* como fácilmente se verifica.

La potencia de exponente n entero y positivo del complejo (a, b) está definida por la relación

$$(a, b)^n = (a, b) \times (a, b) \ldots \overset{n}{\smile} \times (a, b) .$$

Unidad real e hiperbólica. — El número complejo hiperbólico $(a, 0)$ es idéntico al número real a; pondremos

$$(a, 0) \equiv a ,$$

Un complejo hiperbólico, se reduce a un número real, solamente cuando su segundo componente es nula.

El complejo $(0, 0) = 0$ representa el *cero* escrito en forma de complejo hiperbólico.

El número complejo hiperbólico $(1, 0) = 1$, es la *unidad real,* mientras que el número complejo $(0, 1)$ es la *unidad hiperbólica* la cual indicaremos con el símbolo: $j = (0, 1)$. Se tiene por tanto

$$(0, 1) \times (0, 1) = (0 + 1, 0 + 0) = (1, 0) = 1$$

es decir

$$j \times j = j^2 = + 1 .$$

De aquí resulta, como valor de las potencias sucesivas de la unidad j

$$j^1 = j \quad , \quad j^2 = + 1 \quad , \quad j^3 = j \cdot j^2 = j \quad , \quad j^4 = j^2 \cdot j^2 = + 1$$

es decir

$$j^{2n} = +1 \quad , \quad j^{2n+1} = j \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots)$$

con la convención que

$$j^0 = 1 \; .$$

Además se tiene

$$(b, 0) \times (0, 1) = (0, b)$$

es decir

$$bj = jb = (0, b) \, .$$

Forma normal. — Dado el complejo hiperbólico (a, b), se puede siempre escribir en la forma

$$(a, 0) + (0, b) = (a, b)$$

y como

$$(a, 0) = a \quad , \quad (0, b) = bj$$

resulta

$$(a, b) = a + bj$$

que constituye la *forma normal* del complejo hiperbólico. Los números reales a y b son respectivamente, la *primer* y *segunda componente* del complejo $a + bj$.

Resulta entonces

$$(a + bj) + (a' + b'j) = (a + a') + (b + b')j$$

y

$$(a + bj) \times (a' + b'j) = (aa' + bb') + (ab' + a'b)\,j$$

3. *Unidades hiperbólicas isótropas.* — Llámase *unidades isótropas* a los números complejos hiperbólicos

$$j_1 = \frac{1}{2}\,(1 + j) \quad , \quad j_2 = \frac{1}{2}\,(1 - j) \, .$$

Se tiene entonces

$$j_1^2 = j_1 \quad , \quad j_2^2 = j_2 \quad , \quad j_1 \cdot j_2 = j_2 \cdot j_1 = 0$$

y en general

$$j_1^n = j_1 \quad , \quad j_2^m = j_2 \quad , \quad j_1^m \cdot j_2^n = 0$$

para todo entero positivo n y m.

Además; resulta que

$$j_1 + j_2 = 1 \quad , \quad j_1 - j_2 = j \; ; \qquad [1]$$

la suma de las unidades isótropas es igual a la unidad real, mientras que su diferencia es igual a la unidad imaginaria hiperbólica.

Forma isótropa. — Dado el complejo hiperbólico $a + bj$, se puede escribir teniendo en cuenta las relaciones [1]

$$a + bj = (a + b)\, j_1 + (a - b)\, j_2$$

y poniendo

$$a + b = A \quad , \quad a - b = B \; ,$$

resulta finalmente

$$a + bj = A j_1 + B j_2$$

que llamaremos la *forma isótropa* del complejo dado; y a los números reales A y B su primer y segunda componente isótropas respectivamente.

El pasaje de la forma normal a la forma isótropa y recíprocamente se obtiene mediante las relaciones siguientes

$$a + b = A \quad , \quad a - b = B$$

y

$$a = \frac{1}{2}(A + B) \quad , \quad b = \frac{1}{2}(A - B) \, .$$

De aquí, resulta

$$a = a + 0j = a j_1 + a j_2 = a\,(j_1 + j_2) = a \; ;$$

luego, el complejo hiperbólico: $a' j_1 + a'' j_2$ se reduce a un *número real* a, si $a' = a'' = a$.

La forma isótropa de un complejo hiperbólico puro: $\alpha = bj$ es

$$\alpha = b j_1 - b j_2 = b\,(j_1 - j_2) = bj \; .$$

Observación. — La expresión del número complejo en su « forma isótropa » y las propiedades de las « unidades isótropas »

$$j_1^2 = j_1 \quad , \quad j_1 j_2 = j_2 j_1 = 0 \quad , \quad j_2^2 = j_2 \, ,$$

característica exclusiva de estos números complejos a dos unidades distintas; prueba que este sistema de números complejos es la « suma directa » de dos *cuerpos isomorfos*, con el cuerpo de los números reales. (VAN DER WAERDEN: *Moderne Algebra*: 2. I, pág. 150, nº 5).

La denominación de «unidades isótropas» y de « expresión isótropa » que hemos introducido responden al hecho de adoptar como ejes para representar estas unidades, las rectas *isótropas reales* de la geometría hiperbólica de BOREL-KLEIN; rectas que coinciden con las dos rectas *características* que pasan por el origen, de la ecuación hiperbólica

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \, ,$$

a la cual satisfacen las componentes reales de una función holomorfa hiperbólica. Por esto, podríamos denominarlas también « unidades características » reservando la denominación « unidades » a las unidades 1 y j.

Operaciones directas. — Las operaciones fundamentales directas de dos complejos de la forma isótropa, se obtienen en la forma siguiente.

Sean

$$A = \alpha j_1 + \beta j_2 \quad , \quad A' = \alpha' j_1 + \beta' j_2$$

los dos complejos hiperbólicos; la suma está definida por la relación

$$A + A' = (\alpha + \alpha') \, j_1 + (\beta + \beta') \, j_2$$

y el producto, por

$$A \times A' = \alpha\alpha' j_1 + \beta\beta' j_2 \, .$$

La potencia de exponente entero y positivo por la relación

$$(\alpha j_1 + \beta j_2)^n = (\alpha j_1 + \beta j_2) \times (\alpha j_1 + \beta j_2) \times \ldots \times (\alpha j_1 + \beta j_2)$$

es decir

$$(\alpha j_1 + \beta j_2)^n = \alpha^n j_1 + \beta^n j_2$$

4. *La anulación del producto.* — El producto de un complejo hiperbólico (a, b) por el complejo nulo $(0, 0)$, es *cero*, puesto que

$$(a, b) \times (0, 0) = (a \times 0 + b \times 0) + (a \times 0 - b \times 0) = (0, 0) = 0 .$$

Si se tiene, el producto de varios complejos hiperbólicos, uno de los cuales es nulo, el producto es también cero.

La recíproca no se verifica necesariamente; así, por ejemplo,

$$(3 + 3j) \times (4 - 4j) = 0$$

Por tanto, *es condición suficiente pero no necesaria para que sea nulo el producto de dos complejos hiperbólicos, que uno de sus factores sea cero.*

Sean

$$\alpha = a + bj \qquad \text{y} \qquad \beta = x + yj$$

dos complejos no nulos y veamos cual es la condición necesaria para que su producto sea *nulo*. La condición

$$\alpha \, . \, \beta = (a\,x + b\,y) + (a\,y + b\,x)\,j = 0$$

implica que

$$a\,x + b\,y = 0 \quad [1] \qquad a\,y + b\,x = 0 \qquad [1]$$

De la (1) resulta

$$x = -\frac{a}{b}\,y \,.$$

que substituyendo en la (2), se obtiene

$$(a^2 - b^2)\,y = 0$$

y como: $y \mp 0$, deberá ser entonces

$$a^2 - b^2 = 0$$

de donde resulta que $a = \pm b$.

Luego, para

$$a = +b \quad \text{resulta} \quad x = -$$

$$a = -b \quad \text{»} \quad x = y$$

por tanto, los productos

$$(a + aj) \times (x - yj) = 0$$

y

$$(a - aj) \times (x + yj) = 0$$

cualquiera sean las componentes a y x.

Si se ponen α y β en su forma isótropa

$$\alpha = Aj_1 + Bj_2 \quad , \quad \beta = Xj + Yj_2 \, ,$$

entonces resulta

$$a + aj = 2\,aj_1 \quad , \quad x - xj = 2\,xj_2$$

$$a - aj = 2\,aj_2 \quad , \quad x + xj = 2\,xj_1$$

y las relaciones (3) y (4), nos dan

$$2\,aj_1 \times 2\,xj_2 = 0$$

$$2\,aj_2 \times 2\,xj_1 = 0$$

Dados los complejos: $c \pm cj$; $d \pm d'j$, los números

$$c + cj = 2\,cj_1 \quad , \quad d + dj = 2\,dj_1$$

y

$$c - cj = 2\,cj_2 \quad , \quad d - dj = 2\,dj_2$$

llamaremos complejos de la *misma especie*.

Luego; *la condición necesaria y suficiente para que el producto de dos complejos hiperbólicos distintos de cero sean nulos es que sus factores sean de distinta especie.*

Llamaremos complejos hiperbólicos *conjugados* a los complejos

$$\alpha = a + bj \quad \text{y} \quad \bar{\alpha} = a - bj$$

Se tiene

$$(a + bj) + (a - bj) = 2\,a$$

y

$$(a + bj) \times (a - bj) = a^2 - b^2$$

es decir, su suma y su producto son números reales.

Llamaré *norma hiperbólica del complejo* $a + bj$, al número: $a^2 - b^2$ e indicaremos

$$Nh\ (a + bj) = a^2 - b^2 .$$

La forma isótropa de dos complejos hiperbólicos conjugados es

$$\alpha = A j_1 + B j_2 \qquad \bar{\alpha} = B j_1 + A j_2$$

y de la norma hiperbólica.

$$Nh\ (A j_1 + B j_2) = A \,.\, B \ .$$

Llamaré *módulo* o *valor* absoluto del complejo $a + bj$ e indicaremos con $| a + bj |$, el número real y positivo

$$\sqrt{a^2 + b^2}$$

Si el complejo $a + bj$ es nulo, resulta que $| a + bj | = 0$ y recíprocamente; *luego la condición necesaria y suficiente para que un complejo sea nulo es que su módulo sea cero.*

De la definición de suma se concluye que *el módulo de una suma de dos complejos hiperbólicos es menor o igual a la suma de los módulos de sus términos y mayor o igual que su diferencia.*

Además se tiene

$$| A j_1 + B j_2 | \leq \frac{| A | + | B |}{\sqrt{2}}$$

5. *Divisor de cero.* — Diremos que el complejo hiperbólico $\alpha = a + bj$ es un *divisor de cero*, si existe un complejo β, *no nulo* tal que

$$\alpha \times \beta = 0$$

El número α deberá ser necesariamente de la forma $a \pm aj$; por tanto resulta

$$N\ (\alpha) = a^2 - a^2 = 0$$

Recíprocamente, si se verifica la relación: $N(\alpha) = 0$ se tiene

$$a^2 - b^2 = (a + b)\ (a - b) = 0$$

luego

$$a = b \quad , \quad a = - b$$

y los complejos hiperbólicos

$$a + aj \quad , \quad a - aj$$

son divisores de cero. Portanto: *es condición necesaria y suficiente para que el complejo hiperbólico $a + bj$ sea un divisor de cero, que su norma hiperbólica sea cero.*

Si el complejo $a + bj$ se pone en su forma isótropa

$$a + bj = (a + b)\, j_1 + (a - b)\, j_2 = A j_1 + B j_2$$

se tiene

$$N\,(a + bj) = A . B \,.$$

La condición: $N(a + bj) = 0$, equivale por tanto a la

$$A . B = 0$$

Si

$$B = 0 \quad , \quad A \neq 0 \quad , \quad \text{resulta} \quad a = b$$

Si

$$A = 0 \quad , \quad B \neq 0 \quad , \quad \text{»} \quad a = -b \,;$$

luego

$$a + aj = A j_1 \quad , \quad a - aj = B j_2 \,.$$

De aquí: *la condición necesaria y suficiente para que un complejo de la forma isótropa, sea un divisor de eero, es que sea nula una de sus dos componentes isótropas.*

Teorema I. — *Si los dos complejos hiperbólicos $C = c + c' j$, $D = d + d' j$, son divisorcs de cero de la misma especie, la expresión*

$$C + D\,\alpha = P j_1 + Q j_2$$

donde α es un parámetro real o complejo hipeıbólico no divisor de cero es también un divisor de cero y recírpocamente.

Si $\alpha = \alpha' + \alpha'' j$, con $\alpha' \neq \alpha''$, se tiene

$$C + D\,\alpha = [(c + c')\, j_1 + (c - c')\, j_2] + [(\alpha + \alpha')\, j_1 + (\alpha - \alpha')\, j_2]$$

$$[(d + d')\, j_1 + (d - d')\, j_2] = [(c + c')\, j_1 + (c - c')\, j_2] +$$

$$+ [(\alpha' + \alpha'')\, (d + d')\, j_1 + (a' - \alpha'')\, (d - d')\, j_1] = [(c + c') +$$

$$+ (\alpha' + \alpha'')\, (d + d')]\, j_1 + [(c - c') + (\alpha' - \alpha'')\, (d - d')]\, j_2$$

Como por hipótesis es : $c = c'$, $d = d'$; o bien $c = -c'$, $d = -d'$, resulta en el primer caso que $Q = 0$ y en el segundo $P = 0$, luego el complejo $C + D\alpha$ es un divisor de cero.

Recíprocamente, si $Pj_1 + Qj_2$ es un divisor de cero, resulta

$$P = 0 \quad \text{ó bien} \quad Q = 0\ ;$$

en el primer caso resulta. $c = -c'$, $d = -d'$ y en el segundo: $c = c'$, $d = d'$; por tanto los complejos C y D son divisores de cero de la misma especie.

TEOREMA II. — *El complejo hiperbólico*

$$C + D\alpha \qquad (\alpha \text{ real})\ .$$

es un divisor de cero, para los dos valores de α

$$\alpha_1 = -\frac{c + c'}{d + d'}\ , \quad \alpha_2 = -\frac{c - c'}{d - d'}\ ,$$

siempre que $D = d + d'j$ *no sea un divisor de cero o cero.*

Se tiene

$$C + D\alpha = [(c + c') + \alpha\,(d + d')]\,j_1 + [(c - c') + \alpha\,(d - d')]\,j_2 \quad [1]$$

y la condición necesaria y suficiente para que la (1) sea un divisor de cero es que

$$(c + c') + \alpha\,(d + d') = 0 \qquad [2]$$

o bien que

$$(c - c') + \alpha\,(d - d') = 0 \qquad [3]$$

De la (2) resulta: $\alpha = -\dfrac{c + c'}{d + d'}$ puesto que $d + d' \neq 0$; y de la (3) se tiene: $\alpha = -\dfrac{c - c'}{d - d'}$ donde $d - d' \neq 0$.

En particular, si $C = c + c'j$ es un divisor de cero: $c = c'$ ó $c = -c'$; se tiene respectivamente que

$$\alpha_1 = 0 \quad \text{o} \quad \alpha_2 = 0\ .$$

6. *Operaciones inversas.*—La *diferencia* de dos complejos: $\alpha = a + bj$, $\alpha' = a' + b'j$, es otro complejo que sumado al segundo, reproduce el primero. Se tiene

$$a - a' = (a - a') + (b - b')\,j$$

En particular

$$\alpha - \bar{\alpha} = 2\,bj\,.$$

Si

$$a = Aj_1 + Bj_2 \quad , \quad \alpha' = A'j_1 + B'j_2$$

resulta

$$\alpha - \alpha' = (A - A')\,j_1 + (B - B')\,j_2$$

y

$$\alpha - \bar{\alpha} = (Aj' + Bj_2) + (Bj_1 + Aj_2)$$

$$= (A - B)\,j_1 + (B - A)\,j_2$$

Se llama *recíproco* o *inverso* de un complejo $\alpha = a + bj$ a todo complejo $x + jy$ que multiplicado por α sea igual a 1. La igualdad

$$(a + bj) \times (x + yj) = 1$$

exige que

$$ax + by = 1 \quad , \quad bx + ay = 0$$

Si el determinante fundamental de este sistema lineal

$$\begin{vmatrix} a & b \\ b & a \end{vmatrix} = a^2 - b^2 = N\,[\alpha]$$

es distinto de cero, resulta

$$x = \frac{a}{a^2 - b^2}\,,\; y = -\frac{b}{a^2 - b^2}$$

Por tanto, indicando con $\frac{1}{\alpha}$ el inverso de α, se tiene

$$\frac{1}{\alpha} = \frac{a - bj}{a^2 - b^2}$$

Si el complejo hiperbólico $a + bj$ no es nulo ni divisor de cero, existe siempre su inverso y es único.

Llamaremos *cociente* de los complejos hiperbólicos $a + bj$, y $a' + b'j$, donde el segundo es *distinto de cero* o *divisor de cero*, al producto del primero por el inverso del segundo; es decir

$$\frac{a + bj}{a' + b'j} = a + bj \times \frac{1}{a' + b'j} = \frac{aa' - bb'}{a'^2 - b'^2} + \frac{ab' - a'b}{a'^2 - b'^2} j \, .$$

La división es por tanto posible y única, siempre que el divisor no sea un divisor de cero o un complejo nulo.

Si el complejo está dado en la forma isótropa $\alpha = \alpha' j_1 + \beta' j_2$ su inverso está definido por la relación

$$\frac{1}{\alpha' j_1 + \beta' j_2} = \frac{1}{\alpha'} j_1 + \frac{1}{\beta'} j_2$$

siempre que

$$\alpha' \neq 0 \quad \text{y} \quad \beta' \neq 0 \, .$$

El cociente de los complejos $\alpha_1 = \alpha j_1 + \beta j_1$, $\alpha'_2 = \alpha' j_1 + \beta' j_2$ es igual a

$$\frac{\alpha j_1 + \beta j_2}{\alpha j_1 + \beta j_2} = (\alpha j_1 + \beta j_2) \times \frac{1}{\alpha' j_1 + \beta' j_2} =$$

$$= (\alpha j_1 + \beta j_2) \left(\frac{1}{\alpha'} j_1 + \frac{1}{\beta'} j_2 \right)$$

$$= \frac{\alpha}{\alpha'} j_1 + \frac{\beta}{\beta'} j_2$$

siempre que el complejo $\alpha j_1 + \beta j_2$ no sea un divisor de cero.

TEOREMA III. — *La condición necesaria y suficiente para que la expresión*

$$\frac{A + B\alpha}{C + D\alpha} \qquad [1]$$

donde C y D no son divisores de cero de la misma especie y α no toma ninguno ae los dos valores

$$\alpha_1 = -\frac{c + c'}{d + d'} \, , \quad \alpha_2 = -\frac{c - c'}{d - d'} \, ,$$

sea independiente de α, es que se verifique la relación

$$AD = BC \, .$$

Según las hipótesis, la relación (1) tiene sentido; por tanto

$$\frac{A + B\alpha}{C + D\alpha} = \frac{(a'j_1 + a''j_2) + \alpha\,(b'j_1 + b''j_2)}{(c'j_1 + c''j_2) + \alpha\,(d'j_1 + b''j_2)}$$

$$= \frac{(a' + \alpha b')j_1 + (a'' + \alpha b'')j_2}{(c' + \alpha d')j_1 + (c'' + \alpha d'')j_2}$$

de donde

$$\frac{A + B\alpha}{C + D\alpha} = \frac{a' + \alpha b'}{c' + \alpha d'}\,j_1 + \frac{a'' + \alpha b''}{c'' + \alpha d''}\,j_2$$

La condición necesaria y suficiente para que la (1) sea independiente del parámetro α, es que sus componentes isotropas, sean independientes de α, lo cual exige que

$$a'd' = b'c' \quad , \quad a''d'' = b''c'' . \qquad [2]$$

Por otra parte, se tiene

$$A \,.\, D = (a'j_1 + a''j_2)\,(d'j_1 + d''j_2) =$$

$$= a'd'j_1 + a''d''j_2$$

y

$$B \,.\, D = b'c'j_1 + b''d''j_2 \;;$$

y teniendo en cuenta las igualdades (2), estas dos últimas resultan

$$AD = BC .$$

Potencia. — La potencia de exponente entero y positivo del número complejo hiperbólico $\alpha j_1 + \beta j_2$, está definida por la relación

$$(\alpha j_1 + \beta j_2)^n = (\alpha j_1 + \beta j_2) \,.\, (\alpha j_1 + \beta j_2) \ldots (\alpha j_1 + \beta j_2)$$

de donde

$$(\alpha j_1 + \beta j_2)^n = \alpha^n j + \beta^n j_2$$

Del mismo modo

$$(\alpha j_1 - \beta j_2)^n = \alpha^n j_1 \pm \beta^n j_2 ,$$

según sea n *par* o *impar* respectivamente corresponde el signo + ó —.

En el caso que el exponente es entero y negativo ($-n$) la potencia se define por la relación

$$(\alpha j_1 + \beta j_2)^{-n} = \frac{1}{(\alpha j_1 + \beta j_2)^n} = \frac{1 \,.\, j_1 + 1 \,.\, j_2}{\alpha^n j_1 + \beta^n j_2} =$$

$$= \frac{1}{\alpha^n}\,j_1 + \frac{1}{\beta^n}\,j_2 = j_1\,\alpha^{-n} + j_2\,\beta^{-n} .$$

siempre que el complejo no sea divisor de cero.

Raíz. — Llamamos raíz n^{esima} del complejo hiperbólico $\alpha j_1 + \beta j_2$, a todo complejo hiperbólico $x j_1 + y j_2$, tal que su potencia n^{esima} sea igual al primero. Se tiene entonces

$$\alpha j_1 + \beta j_2 = (x j_1 + y j_2)^n = x^n j_1 + y^n j_2 \qquad [1]$$

de donde

$$\alpha = x^n \quad [2] \quad , \quad \beta = y^n . \qquad [3]$$

Hay que considerar dos casos distintos según que el índice de la raíz sea par o impar.

I) Si *n es impar,* las relaciones (2) y (3) dan para x e y un solo valor real

$$x = \sqrt[n]{\alpha} \quad , \quad y = \sqrt[n]{\beta}$$

cualquiera sea el signo de α y de β. Por tanto el complejo $\alpha j_1 + \beta j$ tiene una sola raíz n^{esima}

$$\sqrt[n]{\alpha j_1 + \beta j_2} = j_1 \sqrt[n]{\alpha} + j_2 \sqrt[n]{\beta} .$$

II) Si *n es par* y $\alpha > 0$, $\beta > 0$, existen dos valores reales para x y dos valores reales para y.

$$x = \pm \sqrt[n]{\alpha} \quad , \quad y = \pm \sqrt[n]{\beta}$$

resultando como raíz n^{esima} del complejo $\alpha j_1 + \beta j_2$ los cuatro valores siguientes

$$\left\{ \begin{array}{ll} \delta_1 = j_1 \sqrt[n]{\alpha} + j_2 \sqrt[n]{\beta} \quad , & \delta_2 = - j_1 \sqrt[n]{\alpha} - j_2 \sqrt[n]{\beta} ; \\ \delta_2 = j_1 \sqrt[n]{\alpha} - j_2 \sqrt[n]{\beta} \quad , & \delta_4 = - j_1 \sqrt[n]{\alpha} + j_2 \sqrt[n]{\beta} ; \end{array} \right. \qquad [5]$$

fácil de verificar inmediataemnte. Por tanto: *todo complejo hiperbólico en la forma isótropa, tiene una sola raíz de grado impar dada por la relación* (4); *mientras tiene cuatro raíces de grado par, siempre que sus componentes isótropas sean positivas, las cuales están dadas por las relaciones* (5).

7. *Forma trigonométrica.*—Dado el complejo hiperbólico $a + bj$, se puede siempre determinar dos números ρ y φ tales que

$$a = \rho \cos \rho, \quad b = \rho \operatorname{sen} \varphi$$

de donde resulta

$$\rho = +\sqrt{a^2 + b^2}, \quad \cos\varphi = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \quad \operatorname{sen}\varphi = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

y

$$a + bj = \rho\,(\cos\varphi + j\operatorname{sen}\varphi)$$

que llamaremos la forma trigonométrica del complejo hiperbólico.

El módulo ρ está determinado sin ambigüedad, meintras que su argumento φ, definido por sus funciones trigonométricas no está determinado sino a un múltiplo de 2π. Todo número complejo hiperbólico tiene una infinidad de argumentos que forman una sucesión aritmetica de razón igual a 2π (lo mismo que en el caso de! complejo ordinario).

Si se multiplican dos complejos hiperbólicos

$$\alpha = \rho\,(\cos\varphi + j\operatorname{sen}\varphi) \quad , \quad \alpha' = \rho'\,(\cos\varphi' + j\operatorname{sen}\varphi')$$

resultan

$$\alpha . \alpha' = \rho\rho'\,[\cos(\varphi - \varphi') + j\operatorname{sen}(\varphi + \varphi')]\,, \qquad [1]$$

no se cumple por tanto, el conocido teorema de MOIBRE sobre producto de complejos ordinarios.

La fórmula (1) permite obtener una expresión simple del módulo del producto y un *límite superior* del mismo. En efecto; se tiene, llamando con R el módulo del producto

$$R^2 = \rho^2\rho'^2\,[1 + \operatorname{sen}^2(\varphi + \varphi') - \operatorname{sen}^2(\varphi - \varphi')]$$

de donde resulta

$$R = \rho\rho'\sqrt{1 + \operatorname{sen} 2\varphi \operatorname{sen} 2\varphi'}$$

y por tanto

$$\boxed{R \leq \sqrt{2}\,.\,\rho\rho'}\,.$$

8. FORMA FACTORIAL.– Dado el complejo hiperbólico $a + bj$, se puede definir dos números reales ρ y θ por la relación

$$\begin{cases} a = \rho\cosh\theta\,. \\ b = \rho\operatorname{senh}\theta\,. \end{cases} \qquad (1)$$

siempre evidentemente que, $|a| > |b|$; puesto que de la [1] se deduce

$$a^2 - b^2 = \rho^2, \quad \text{es dicir:} \quad \rho = \pm\sqrt{a^2 - b^2} \qquad (2)$$

y

$$\frac{b}{a} = tg\, h\, \theta\, . \qquad (3)$$

Como cos$h$ θ es siempre *positivo,* resulta por la primera de las relaciones [1], que ρ es *positivo* o *negativo* según que $a > 0$, ó $a < 0$ respectivamente.

Sustituyendo en $a + bj$, a y b por los valores [1]; se tiene

$$a + bj = \rho\,(\cos h\, \theta + j \operatorname{sen} h\, \theta)$$

una nueva forma del complejo hiperbólico, que llamaré *forma factorial.*

El número real: $\rho \gtreqless 0$ es el *módulo hiperbólico* de $a + bj$, mientras que θ es su *argumento hiperbólico* ($-\infty < \theta < \infty$).

Observemos que la correspondencia entre los números (a y b) y los números (ρ, θ) es *biunívoca,* sepún [2] y [3] y del hecho que la función cos$h$ θ y sen$h$ θ no tienen *período real.*

En el caso de $|a| < |b|$, bastará considerar las relaciones simétricas

$$\begin{cases} a = \rho \operatorname{sen} h\, \theta \\ b = \rho \cos h\, \theta \end{cases} \qquad (5)$$

de donde

$$\rho^2 = b^2 - a^2 \quad \text{es decir} \quad \rho = \pm\sqrt{b^2 - a^2}$$

$$\frac{a}{b} = tg\, h\, \theta\, .$$

En este caso, convendremos en tomar el número real

$$\rho = \pm\sqrt{b^2 - a^2}$$

como módulo hiperbólico; y la forma factorial del complejo $a + bj$, será

$$a + bj = \rho\,(\operatorname{sen} h\, \theta + j \cos h\, \theta)\, . \qquad (6)$$

Evidentemente, los divisores de cero $\alpha = a \pm aj$, carecen de expresión factorial.

Por tanto: *dado un complejo hiperbólico* $a + bj$ *no divisor de cero, se puede siempre poner en una de las dos formas* [4] ó [6], *según que* $|a| > |b|$ ó $|a| < |b|$ *respectivamente, y recíprocamente, dado el complejo en la forma factorial* [4] ó [6], *queda determinado unívocamente su forma normal*: $a + bj$. *Los divisores de cero no tienen expresión factorial.*

Módulo y argumento hiperbólico del producto. — Sean los dos complejos:

$$\alpha = \rho\,(\cosh\theta + j\,\mathrm{senh}\,\theta) \quad , \quad \alpha' = \rho'\,(\cosh\theta' + j\,\mathrm{senh}\,\theta')$$

se tiene

$$\alpha\alpha' = \rho\rho'\,[\cosh(\theta + \theta) + j\,\mathrm{senh}\,(\theta + \theta')]\,.$$

luego

$$\text{mód}h\,(\alpha\alpha') = \rho\rho' \quad , \quad \arg h\,(\alpha\alpha') = \theta + \theta'$$

Si los complejos son de la forma

$$\alpha = \rho\,(\mathrm{senh}\,\theta + j\cosh\theta) \quad , \quad \alpha' = \rho'\,(\mathrm{senh}\,\theta + j\cosh\theta')$$

se tiene

$$\alpha\alpha' = \rho\rho'\,[\cosh(\theta + \theta') + j\,\mathrm{senh}\,(\theta + \theta')]$$

y por tanto

$$\text{mód}h\,(\alpha\alpha') = \rho\rho' \quad , \quad \arg h\,(\alpha\alpha') = \theta + \theta'\,.$$

En el caso que fuera

$$\alpha = \rho\,(\cosh\theta + j\,\mathrm{senh}\,\theta) \quad , \quad \alpha' = \rho'\,(\mathrm{senh}\,\theta' + j\cosh\theta')$$

resulta

$$\alpha\alpha' = \rho\rho'\,[\mathrm{senh}\,(\theta + \theta') + j\cosh(\theta + \theta')]$$

luego

$$\text{mód}h\,(\alpha\alpha') = \rho\rho' \quad , \quad \arg h\,(\alpha\alpha') = \theta + \theta'\,.$$

De aquí: *el producto de dos complejos hiperbólicos tiene por módulo hiperbólico, el producto de sus módulos hiperbólicos y por argumento hiperbólico, la suma de los argumentos hiperbólicos.*

Módulo y argumento hiperbólico del cociente. — Sea

$$\alpha = \rho\,(\cosh\theta + j\,\mathrm{senh}\,\theta) = a + bj\,,$$

un complejo hiperbólico no nulo ni divisor de cero; y multipliquémoslo por el complejo

$$\beta = \frac{1}{\rho}\,[\cosh(-\theta) + j\,\mathrm{sen}\,h\,(-\theta)]\;;$$

se tiene: $\alpha\beta = 1$, es decir

$$\frac{1}{\rho\,(\cosh\theta + j\,\mathrm{senh}\,\theta)} = \frac{1}{\rho}\,[\cos h\,(-\theta) + j\,\mathrm{senh}\,(-\theta)] =$$

$$= \frac{1}{\rho}\,(\cosh\theta - j\,\mathrm{senh}\,\theta)\,.$$

Por tanto, *el inverso de un complejo hiperbólico no nulo ni divisor de cero, tiene por módulo hiperbólico* $\frac{1}{\rho}$ *, y por argumento hiperbólico* $(-\theta)$.

El cociente de los dos complejos

$$\alpha = \rho\,(\cosh\theta + j\,\mathrm{senh}\,\theta)\quad,\quad \alpha' = \rho'\,(\cosh\theta' + j\,\mathrm{senh}\,\theta')$$

es por tanto

$$\frac{\alpha}{\alpha'} = \alpha\,.\,\frac{1}{\alpha'} = \rho\,(\cosh\theta + j\,\mathrm{senh}\,\theta)\,.\,\frac{1}{\rho'}\,(\cosh\theta' + j\,\mathrm{senh}\,\theta')$$

$$= \frac{\rho}{\rho'}\,[\cosh(\theta - \theta') + j\,\mathrm{senh}\,(\theta - \theta')]\,,$$

de donde resulta que: *el cociente de un complejo hiperbólico, por otro no nulo ni divisor de cero, tiene por módulo hiperbólico, el cociente de sus módulos hiperbólicos y por argumento hiperbólico, la diferencia de sus argumentos hiperbólicos.*

Al mismo resultado se llega operando con la forma

$$\rho\,(\mathrm{senh}\,\theta + j\cosh\theta)\,.$$

9. EXTENSIÓN DE LA FÓRMULA DE MOIVRE. – Dado el complejo hiperbólico

$$\alpha = \rho\ (\cosh\ \theta + j\ \text{senh}\ \theta)$$

la potencia α^n, n entero y positivo, es igual a

$$\alpha^n = \alpha . \alpha \ldots \alpha = \rho . \rho \ldots \rho\ [\cosh\ (\theta + \theta + \ldots + \theta) +$$

$$+ j\ \text{senh}\ (\theta + \theta + \ldots + \theta)]$$

es decir

$$[\rho\ (\cosh\ \theta + j\ \text{senh}\ \theta)]^n = \rho^n\ [(\cosh\ (n\,\theta) + j\ \text{senh}\ (n\,\theta)]$$

En el caso de exponente entero y negativo $n = -p$ con $p > 0$, se tiene:

$$\alpha^n = \frac{1}{\alpha^p} = \frac{1}{\rho^p\ (\cosh\ p\ \theta + j\ \text{senh}\ p\ \theta)} =$$

$$= \rho^{-p}\ [\cosh\ (-\ p\ \theta) + j\ \text{senh}\ (-\ h\ \theta)]$$

es decir

$$\alpha^n = \rho^n\ (\cosh\ n\,\theta + j\ \text{senh}\ n\,\theta)\ .$$

La potencia α^n *tiene por módulo hiperbólico* ρ^n *y como argumento hiperbólico* $n\,\theta$

Al mismo resultado se llega, cuando el complejo es de la forma

$$\alpha = \rho\ (\text{senh}\ \theta + j\ \text{senh}\ \theta)\ .$$

10. LA POTENCIA e^z.– La potencia de exponente complejo $z = x + jy$, definiremos de modo que satisfaga a la propiedad fundamental expresada por la relación

$$e^z \times e^{z_1} = e^{z+z_1}\ .$$

Consideremos en primer lugar el caso de la potencia e^{yj} y pongamos

$$e^{yj} = \cosh\ y + j\ \text{senh}\ y$$

Si multiplicamos por la potencia

$$e^{y'j} = \cosh\ y' + j\ \text{senh}\ y'$$

resulta

$$e^{yj} \times e^{y'j} = \cosh\ (y + y') + j\ \text{senh}\ (y + y') = e^{(y+y')j}$$

Además, si se quiere conservar las reglas del cálculo ordinario, la operación e^{x+jy} deberá significar el producto de e^x por e^{yj}. Por tanto

$$e^z = e^{x+yj} = e^x \,.\, e^{yj} = e^x (\cosh y + j \operatorname{senh} y) \;;$$

la potencia e^{x+yj} *tiene por módulo hiperbólico* e^x *y por argumento hiperbólico* y.

Esta definición cumple con todas las reglas fundamentales de la potencia. En efecto:

$$e^z \times e^{z_1} = e^{x+yj} \times {}^{x'+jy'} = e^x (\cosh y + j \operatorname{senh} y) \times e^{x'} (\cosh y' + j \operatorname{senh} y')$$

$$= e^{x+x'} [\cosh (y + y') + j \operatorname{senh} (y + y')] = e^{x+x'} \,.\, e^{(y+y')j} = e^{z+z_1}$$

Del mismo modo

$$e^0 = 1 \,,\, e^1 = e \,,\, (e^z)^m = e^{mz} \,,\, \frac{e^z}{e^{z^1}} = e^{z-z'}$$

La potencia e^z coincide con la exponencial e^x, cuando z se reduce a un número real x.

Se puede también, para definir la potencia e^z proceder de otro modo.

Dada la sucesión $\{\alpha_n = a_n + b_n j\}$ diremos que tiene por límite el número $\alpha = a + bj$, si a todo número arbitrario $\varepsilon > 0$, corresponde un entero p, tal que

$$|\alpha - \alpha_n| < \varepsilon \qquad \text{para} \qquad n \geq p \,.$$

De aquí se deduce que: *la condición necesaria y suficiente para que la sucesión* $\{\alpha_n\}$ *tenga por límite el número* α, *es que*

$$a_n \longrightarrow a \qquad \text{y} \qquad b_n \longrightarrow b \,.$$

Pongamos por definición

$$e^z = \lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{z}{n}\right)^n .$$

Se tiene

$$1 + \frac{z}{n} = 1 + \frac{x + yj}{n} = \left(1 + \frac{x}{n}\right) + \frac{y}{n} j$$

y pasando a la forma isotropa, resulta

$$z = x + j\,y = z'\,j_1 + z''\,j_2 \quad , \quad z' = x + y \quad , \quad z'' = x - y$$

$$1 + \frac{z}{n} = \left(1 + \frac{z'}{n}\right) j_1 + \left(1 + \frac{z''}{n}\right) j_2$$

de donde

$$\left(1 + \frac{z}{n}\right)^n = \left(1 + \frac{z'}{n}\right)^n j_1 + \left(1 + \frac{z''}{n}\right)^n j_2$$

y tomando límite para $n \to \infty$; se tiene finalmente

$$\boxed{e^z = e^{z' j_1 + z'' j_2} = j_1\, e^{z'} + j_2\, e^{z''} ,} \qquad [1]$$

expresión que nos define e^z en la forma isótropa.

De aquí se deduce, pasando a la forma normal que

$$e^z = \frac{1}{2}\,(e^{x+y} + e^{x-y}) + \frac{1}{2}\,(e^{x+y} - e^{x-y})\, j$$

$$= \frac{1}{2}\,[e^x\,(e^y + e^{-y}) + e^x\,(e^y - e^{-y})\, j]$$

es decir

$$e^z = e^{x+jy} = e^x\,(\cosh y + j \operatorname{senh} y)\ .$$

que coincide con la expresión primera.

De la [1] se obtiene

$$e^z \times e^{z_1} = e^{z' j_1 + z'' j_2} \times e^{z'_1 j_1 + z''_1 j_2} = (j_1\, e^{z'} + j_2\, e^{z''}) \times (j_1\, e^{z'_1} + j_2\, e^{z''_1})$$

$$= j_1\, e^{z' + z'_1} + j_2\, e^{z'' + z''_1} = e^{(z' + z'_1) j_1 + (z'_1 + z''_1) j_2} = e^{z + z'}\ .$$

Se puede también probar que la única función continua

$$f\,(z) = u\,(z) + j\,v\,(z)$$

de la variable compleja z, que satisface a la ecuación funcional

$$f\,(z_1)\, f\,(z_2) = f\,(z_1 + z_2)$$

donde z_1 y z_2 son dos valores cualesquiera de z, y que para *valores reales* de z ella tome valores reales, es la función

$$f\,(z) = a^z \qquad (a \text{ constante real})$$

En particular, la exponencial $f(z) = e^z$.

Podemos definir también la función e^z mediante la serie convergente

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} .$$

Todas sus propiedades se deducen de las propiedades de estas series ([1]).

Según lo anterior resulta que:

$$a + bj = \rho (\cosh \varphi + j \operatorname{senh} \varphi) = \rho e^{j\varphi}$$

si $|a| > |b|$; en el caso de $|a| < |b|$ se tiene

$$a + bj = \rho (\operatorname{senh} \varphi + j \cosh \varphi) = \rho . j e^{j\varphi}$$

11. Logaritmo neperiano. – Llamaremos *logaritmo neperiano* del complejo hiperbólico $\alpha = a + bj$, a todo número complejo hiperbólico z que verifique la igualdad

$$e^z = \alpha \qquad \alpha = a + bj ,$$

Si

$$\alpha = \alpha' j_1 + \alpha'' j_2 \qquad \text{y} \qquad z = z' j_1 + z'' j_2$$

la igualdad anterior; se pude escribir

$$e^{z' j_1 + z'' j_2} = \alpha' j_1 + \alpha'' j_2$$

es decir

$$j_1 e^{z'} + j_2 e^{z''} = \alpha' j_1 + \alpha'' j_2$$

de donde

$$e^{z'} = \alpha' \qquad \text{y} \qquad e^{z''} = \alpha''$$

Si los números reales α' y α'' *son positivos;* se tiene

$$z' = \log \alpha' \qquad \text{y} \qquad z'' = \log \alpha''$$

por tanto

$$\boxed{z = j_1 \log \alpha' + j_2 \log \alpha'' = \log (\alpha)}$$

Las condiicones $\alpha' > 0$, $\alpha'' > 0$, nos da

$$a + b > 0 , \quad [1] \qquad a - b > 0 \qquad [2]$$

([1]) Durañcna y Vignaux, *Loc. cit.* p. 242.

Sumando miembro a miembro las desigualdades [1] y [2] se obtiene

$$2a > 0, \quad \text{es decir} \quad a > 0\ ;$$

por tanto

$$a > b \quad , \quad a > -b\ .$$

Las condiciones [1] y [2] equivale a

$$a > 0 \quad , \quad a > |\, b\, |$$

que corresponde a todos los puntos interiores del ángulo de vértice en $O(0\,,0)$, y lados $y = x$, $y = -x$, y que tienen al semi-eje positivo Ox.

Por tanto: *todo número complejo hiperbólico* $a + bj$, *tal que* $a > 0$, $a > |\, b\,|$, *tiene un logaritmo, determinado por la relación*

$$z = j_1 \log \chi_1 + j_2 \log \chi_2 = j_1 \log (a - b) + j_2 \log (a + b)\ .$$

Se puede llegar a este mismo resultado en otra forma. Sea

$$e^z = \chi \quad , \quad z = x + j\, y \quad , \quad \chi = \rho\, (\cosh \omega + j \operatorname{senh} \omega)$$

se tiene, entonces

$$e^x = \rho \quad , \quad y = \omega\ .$$

Si

$$\rho = \sqrt{a^2 - b^2} > 0\ ,$$

la primera igualdad nos da

$$x = \log \rho\ ,$$

luego

$$z = \log \rho + j\, \omega\ .$$

La condición $\rho > 0$, implica todos los puntos del ángulo antes definido.

Las reglas del cálculo algebraico ordinario se extienden a los logaritmos de los números complejos hiperbólicos.

12. Extensión de la fórmula de Euler. — De la relación

$$e^{\omega j} = \cosh \omega + j \operatorname{senh} \omega$$

resulta

$$e^{-\omega j} = \cosh \omega - j \operatorname{senh} \omega\ .$$

Por tanto

$$\begin{cases} \cosh \omega = \dfrac{e^{\omega j} + e^{-\omega j}}{2} \\ \\ \operatorname{senh} \omega = \dfrac{e^{\omega j} - e^{-\omega j}}{2j} \end{cases}$$

fórmulas análogas a las de Euler para el complejo ordinario.

13. REPRESENTACIÓN GEOMÉTRICA. -Fijado un sistema de coordenadas rectangulares x e y, representaremos el complejo hiperbólico $a + bj$, por un punto M (índice) de coordenadas (a, b).

Tomando como eje polar el eje Ox y como polo de origen O, si r y φ son las *coordenadas polares* del punto M; se tiene

$$a + bj = r (\cos \varphi + j \operatorname{sen} \varphi) ;$$

por tanto, el módulo de $a + bj$

$$r = \sqrt{a^2 + b^2} ,$$

es la distancia euclideana del punto M al origen O, mientras que su argumento es el ángulo polar de dicho punto.

Cuando el complejo hiperbólico, es de la forma

$$\rho (\cosh \theta + j \operatorname{senh} \theta) ,$$

en este caso, el módulo hiperbólico: $\rho = \sqrt{a^2 - b^2}$ es la *distancia hiperbólica* del punto $M(a, b)$ al origen O, y el *argumento hiperbólico* φ son «*rotaciones hiperbólicas*» [1].

[1] J. C. VIGNAUX, *a*) «*Sobre el númuero complejo hiperbólico y su relación con la geometría de Borel.* (Contribución ... E. (1) 1935).

b) «*Sobre la forma factorial del número complejo hiperbólico*» Anales de la *Soc. Cient. Argentina* (1937).

(*Continuará*)

FUNDAMENTACIÓN AXIOMÁTICA DEL CÁLCULO VECTORIAL

POR

A. E. SAGASTUME BERRA — AGUSTIN DURAÑONA Y VEDIA

1. — El objeto de esta comunicación es dar un sistema de postulados que permiten desarrollar el cálculo vectorial en forma abstracta, y que difieren de los dados por J. v. Neumann (1). La diferencia esencial entre ambos sistemas, está en que, en el que proponemos, no es necesario postular la existencia de los *multiplicadores,* sino que se deduce de las propiedades del grupo aditivo de los vectores y del producto escalar. Es, en cambio, necesario otro postulado, el IV (nos limitamos al caso de multiplicadores reales).

2. — El sistema de postulados es el siguiente:

Postulado I. — Existe un conjunto V de elementos $A, B, C, \ldots,$ llamados *vectores.* El conjunto V, que llamamos *espacio vectorial,* es un *grupo abeliano* respecto a una operación $+$, la *suma* de vectores. Es decir, que se verifica:

I. 1. Cualesquiera sean los vectores A, B, existe el vector $C = A + B$;

I. 2. Es $(A + B) + C = A + (B + C)$;

I. 3. Es $A + B = B + A$;

I. 4. Existe un *vector nulo* o *cero,* O, tal que $A + O = A$, cualquiera sea A;

I. 5. Para cada A existe el *vector opuesto,* $-A$, tal que $(-A) + A = O$.

Postulado II. — A cada par de vectores A, B corresponde un número real a, el *producto escalar,* tal que:

(1) *Die mathematischen Grundlagen der Quantenmechanik.* Berlín, J. Springer.

II. 1. Cualesquiera sean los vectores A, B, existe el número real $a = A \times B$;

II. 2. Es $A \times B = B \times A$;

II. 3. El *cuadrado escalar* de cualquier vector A no es negativo: $A \times A = A^2 \geq O$.

POSTULADO III. — El producto escalar y la suma de vectores están ligados por las siguientes relaciones:

III. 1. $A \times (B + C) = A \times B + A \times C$.
III. 2. Si $A^2 = O$, necesariamente A es el *vector nulo*: $A = O$.

POSTULADO IV. — Cualquiera sea el vector A, existe un vector B tal que $B + B = A$.

POSTULADO V. — Si $A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots$ es una sucesión de vectores, y la suceción numérica $(A_m - A_n)^2$ tiende a cero al crecer m, n, existe un vector A, el *límite* de la sucesión, tal que la sucesión numérica $(A_n - A)^2$ tiende a cero.

POSTULADO VI_n. — Existe al menos un sistema $U_1, \ldots, U_n$ de n vectores linealmente independientes (respecto al cuerpo de los números reales); $n + 1$ vectores son siempre dependientes.

3. — La *independencia* ordenada de estos postulados es fácil de demostrar, por el método usual de los *modelos*, en este caso conjuntos construídos artificialmente, en los que mediante definiciones *ad-hoc* de las operaciones se consigue que valgan todos los postulados que preceden a aquel cuya independencia se trata de demostrar, pero no este último.

Para el postulado I es conocida la demostración de la independencia. Para los postulados II, III y IV se pueden tomar como modelo los números enteros ligados por las operaciones de suma ordinaria, y otra que represente el producto escalar, definida oportunamente; para II. 2 basta poner por ejemplo $A \times B = A^B$; para II. 3, $A \times B = -(AB)$; para III. 1, $A \times B = AB + n$ con $n > 0$ fijo; para IV $A \times B = A \,.\, B$. En cambio para III. 2 se puede recurrir a los complejos duales. Análogamente, la independencia de V y VI_n se demuestra fácilmente.

La *compatibilidad* de los axiomas se demuestra inmediatamente construyendo un modelo que satisfaga a todos, por ejemplo, el con-

junto de complejos $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ siendo las a_i números reales, y estableciendo las definiciones

$$(a_1, \ldots, a_n) + (b_1, \ldots, b_n) = (a_1 + b_1, \ldots, a_n + b_n)$$

y

$$(a_1, \ldots, a_n) \times (b_1, \ldots, b_n) = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \ldots + a_n b_n = a.$$

4. — Del postulado I resulta la posibilidad de definir los *multiplicadores enteros* de los vectores, definiendo, para m entero positivo:

$$mA = A + A + \ldots + A \text{ (}m\text{ veces)} \ ; 0A = 0 \ ; (-m)A = -(mA),$$

y resulta así la posibilidad de operar con estos múltiplos, en las sumas y productos escalares, como es corriente.

La importante *desigualdad de Schwarz*

$$(A \times B)^2 \leq A^2 . B^2$$

y sus consecuencias

$$|A + B| \leq |A| + |B| \quad , \quad |A - B| \geqq ||A| - |B||$$

donde el *módulo* $|A|$ de un vector A está definido por

$$|A| = +\sqrt{A^2}$$

se demuestran haciendo uso sólo de los tres primeros postulados.

El postulado IV permite, en combinación con lo anterior, operar con multiplicadores de la forma $\frac{m}{2^k}$ (m, k enteros), y como el conjunto de estos números es denso en el campo real, el postulado de la continuidad, V nos lleva a los multiplicadores reales cualesquiera.

A partir de aquí se define la dependencia lineal como de costumbre, y el postulado VI_n nos define la dimensionalidad que atribuímos al espacio vectorial V. Se pueden entonces definir todos los conceptos del cálculo vectorial, y demostrar todos los teoremas, extendidos al espacio n-dimensional. Las *orientaciones* de las n-uplas de vectores independientes (ortogonales o no) se definen por comparación con una fija, y permiten definir luego el producto *mixto* de n vectores, y el producto *vectorial* de $n - 1$ vectores, con propiedades que generalizan las ordinarias.

UNA NUEVA FORMA DE INTRODUCIR LA TEMPERATURA

POR

ENRIQUE LOEDEL PALUMBO y ERNESTO R. SABATO

Introducción. — Se sabe que toda definición de la temperatura comprende, parcial o totalmente, al segundo principio de la termodinámica. — Según esto, la temperatura debería ser introducida, solamente después de haber enunciado los dos primeros principios de la teoría del calor, lo que, sin embargo, no se hace, debido a que, seguramente, parece imposible definir y medir cantidades de calor, encontrar la equivalencia del mismo con el trabajo, definir transformaciones adiabáticas e isotermas y enunciar el segundo principio, sin la ayuda de un termómetro cualquiera. En lo que sigue trataremos de probar que, a pesar de ello y de otras dificultades que en un principio parecen infranqueables, es posible un desarrollo lógico y consecuente de la termodinámica, introduciendo la temperatura sólo después de haber enunciado los dos primeros principios; y se verá además que este camino es mucho más económico que el que se sigue corrientemente.

Cantidad de calor. — Si se tiene una masa de hielo en contacto con agua proveniente de su fusión a la presión normal, que supondremos constante, diremos que ese sistema está aislado y en equilibrio cuando se mantenga invariable la relación entre las masas de hielo y agua.

Si el sistema pasa de un estado de quilibrio a otro en el cual la masa de agua aumenta por ejemplo en m (disminuyendo en consecuencia la masa de hielo) diremos que el sistema ha recibido una cierta « *cantidad de calor* » Q que supondremos proporcional a m:

$$Q = C\,m$$

La constante C depende únicamente de las unidades que se elijan.

Equivalencia de trabajo en calor. — Si se hace girar una rueda de paletas en el interior del calorímetro de hielo se constata que existe rigurosa proporcionalidad entre el trabajo entregado y la masa de hielo fundida por este procedimiento. Concluímos que el trabajo se ha convertido o transformado en calor. Siendo el trabajo A, y el calor que él produce Q, eligiendo en forma conveniente las unidades se podrá escribir:

$$A = Q$$

Primer principio. — Sea un sistema « aislado »; esto es que no intercambia calor ni ninguna otra forma de energía con el exterior.

Llamemos U a la energía total de tal sistema. Si ese sistema recibe del exterior la cantidad de calor Q, y el trabajo A, su energía interna final U_2, será mayor que su energía inicial U_1, siendo:

$$U_2 - U_1 = Q + A \qquad [1]$$

Medidas de cantidades de calor. — a) Calentamiento a presión constante. — Sea un cuerpo que a presión constante (por ejemplo la atmosférica) pase de un estado en que su volumen es V_1 a otro en el cual el volumen es V_2, por la acción de eso que llamamos calor.

La [1] nos da en este caso:

$$U_2 - U_1 = Q_{2,1} + P(V_2 - V_1)$$

Llamando $Q_{2,1}$ al calor puesto en juego y que deseamos medir.

Si, conservando la presión constante, llevamos al cuerpo de los estados [1] y [2] al calorímetro de hielo en el cual supondremos que tiene un volumen V_0 y una energía U_0 tendremos:

$$U_1 - U_0 = Q_{1,0} + P(V_1 - V_0)$$

y

$$U_2 - U_0 = Q_{2,0} + P(V_2 - V_0)$$

de donde

$$U_2 - U_1 = Q_{2,0} - Q_{1,0} + P(V_2 - V_1)$$

con lo cual

$$Q_{2,1} = Q_{2,0} - Q_{1,0} \qquad [2]$$

donde $Q_{2,0}$ y $Q_{1,0}$ se miden directamente con el calorímetro.

Calentamiento a volumen constante. — En este caso, se demuestra también de inmediato, que se puede aplicar la [2] para medir el calor puesto en juego. Se comprende también que la [2] podrá aplicarse aún en aquellos casos en que se cumpla:

$$A_{2,1} + A_{0,2} + A_{1,0} = 0$$

Siempre que

$$A_{i,k} = -A_{ki} \qquad [1]$$

representando por $A_{2,1}$, el trabajo recibido por el cuerpo, o sistema, del exterior, en su pasaje del estado 1 al 2.

Transformación inversa del calor en trabajo

Definiciones. — Llamaremos *fuente térmica* o simplemente fuente a un cuerpo o sistema de cuerpos capaces de intercambiar calor con otros cuerpos.

Denominaremos *máquina térmica* a un mecanismo de funcionamiento periódico capaz de transformar calor en trabajo.

Diremos que una máquina funciona « entre » las fuentes A, B, C, etc., cuando al cabo de cada período haya extraído o entregado algo de calor a las mismas.

Se dirá que dos cuerpos o dos fuentes se ponen en *contacto térmico* duando se haga posible por cualquier procedimiento el pasaje de calor de uno al otro.

Sean, por ejemplo, dos fuentes de calor constituidas la una por vapores de agua en ebullición a la presión normal, fuente F_1, y la otra por hielo en fusión también a la presión normal fuente F_2. Un cuerpo cualquiera, hierro, por ejemplo, que no reaccione químicamente con las substancias de las fuentes y que se lleve sucesivamente de una a la otra puede establecer entre ellas un contacto térmico. Se constataría en este caso que por intermedio del hierro transportamos calor de F_1 a F_2.

Eentre esas fuentes será posible hacer funcionar una máquina térmica, la cual podría estar constituída simplemente por una varilla metálica o por un cilindro provisto de un pistón que contiene en su interior un líquido o un gas y que se lleva sucesivamente de una a otra fuente.

Las variaciones de longitud de la varilla o del volumen de la substancia contenida en el cilindro experimentadas al pasar de una a

otra fuente podrán aprovecharse para levantar pesas a cierta altura. La suma del calor entregado por la máquina a la fuente F_2, más el trabajo realizado, dará el calor sacado de F_1.

Segundo principio. — Lo enunciaremos así: *Es condición necesaria y suficiente para el funcionamiento de una máquina térmica entre dos fuentes A y B, que se establezca entre ambas, al ponerlas en contacto térmico, un pasaje de calor de una a la otra.*

Temperaturas iguales. — Diremos que dos cuerpos están a igual temperatura cuando puestos en contacto térmico no pasa calor del uno al otro.

Fuente térmicamente homogénea. — Es aquella que tiene todas sus partes a igual temperatura. En adelante, al hablar de fuentes térmicas, consideraremos únicamente fuentes homogéneas [1].

Podría pensarse que el solo hecho de admitir la existencia de fuentes térmicamente homogéneas implica la admisión de la propiedad transitiva de la igualdad de temperatura, ya que si consideramos una fuente de esa clase y la suponemos dividida en tres partes A, B, C, deberá cumplirse que $T_A = T_B$; $T_B = T_C$, y también que $T_A = T_C$, pues si esta última igualdad no se cumpliera pasaría calor de A a C, o de C a A aún cuando no pasara de A a B ni de B a C.

Pero si se trata de una fuente física y químicamente homogénea en todas sus partes la propiedad anterior es algo completamente trivial, mientras que la propiedad transitiva de la igualdad de temperatura se refiere a substancias cualesquiera, y es en este caso que aquella propiedad constituye un hecho físico de singular importancia y que en sí mismo no tiene ni mayor ni menor evidencia que el enunciado mismo del segndo principio. Si un trozo de hierro no intercambia calor con cierta porción de agua y ésta no intercambia calor con otra porción de mercurio, se trata de probar que el trozo de hierro tampoco intercambiará calor con el mercurio (*).

Del enunciado del segundo principio y de la definición de temperaturas iguales se desprende que es imposible el funcionamiento de una máquina térmica que no haga otra cosa al cabo de cada período

[1] Si tales fuentes « homogéneas » pueden realmente existir, es una cuestión que no interesa por el momento.

(*) Piénsese, por ejemplo, en el caso del equilibrio eléctrico, donde la propiedad transitiva no vale; pues una barra de Zn y otra de Cu están en equilibrio eléctrico con una solución de ácido sulfúrico sin estar en equilibrio entre sí.

que sacar calor de una única fuente (térmicamente homogénea) y produzca trabajo.

Temperatura mayor y menor. — Si una máquina funciona entre dos fuentes F_1 y F_2, deberá extraer calor de una de ellas y entregar parte del mismo a la otra transformando la diferencia en trabajo. No pudiendo la máquina funcionar sacando calor de una única fuente tampoco podrá funcionar sacando calor de las dos, pues si así lo hiciera, bastaría transformar parte del trabajo de la máquina en el calor que ella ha sacado de una de las fuentes y restituirlo a la misma, con lo cual se tendría así una máquina que funciona con una única fuente. Diremos que la fuente de la cual la máquina extrae calor tiene temperatura mayor que la otra.

En particular, si la máquina extrae calor de F_1, y entrega calor a F_2, siendo T_1 y T_2, las temperaturas respectivas de las fuentes, diremos que

$$T_1 > T_2$$

Para que esta definición tenga sentido es necesario probar que cualquier máquina que funcione entre las mismas fuentes sacará calor de F_1 y entrepará parte del mismo a F_2. En efecto: Si suponemos que entre las mismas fuentes una segunda máquina funcionara sacando calor de F_2, y entregando parte a F_1, bastaría hacer que el calor que sacara de F_2, igualara al entregado por la primera para tener una máquina que funcionara con una sola fuente.

Si la máquina no entrega trabajo al exterior se convierte en un cuerpo que pasa periódicamente de F_1 a F_2, estableciendo así un simple contacto térmico entre ambas transportando calor de una a la otra.

Que este pasaje de calor es irreversible se prueba de inmediato, pues si así no fuera se podría hacer que una máquina funcionara con una única fuente.

Luego al poner las fuentes F_3 y F_2 en contacto, pasará calor de F_1 a F_2, y no en sentido inverso.

Por lo tanto un *cuerpo cualquiera* que pase sucesivamente de F_1 a F_2, transportará calor de la primera a la segunda fuente.

Sea ahora una tercera fuente F_3, cuya temperatura T_3, sea tal que

$$T_2 > T_3$$

o sea una máquina que funcionando entre F_2 y F_3, saca calor de F_2 y entrega calor a F_3. Se trata de probar que deberá ser:

$$T_1 > T_3 .$$

En efecto: La máquina que funciona entre F_2 y F_3, puede sacar de F_2, el calor entregado por la primera máquina (que funciona entre F_1 y F_2), con lo cual se tiene una máquina que saca calor de F_2 y entrega parte del mismo a F_3, con lo que queda probada la última desigualdad.

Carácter transitivo de la igualdad de temperatura. — Probemos primero que si

$$T_1 > T_2$$

y

$$T_2 = T_3$$

deberá ser

$$T_1 > T_3$$

o sea: pasa calor de F_1 a F_2, y no pasa de F_2 a F_3. Se trata de probar que deberá pasar de F_1 a F_3. Consideremos a F_3 como un cuerpo que no intercambia calor con F_2. Si lo llevamos a F_1, y luego lo traemos *nuecamente* a F_2 deberá transportar calor de F_1 a F_2, para lo cual deberá absorber calor al estar en contacto con F_1. Luego si pasa calor de F_1 a F_3 queda probada la última desigualdad.

Sean ahora las fuentes F_1, F_2 y F_3 tales que

$$T_1 = T_2 \quad \text{y} \quad T_2 = T_3$$

se trata de probar que

$$T_1 = T_3$$

Si fuera $T_1 \gtrless T_3$, o sea si F_1 intercambiara calor con F_3, por lo probado más arriba debería ser también $T_1 \gtrless T_2$, lo que contradice lo supuesto, pues se ha admitido que F_2 y F_1 no intercambiaban calor al ponerse en contacto.

Ordenamiento de las temperaturas. — Termoscopio. — Por la definición dada de cantidad de calor y de temperatura mayor y menor será fácil saber qué cuerpos tienen temperatura mayor o menor que la temperatura del hielo en fusión. Los cuerpos que al ponerse

en contacto con el calorímetro de hielo hagan fundir hielo estarán a temperatura mayor; los que provocan la congelación del agua, a temperatura menor, y los que no alteren el equilibrio, a temperatura igual.

Sean ahora dos fuentes térmicas F_1 y F_2, cuyas temperaturas T_1 y T_2 sean ambas mayores que la temperatura T_0 del hielo en fusión (F_0). Se trata de poder decidir experimentalmente si $T_1 \lesseqgtr T_2$.

Tomemos un cuerpo cualquiera C, un trozo de hierro, por ejemplo, y dejémosle un cierto tiempo t en contacto con F_1. Llevémosle luego al calorímetro de hielo y midamos el calor transportado Q. Esta cantidad de calor depende del tiempo t en que el cuerpo C permanece en contacto con F_1. Pero se observa que a partir de un cierto intervalo de tiempo t_0 la cantidad de calor transportada por C se hace constante. Decimos entonces que a partir de t_0 se ha establecido el equilibrio térmico, pues a partir de ese momento el cuerpo no absorbe ni entrega calor a la fuente F_1. Luego, en ciertas condiciones, para un intervalo de contacto igual o mayor que t_0, entre C y F_1, las temperaturas de C y F_1 se igualan.

Llamemos Q_1 a la cantidad de calor que transporta entonces el cuerpo C al pasar de F_1 a F_0.

Sea Q_2 el calor transportado por el mismo cuerpo C de F_2 a F_0 habiendo alcanzado el equilibrio térmico con F_2. Todas estas operaciones suponemos que se realizan a presión constante. (Ver pág. 272).

Si fuera

$$Q_1 > Q_2$$

querrá decir que el cuerpo C al pasar de F_1 a F_2 y alcanzar las temperaturas T_1 y T_2 cede el calor

$$Q_1 - Q_2$$

a la fuente F_2, por lo cual si pasa calor de F_1 a F_2 deberá ser

$$T_1 > T_2$$

Se tiene así un medio para poder realizar un ordenamiento de las temperaturas [1].

[1] Si no nos referimos a los estados de equilibrio de C, con F_1 y F_2, lo que compararíamos serían las temperaturas T_1' y T_2' de C antes de su introducción en el calorímetro.

Se constata además que el volumen de C no varía una vez establecido el equilibrio térmico. Además para la mayoría de las substancias se cumple, llamando V_1 y V_2 a los volúmenes que adquieren estando en equilibrio con las fuentes F_1 y F_2 para las cuales es $T_1 > T_2$ que $V_1 > V_2$ o sea que el volumen es una cierta función creciente de la temperatura.

En esto se basan los termómetros comunes de escala arbitraria y que quizá conviniera llamar simplemente termoscopios.

Podría pensarse que este ordenamiento pudo ya haberse hecho antes de enunciar el segundo principio, pero no es así, puesto que, si haciendo la experiencia con hierro resulta $T_1 > T_2$, habría que probar que con cualquier otra substancia se conserva el signo de la desigualdad (o de la igualdad), lo que es consecuencia del segundo principio.

Definicion de temperatura

Máquina reversible. — Sea una máquina que funciona entre F_1 y F_2 extrayendo de F_1 el calor Q_1, entregando a F_2 el calor Q_2, y transformando en trabajo la diferencia $Q_1 - Q_2 = A$. Si dicha máquina puede funcionar en sentido inverso recibiendo del esterior el trabajo A, sacando de F_2. Q_2 y entregando Q_1 a F_1 diremos que es reversible.

Llamaremos rendimiento a la relación

$$\rho = \frac{Q_1 - Q_2}{Q_1}$$

Del segundo principio se desprende de inmediato que dicho rendimiento es máximo para una máquina reversible y que no depende de la naturaleza de la misma. Por lo tanto otra máquina reversible que funcionara entre las mismas fuentes intercambiando con ellas los calores Q'_1 y Q'_2 deberá dar el mismo rendimiento que la anterior, de donde resulta que

$$\frac{Q_1}{Q_2} = \frac{Q_1'}{Q_2'}$$

Esta relación constante no depende de la máquina (de su substancia); depende únicamente de las fuentes, y diremos que es igual a la relación de sus temperaturas:

$$\frac{Q_1}{Q_2} = \frac{T_1}{T_2} \quad \text{o sea} \quad \frac{Q_1}{T_1} = \frac{Q_2}{T_2}$$

Si $T_1 = T_2$ será $Q_1 = Q_2$, el rendimiento será nulo, lo que significa que ninguna máquina podrá funcionar entre esas fuentes en ese caso, lo que corresponde a la definición de igualdad que ya habíamos dado.

Si $T_1 > T_2$, $Q_1 > Q_2$ o sea se saca calor de F_1 y se entrega a F_2, de acuerdo a la definición anterior de temperatura mayor y menor.

Siendo la conducción del calor irreversible, así como también la producción de calor por roce o la expansión de un gas sin producción de trabajo como se demuestra fácilmente apoyándose en el segundo principio, se deduce que en una máquina reversible no deben efectuarse ninguno de los procesos anteriores. Su funcionamiento tendría que consistir en la sucesión de estados de equilibrio, y no siendo posible la conducción del calor, las únicas transformaciones admisibles serían las efectuadas a temperatura constante (isotermas) y aquellas en que no se intercambie calor con el exterior (adiabáticas). En una palabra, la máquina debe recorrer el conocido ciclo de Carnot.

Termómetros de gas. — Sea una substancia cuya presión p por cierta función de su volumen $f(v)$ se mantiene constante si la temperatura no varía:

$$p f(v) = C$$

Dependiendo C únicamente de la temperatura. Si una substancia de esta clase existiera, la validez de la ley anterior se podría verificar con un simple termoscopio. Si es $F(v) = V$, se trataría de la ley de Mariotte. Supongamos además que la energía interna U es función únicamente de la temperatura (Ley de Joule), ley que también podría verificarse, si alguna substancia la cumpliera, con un termoscopio.

Hagamos recorrer a la substancia un ciclo de Carnot entre las isotermas T y T_0. Sean los calores respectivos Q y Q_0, y los volúmenes extremos de cada isoterma V' y V para la primera y V_0' y V_0 para la segunda.

Sea además C_0 el valor de la constante correspondiente a T_0. Se tendrá:

$$Q = \int_v^{v'} p\, dv = C \int_v^{v'} \frac{dv}{f(v)} = C F(v' v)$$

y análogamente

$$Q_0 = C_0 F(v_0' v_0)$$

De acuerdo a la definición de temperatura deberá ser:

$$\frac{C\,F\,(v'\,v)}{C_0\,F\,(v_0'\,v_0)} = \frac{T}{T_0}$$

o sea

$$\frac{C}{T}\,F\,(v'\,v) = \frac{C_0}{T_0}\,F\,(v_0'\,v)$$

es decir que esta expresión debe ser independiente de la temperatura T, para lo cual deberá ser

$$C = R\,T$$

Siendo R una constante.

De aquí

$$p\,f\,(v) = R\,T$$

o sea, manteniendo constante el volumen resulta ser la presión proporcional a la temperatura. Se tendría así un medio de medir T si existiera una substancia que cumpliera con la ley de Mariotte y con la ley de Joule.

Reducción de una escala arbitraria. — Consideremos un ciclo de Carnot infinitamente pequeño que en el plano de las presiones y los volúmenes rodea al punto p, v, T.

Sea dT la diferencia de temperatura entre las dos isotermas, diferencia que en la escala arbitraria corresponde a un dt. El rendimiento será $\frac{dT}{T}$ igual al área del ciclo $dp\,.\,dv$ sobre el calor total absorbido de la fuente a temperatura mayor ΔQ. Es:

$$\Delta\,Q = p\,d\,v + \left(\frac{\partial\,U}{\partial\,v}\right)_T d\,v$$

de donde

$$\frac{dT}{T} = \frac{d\,p}{p + \left(\frac{\partial U}{\partial\,v}\right)_T}$$

Aquí dp es la variación de presión entre la isoterma T y la otra de temperatura $T + dT$ para el volumen v, que corresponde en la escala arbitraria a las isotermas t y $t + dt$. Luego será

$$d\,p = \left(\frac{\partial\,p}{\partial\,t}\right)_v dt = \beta\,dt$$

Sustituyendo e integrando entre t_0 y t o sea entre T_0 y T se tiene la conocida fórmula de Lord Kelvin:

$$ln \frac{T}{T_0} = \int_{t_0}^{t} \frac{\beta}{p + \left(\frac{\partial U}{\partial v}\right)_t} dt$$

Si transcribimos aquí esta fórmula es porque en los tratados recién se llega a ella, por lo general, después de haber demostrado el teorema de Clausius y haber introducido la entropía en cuya expresión aparecen los calores específicos, que creemos sería más lógico introducir recién después de haber definido exactamente lo que se entiende por temperatura.

Nos es grato agradecer aquí las interesantes observaciones de los profesores R. G. Loyarte y E. Terradas con motivo de este trabajo (1).

(1) Cuando este trabajo fué sometido a la opinión del profesor E. Terradas nos observó que G. H. Bryan, en su monografía *Allgemeine Gründlegung der Thermodynamik* (1903), en la *Encyklopadie der Mathematisehen Wissenschaften* (V. Band) seguía un camino más o menos análogo al propuesto por nosotros.

Consultado que fué ese trabajo, que hasta entonces desconocíamos, constatamos que, en efecto, trata Bryan de introducir la temperatura sólo después de enunciar el segundo principio.

Para lograr esto convierte el principio de equivalencia en una definición de la cantidad de calor quedando así reducido aquel principio a una simple tautología. Pero ésta no sería, sin embargo, la objeción más seria que pudiera hacerse del trabajo de Bryan. En él, estando definida la cantidad de calor por el trabajo capaz de producirla, aparte de no poder verificar experimentalmente el principio de equivalencia, se hace imposible, aún teóricamente, distinguir calor de trabajo, y no se tiene, en consecuencia, derecho alguno de hablar, por ejemplo, de transformaciones adiabáticas de un sistema (que no intercambian calor) y que reciben o entregan cierto trabajo.

Las mismas medidas experimentales del equivalente mecánico del calor se convierten así en simples medidas del calor específico del agua y es indispensable adoptar como equivalente la unidad.

Además el segundo principio lo enuncia en la conocida forma de Clausius en la cual interviene la noción de temperatura.

No insistimos en otras observaciones de segundo orden que a nuestro juicio también contribuyen a no hacer aceptable el desarrollo de G. H. Bryan.

LA UROBILINA EN LA IDENTIFICACIÓN DE ÍNFIMAS CANTIDADES DE COBRE Y DE MERCURIO

POR

CARLOS A. SAGASTUME y VIRGILIO OLIVA

La urobilina reacciona con las sales de mercurio y de cobre, formando un complejo que en soluciones muy diluídas presenta color rosa, que, por aumento de la concentración, se intensifica hasta el púrpura.

En lo que respecta a las sales cúpricas, esta reacción coloreada ya había sido aplicada por Studenski [1] en 1893 para investigar urobilina urinaria.

En 1930 Emmerie [2] usa esa reacción en la microdeterminación del cobre para cantidades de este metal que oscilan entre 0.01 y 0,0001 miligramos en soluciones amoniacales. Hace notar este autor que el mercurio produce la misma reacción, inconveniente que él elude precipitando este catión por ioduro de potasio. Recientemente (1936) Bertrand y Saint-Rat [3] presentan a la Academie des Sciences de Paris, una nota titulada: « Sobre una nueva reacción coloreada del cobre y de la urobilina ».

Es evidente que estos investigadores desconocían los trabajos anteriores, y de ahí que después de referirse al ferrocianuro de potasio y a la formaldoxima para reconocimiento del cobre en soluciones acuosas muy diluídas, expresen textualmente: « Nosotros hemos descubierto y estudiado un reactivo superior a los precedentes a la vez por su especificidad, su sensibilidad y la facilidad de su empleo: es la urobilina en solución al milésimo en alcohol a 60° ».

En punto a sensibilidad del reactivo expresan Bertrand y Saint-Rat que es capaz de acusar ínfimas contidades de ion cúprico (0,0001 miligramo) y en punto a especificidad afirman que lo han ensayado con sulfatos y cloruros de gran número de metales sin observar coloración con otra sal que la de cobre, pués en las soluciones

de zinc aparece fluorescencia verde, pero sin coloración del líquido. « La reacción dada por la urobilina es, pués, muy característica para las sales de cobre », afirman los autores, sin aludir para nada al mercurio.

Nosotros estamos realizando actualmente un trabajo con el propósito de resolver en forma práctica el problema de la evaluación por vía colorimétrica de la urobilina en diferentes líquidos del organismo. Aprovechamos para ese objeto la propiedad de dicho pigmento de reaccionar con el cobre, a la que nos hemos referido.

A poco de iniciar nuestros ensayos experimentales advertimos que el mercurio acusa también la misma coloración y en forma extremadamente sensible. Esto nos indujo a llamar la atención de quienes trabajan en química analítica, para que no incurran en el error de acordar a la reacción urobilina-cobre, la especificidad que le asignan Bertrand y Saint-Rat.

Por lo que concierne a la reacción entre la urobilina y el mercurio, Schmidt ([4]) (1900), Triboulet ([5]) (1909) y Goiffon ([6]) (1920) la emplean para caracterizar el pigmento en materias fecales.

Ateniéndonos a nuestras experiencias con soluciones de sales mercúricas puras, opinamos que a los reactivos de que se sirve la química analítica para caracterizar el ion mercurio, se puede agregar la urobilina como muy sensible, pero siempre que se opere en ausencia de cobre.

Hemos obtenido la urobilina siguiendo la técnica de Watson ([7]). Preparamos una solución alcohólica al 1 en 10.000 y por otra parte sendas soluciones de cloruro y sulfato mercúrico en agua destilada. Observamos que al agregar el reactivo a la solución diluída de mercurio, se obtiene una coloración rosada que, según la dilución, se produce inmediatamente o después de algunos segundos.

La reacción es sensible para denunciar miligr. 0,001 de mercurio.

Con un exceso de urobilina, la coloración es tanto más intensa cuanto mayor es la concentración de mercurio.

En presencia de un exceso de mercurio, la coloración es proporcional a la cantidad de urobilina.

Hemos introducido una pequeña, pero ventajosa, modificación en la técnica de Bertrand y Saint-Rat para el cobre y que puede servir también para el mercurio.

Basándonos en la gran solubilidad en cloroformo de los complejos urobilina-cobre y urobilina-mercurio, hemos comprobado que se pueden extraer de la solución acuosa, y de este modo concentrar, intensificar y tornar más nítida la coloración. Aconsejamos proceder

en la siguiente forma: a 0,5 cm³ de solución acuosa de sal mercúrica diluída, medidos en tubito muy estrecho, añadir 0,15 cm³ de urobilina al 1/10.000 en alcohol. En otro tubito igual que servirá de control, se vierten 0,5 cm³ de agua destilada y 0,15 cm³ de urobilina. Una vez aparecido el tinte rosado, se sigue agregando urobilina a ambos tubos hasta que se observe que se torna naranja debido a que el color amarillo del pigmento afecta el rosa de la reacción. A cada uno de los tubitos se añade 0,1 cm³ de cloroformo, se agita y después se abandona al reposo. En la capa clorofórmica se aprecia mucho mejor el color rosa de la reacción.

Los ensayos experimentales efectuados hasta este momento, nos autorizan a afirmar:

1° Las sales de mercurio en solución al 1/100.000 o sea en cantidades de mgr. 0,001 producen la misma reacción que el cobre, frente a la urobilina.

2° En ausencia de cobre, se puede usar la urobilina como reactivo muy sensible para la caracterización del mercurio.

3° Para sensibilizar la reacción, es aconsejable extraer con cloroformo el complejo coloreado.

BIBLIOGRAFÍA

(1) Studenski. Petsburg. *Med. Wochen.* 1893, p. 283, in *Chem. Zentralbl.* 1893, II, 668.
(2) Emmerie, A. *Chemical Weekblad*, 1930, 27, 552, in *Brit. Chem. Abstr.*, 1930, p. 1393.
(3) Bertrand, G., y Saint-Rat, L. *C. R. As. Sc.*, 1936, 203, 140.
(4) Schmidt. *Zeitsch. Prakt. Chem.*, 1900, p. 201.
(5) Triboulet. *C. R. Soc. Biol.*, 1909, p. 394.
(6) Goiffon. *C. R. Soc. Biol.*, 1920, p. 344.
(7) Watson, C. *Journ. Physiol. Chem.*, 1935, 233, 39.

HESPERIOIDEA ARGENTINA IX

POR

KENNETH J. HAYWARD
F.R.E.S., F.R.G.S., F.Z.S.

Con la preparación de este trabajo, se termina el estudio del material de Hespéridos argentinos conocidos hasta la fecha. Hay todavía ocho especies sin clasificar, todas representadas en mi colección por una sola hembra (algunas de éstas son nuevas para la ciencia), pero hasta tanto no se encuentren los machos correspondientes, será imposible describirlas.

Poco pensaba al iniciar esta revisación, en enero de 1932, que el trabajo me costaría seis años, durante los cuales ha sido necesario estudiar 400 especies de cerca de 140 géneros y describir más de 90 especies nuevas.

En adelante tenemos que esperar muchos cambios en la nomenclatura y, especialmente, en la posición genérica de ciertos insectos. Por el hecho de que el Brig. Gen. W. H. Evans, del Museo Británico, está trabajando en una revisación general de los Hespéridos americanos, he refrenado en lo posible la creación de nuevos géneros, colocando las especies, cuando he tenido necesidad, en el género viejo más próximo.

Aunque 400 especies parece un número muy elevado, no tengo la menor duda de que esta cifra aumentará anualmente por muchos años, especialmente si los coleccionistas se dedican un poco más a cazar los representantes de esta familia, especialmente las especies chicas y de colores oscuros.

No puedo dejar pasar esta oportunidad sin agradecer sinceramente a las siguientes personas, quienes han facilitado mi tarea en una forma u otra: Prof. Martín Doello-Jurado, por haber puesto a mi disposición la colección nacional de hespéridos, y don Carlos Rusconi la del Museo de Historia Natural de Mendoza; y a los señores Alberto Breyer, Fernando Bourquin, Pablo Köhler y otros por el préstamo de colecciones y material de estudio.

A las comisiones directivas de la Sociedad Entomológica Argentina (1932-38) y de la Sociedad Científica Argentina (1935-38), por haber publicado con la mínima demora unas 450 páginas de texto y láminas. Al Sr. Emilio Gemignani por haber en varias ocasiones prestado su ayuda en buscar referencias en la biblioteca del Museo y por otras cortesías. Especialmente tengo que agradecer a mis amigos Capt. N. D. Riley y Gral. Evans del Museo Británico y Sr. Ernesto Bell de Nueva York, por haberme ayudado mucho en clasificar ciertos insectos y, además, proporcionado otros datos de interés y utilidad.

Goniurus proteus L.

Una nueva procedencia para este insecto es la provincia de Salta (Köhler).

Goniurus dorantes Stoll.

Conocido ahora de Corrientes (Alberto Breyer).

Goniurus simplicius Stoll.

Nuevas procedencias son Corrientes (Alberto Breyer), Buenos Aires y Chaco.

Paches geometrinus Fldr.

Nueva procedencia: Corrientes (Alberto Breyer).

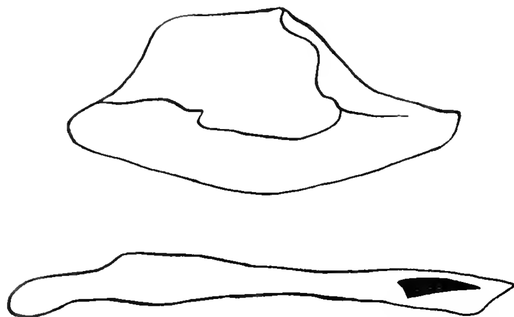


FIG. 1. — Genitalia de *Milanion leucaspis* Mabille. (Válvula y aedoeagus).

Milanion leucaspis Mabille. (Fig. 1).

1878. Mabille, Pet. Nouv. Ent., p. 230.

Difiere de *hemes* Cr. (ver Hayward, *Rev. Soc. Ent. Arg.* 5: 237, 1933), por tener la mancha blanca del ala posterior mucho más

ancha (siendo el borde oscuro del ala angosto) y el abdomen negro.

Patria. — Brasil y de Corrientes en la Argentina.

Pholisora minor (Schaus). (Fig. 2).

1902. *Staphylus minor* Schaus, Proc. U. S. Nat. Mus., p. 432.
1923. *Staphylus minor* Draudt in Seitz Macrolep. 5: 905.
1925. *Pholisora minor* Lindsey, Denison Univ. Bull. 21: 86, pl. 25, fig. 10, & pl. 27, fig. 5 (genitalia).
1936. *Staphylus minor* Kivirikko, Ann. Ent. Fennici 2, (2): 61.

Expansión alar 22 mm.

Pardo negruzco con un tono muy ligeramente purpúreo, el único diseño que se puede apreciar en los ejemplares a la vista siendo

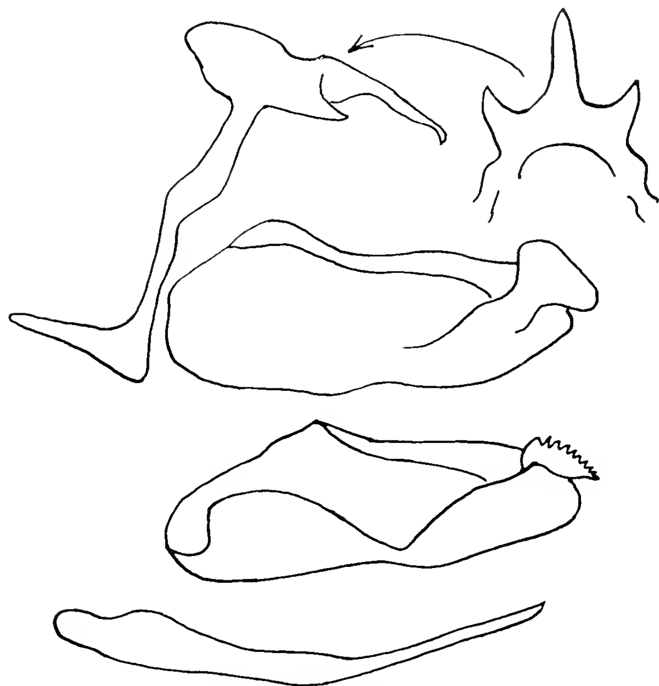


FIG. 2. — Genitalia de *Pholisora minor* (Schaus).

una fina línea algo amarillenta, antemarginal, en la faz superior; en el ala anterior, esta línea apenas visible.

La faz inferior algo más clara y sin diseño.

Traté de este insecto en mi *Hesperioidea Argentina* III (inéd.), como dudoso para la fauna argentina (Misiones, Kivirikko).

Patria. — Perú (Schaus), Colombia, Perú, Bolivia (Bell) y en la Argentina de Tucumán en mi colección.

Pholisora tucumanus (Plötz).

Staphylus fascia Hayward (*Rev. Soc. Ent. Arg.* 5, (24): 245, lám. 26, fig. 11 y lám. 22, fig. 3 (genitalia), 1933), *Pholisora fascia* (Hayward), (*Rev. Chil. de Hist. Nat.* 40: 276, lám. 19, fig. 2 (genitalia) 1936), es un sinónimo.

Gorgythion pyralina Mschlr.

Nueva procedencia: la provincia de Corrientes (Breyer).

Género *Dardarina* Evans.

En *An. Soc. Cient. Arg.* 125: 224, el nombre de este género está equivocadamente escrito como *Dardarinia.*

Género *Yvretta* Hemming.

1900. *Chaerephon* Godman, Biol. Centr. Amer. Rhop. 2: 474 (nom. praeoc.).
1935. *Yvretta* Hemming, Stylops 4:3 (nom. nov.).

Antenas la mitad del largo de la costa y con una corta maza, el ápice puntiagudo y de forma de gancho. Artejo final de los palpos corto y algo erguido. Apice del ala posterior agudo en los machos y más obtuso en las hembras. Tibias de las patas medianas y traseras espinosas, tibias traseras con dos pares de espolones. El estigma del macho está ausente en algunas especies, en otras consiste de una fina línea entre el punto de nacimiento de Cu^1 y la analis a $^1/_2$, ligeramente interrumpida en la célula cubital inferior.

Orthotipo *Pamphila citrus* Mabille.

Yvretta vesana Weeks.

1901. *Chaerephon vesana* Weeks, Proc. New Engl. Zool. Club. 2: 80.
1905. *Chaerephon vesana* Weeks, Illustr. Diurn. Lep. 1: 55, pl. 16, fig. 1.
1906. *Chaerephon mengeli* Weeks, Psyche 13: 68.
1911. *Chaerephon mengeli* Weeks, Illustr. Diurn. Lep. 2: 17, pl. 11, fig. 1.
1925. *Chaerephon pudorina* Lindsey (nec. Plotz), Den. Univ. Bull. Journ. Scien. Lab. 21: 92, pl. 26, fig. 10 & pl. 30, fig. 11 (genitalia).
1932. *Chaerephon lindseyi* Bell, Amer. Mus. Nov. N° 555, p. 4, fig. 7 (genitalia).

♂ Expansión alar 25 mm.

Color de fondo pardo tirando a café, el borde externo finamente pardo más oscuro, las orlas del color de fondo, el estigma negruzco.

En el ala anterior hay rastros de tres puntos subapicales y otros dos en el disco del ala, pero por lo general estos cinco puntos faltan en la faz superior de los ejemplares argentinos.

En el ala posterior hay una hilera de puntos amarillentos discales, apenas visibles.

La faz inferior es más clara, los puntos del ala anterior más definidos y más grandes y con una manchita clara y difusa en la célula anal. En el ala posterior los puntos discales algo más distintos que en la faz superior.

♀ Igual al macho en tamaño y diseño, salvo por la falta del estigma y por tener la maculación, por lo general, algo más claramente definida. En algunos ejemplares se encuentra otro punto claro en el fin de la célula del ala anterior.

Patria. — Brasil, Paraguay, Argentina, Bolivia y Guayana Francesa. En la Argentina del Norte de Misiones (Hayward) en col. Mus. Arg. de Ciencias Naturales.

Género *Poanes* Scudder.

1872. *Poanes* Scudder, Rep. Peabody Acad. 1871, p. 76. Orthotipo *Hesperia massasoit* Scudder.
1872. *Phycanassa* Scudder, *op. cit.*, p. 77. Orthotipo *Hesperia viator* Edwards.
1872. *Choranthus* Scudder, *op. cit.*, p. 79. Orthotipo *Hesperia radians* Lucas.
1905. *Paratrytone* Dyar, Journ. N. Y. Ent. Soc. 13: 136. Orthotipo *Pamphila howardi* Skinner.

Por lo cual *Choranthus* (Hayward, *Rev. Soc. Ent. Arg.* 6: 123, 1934) debe ser eliminado, y la especie *immocerinus* Hayward, colocada en el género *Poanes*.

Género *Atrytone* Scudder.

1872. *Atrytone* Scudder, Rep. Peabody Acad. 1871, p. 77. Orthotipo *Hesperia iowa* Scudder.
1872. *Euphyes* Scudder, *op. cit.*, p. 80. Orthotipo *Hesperia metacomet* Harris.
1905. *Anatrytone* Dyar, Journ. N. Y. Ent. Soc. 13: 140. Orthotipo *Hesperia delaware* Edwards.

Por lo tanto debe suprimirse el género *Euphyes* (Hayward, *Rev. Soc. Ent. Arg.* 6: 116, 1934) y transferir la especie *meridiani* Hayward al género *Atrytone*.

Lerodea erythosticta Prittwitz.

1868. Prittwitz, Stett. Ent. Zeit. 29: 186, fig. 1.

En *An. Soc. Cient. Arg.* 125: 382 (11 del tiraje aparte) di en error como autor de esta especie « 1883, Plötz, *Exot. Schmett.* 20 Tab.

483 ». Tengo que agradecer a mi amigo Ernesto Bell por haberme señalado este error. En el lugar citado la especie figura como *Megistias erythosticta* (ver *Hesperioidea Argentina* VIII).

Lerodea tripunctata Latreille.

Nueva procedencia: la provincia de Corrientes (Alberto Breyer).

Lerodea tripuncta (Herrich-Schäffer).

1869. *Prenes tripunctus* Herrich Schaffer, Podr. Syst. Lep., p. 82.
1931. *Lerodea tripunctus* Lindsey, Bell & Williams, Den. Univ. Bull. 26: 134, pl. 32, fig. 36 (genitalia).

Es algo difícil separar esta especie de *tripunctata* Latreille. Por lo general los puntos subapicales resaltan más en *tripuncta*, pero a veces, son poco visibles o faltan por completo, y su número varía hasta tres. Los puntos amarillentos discales son como en *tripunctata*. La única forma de clasificar esta especie con seguridad es por un examen de sus genitales en que el aedoeagus tiene una espina larga en *tripunctata* y más corta en *tripuncta*. Además hay una ligera diferencia en la terminación de las válvulas.

Patria. — Cuba y toda América del Sur. Tengo o he visto ejemplares de Cuba, Brasil, Guayana Británica, Panamá, Perú, Paraguay, Ecuador y la Argentina, de la cual tengo ejemplares de Corrientes.

Lerodea noctis Plötz.

Nueva procedencia: Corrientes (Alberto Breyer).

Lerodea mocoreta nov. (Fig. 3).

Expansión alar 24 mm.

Es difícil distinguirla de la especie *tripuncta* Herrich-Schäffer (ver más arriba), salvo por un examen de sus genitales.

Color de fondo parduzco, apenas más claro hacia el borde externo. En el ala anterior hay tres puntos subapicales ligeramente en curva (la concavidad distad) y tres puntos claros discales, uno en el ápice de la célula mediana inferior, otro y el más grande en el ápice de la célula cubital superior y uno apenas visible en la célula cubital inferior. (Es de esperar que en algunos ejemplares estos puntos faltarán en parte o por completo, como pasa en las demás especies de *Lerodea*).

La faz inferior es más clara, la maculación del ala anterior como en la faz superior, pero más resaltante; el ala posterior con una hilera indistinta de puntos claros en el disco.

Las orlas son grisáceas.

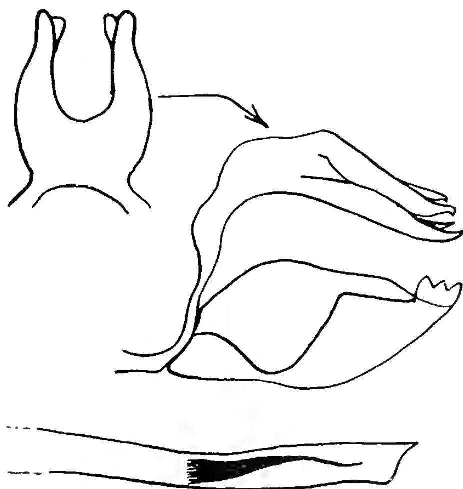


FIG. 3. — Genitalia de *Lerodea mocoreta* Hayw. (Holotipo ♂).

Nombrada como recuerdo de la tribu de indígenas que anteriormente habitó la región que conocemos ahora como la provincia de Corrientes.

Holotipo ♂ en mi colección, de Corrientes.

Phanes belli nov. (Fig. 4).

No puedo encontrar diferencias en tamaño, coloración o maculación entre esta especie y *Phanes cumbre* Schaus y *Phanes triumviralis* Hayward.

Estas tres especies vuelan juntas, y se puede separarlas solamente por un examen de los genitales de sus machos.

Desgraciadamente, el único macho que poseo tiene la terminación de las válvulas algo rotas, por lo cual el dibujo es defectuoso.

Tengo el placer de dedicar esta especie a mi amigo señor Ernesto Bell, de Nueva York, quien fué el primero en señalarme (*in litteris*) que había una tercera especie entre las *cumbre* capturadas durante mi viaje a Misiones en 1933-34 y de obsequiarme con un ejemplar macho.

Holotipo ♂ de Puerto Bemberg en Misiones (Hayward, XII, 1933), en mi colección.

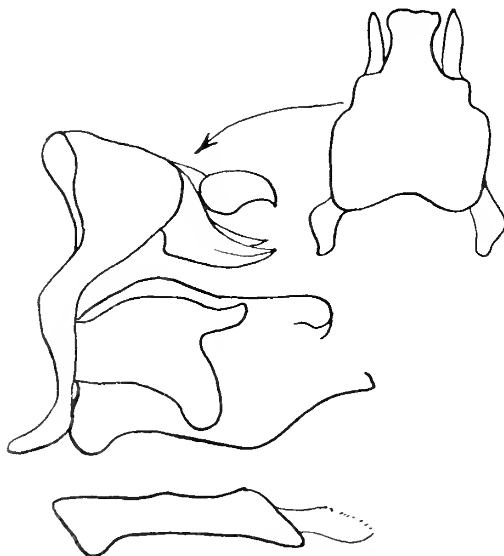


Fig. 4. — Genitalia de *Phanes belli* Hayw. (Holotipo ♂).

Género *Mnasicles* Godman.

1901. *Mnasicles*, Godman en Godman & Salvin, Biol. Centr. Amer. Rhop. 2: 602.

Antenas delgadas y la mitad (o más) del largo de la costa. Tercer artejo de los palpos largo. M^2 algo deprimida en su base. Alas posteriores redondeadas en el ángulo anal. Tibias medianas sin espinas. El estigma del macho formado por una línea (interrumpida en la célula cubital inferior) entre el punto de nacimiento de Cu^1 y la analis.

Ortothipo *Mnasicles geta* Godman.

Mnasicles köhleri nov. (fig. 5).

Expansión alar 24 mm.

Color de fondo parduzco, algo bronceado, algo más negruzco hacia el borde externo del ala anterior. Las orlas más claras.

En la base de ambas alas, y especialmente en el disco del ala posterior, hay pelos de color ocre.

La faz inferior mucho más clara, algo grisácea, la base y el disco del ala anterior negruzcos. En la mitad basal de la costa del ala anterior hay algunos pelos de color ocre.

Palpos grisáceos en la parte superior y blancos en la parte inferior.

Nombrada por mi amigo don Pablo Köhler, de quien he recibido muchas de las especies de hespéridos estudiados durante los últimos años.

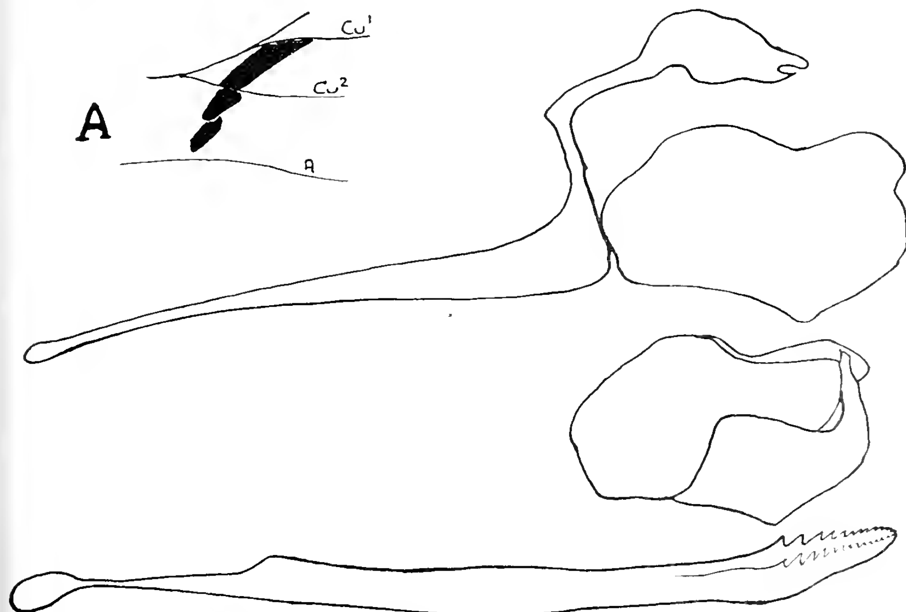


Fig. 5. — Genitalia de *Mnasicles köhleri* Hayw. (Holotipo ♂). (A) dibujo del estigma

Holotipo ♂, allotipo ♀ y un paratipo ♂ de Corrientes, todos en mi colección.

Mnasilus pencillatus Godman.

Nueva procedencia: provincia de Corrientes.

Paracarystus evansi Hayward.

En *An. Soc. Cient. Arg.* 125: 230 y 231, 1938, bajo esta especie, se encuentra citada la especie *P. menestriesi* Latreille. La ortografía correcta es *menestries* Latreille.

Godmania lunata Plötz, fa. *restricta* Hayward.

Nueva procedencia: Corrientes (Alberto Breyer).

Concordia, 11 de Diciembre de 1938.

OBSERVACIONES CRANEANAS EN LOS ELEFANTES DE MAR

POR

CARLOS RUSCONI

Entre nosotros poco es lo que se ha investigado sobre las modificaciones que se operan en el cráneo de los elefantes de mar (*Mirounga leonina* L.) durante su desarrollo extrauterino. Es cierto que materiales de esta naturaleza no son muy abundantes en nuestros museos pero es que tampoco se han preocupado de una manera especial a no ser alguno que otro estudioso que, por circunstancias diversas se concretaron al estudio relacionado con la protección de la fauna marina y entre cuyas investigaciones merecen ser destacadas las del distinguido zoólogo Dr. Marelli, las de Valette, etc.

Menos aún se han realizado trabajos monográficos vinculados con nuestros pinnípedos o en particular sobre cada uno de los géneros: *Otaria, Arctocephalus, Lobodon, Leptonychotes* y *Mirounga,* si se exceptúan las investigaciones hechas por especialistas extranjeros en base a materiales recogidos durante diversas expediciones que tienen sus comienzos desde hace varios siglos atrás. Para realizar una tarea de esa naturaleza que permita dar nuevos frutos o bien ampliar el conocimiento que de cada uno de esos géneros poseemos, no sólo se impone la tarea de practicar viajes y recoger materiales sinó de hacer pacientes investigaciones en los lugares donde esos animales habitan, especialmente aprovechando la época de parición que es precisamente cuando las hembras, por razones obvias, buscan en tierra un refugio adecuado para obtener el alimento a sus proles y por eso se hallan expuestas al alcance del observador.

Con excepción de los lobos de un pelo (*Otaria byronisa* Blainv.) que se muestran casi indiferentes al influjo de la civilización que va conquistando palmo a palmo la inmensidad de nuestras costas

y que pueden hallárselos solos o agrupados en manadas de a miles en diversos lugares de nuestra costa bonaerense o en la patagónica (Península Valdez, Río Negro, etc.). En cambio, tanto el otro género de los *Otariidae* o sea el lobo de mar de dos pelos (*Arctocephalus australis* Zimm) como los géneros de los *Phocidae* que comprende la foca cangrejera (*Lobondon carcinophagus* Gray); la foca de Ross o de grandes ojos (*Ommatophoca Rossi* Gray); el leopardo de mar (*Ogmorhinus leptonyx* Blainv.); el falso leopardo de mar o foca de Weddell (*Leptonychotes Weddelli* Lesson), todos ellos se encuentran circunscriptos a la zona más fría y semipolar.

Aun cuando los elefantes de mar tienen una distribución extraordinaria (Tierra del Fuego, Falkland, South Georgia, Shetlan, Juan Fernández, Kerguelen, S. Paulo, Tristán de Cunhna, sur de Nueva Zelandia, etc.), sin embargo, es más frecuente ver de vez en cuando parejas o individuos aislados que llegan a surcar las aguas del Atlántico viniendo a morir en las costas fluviales de la provincia de Buenos Aires, y cuando no remontan hasta muchos kilómetros el río Paraná, Uruguay, etc., como en el caso de las ballenas, delfines y otros animales marinos de organización anatómica inferior.

El movimiento emigrativo hacia el polo sur de nuestra especie *M. leonina*, o bien hacia el polo opuesto si se tratara de la otra especie *M. angustirostris*, no se debe a otra cosa que a la encarnizada caza a que se hallan sometidas tanto éstas como todas aquellas especies en que el lucro constituye el motivo principal.

Mientras tanto, señalaré aquí los principales detalles anatómicos craneanos de individuos pertenecientes a diferentes edades de nuestro elefante de mar, llamando la atención que algunos huesos modifican más profundamente su forma y tamaño durante el desarrollo completo del animal y para ello he de valerme de dos cráneos machos hallados por el extinto L. Kraglievich en la costa norte de la Península Valdez. Del adulto (nº 278 de la colección zoológica de Rusconi) poseo parte de su esqueleto y del joven (nº 506 de la misma colección) poseo su cráneo aunque tenía en el momento de su extracción todo el cuerpo que medía apenas un metro de longitud.

II

VISTA SUPERIOR

Praemaxillare. — Este hueso aumenta de volumen con la edad pero sufre pocas variaciones morfológicas, siendo en la parte superior o piso de la fosa nasal donde aparecen grandes crestas lon-

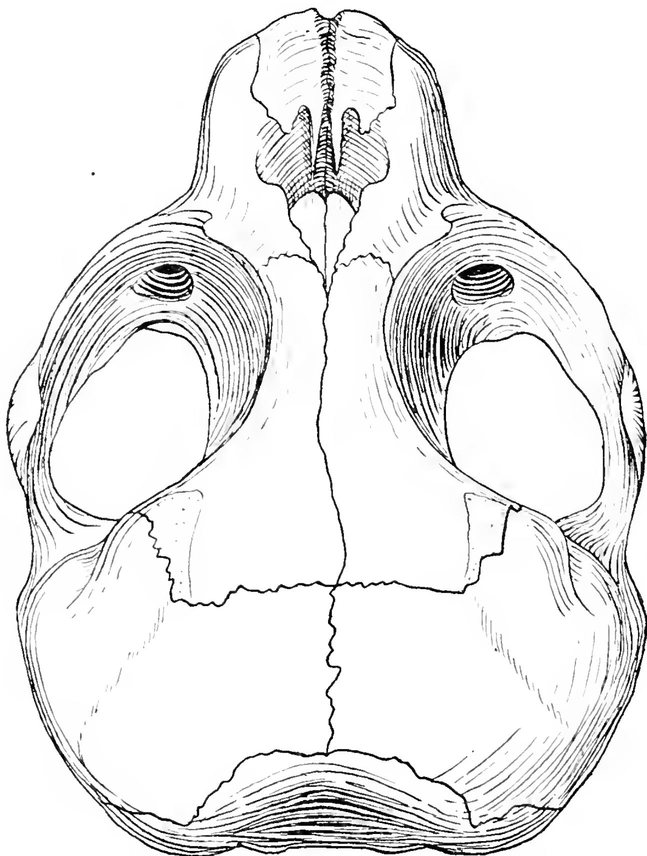


Fig. 1. — *Mirounga leonina* L. Ejemplar jóven ♂, visto de arriba, nº 506, a 1/2 del natural.

gitudinales que originan surcos profundos y sirven de alojamiento a los grandes músculos de la trompa que, como se sabe, adquiere ese órgano un gran desarrollo con la edad del animal (figuras 1 y 2).

MAXILLARE. — Estos huesos se prolongan mucho hacia adelante y adquieren también mayor robustés con la edad; pues, en los jóvenes ambos maxilares son estrechos en el extremo anterior mien-

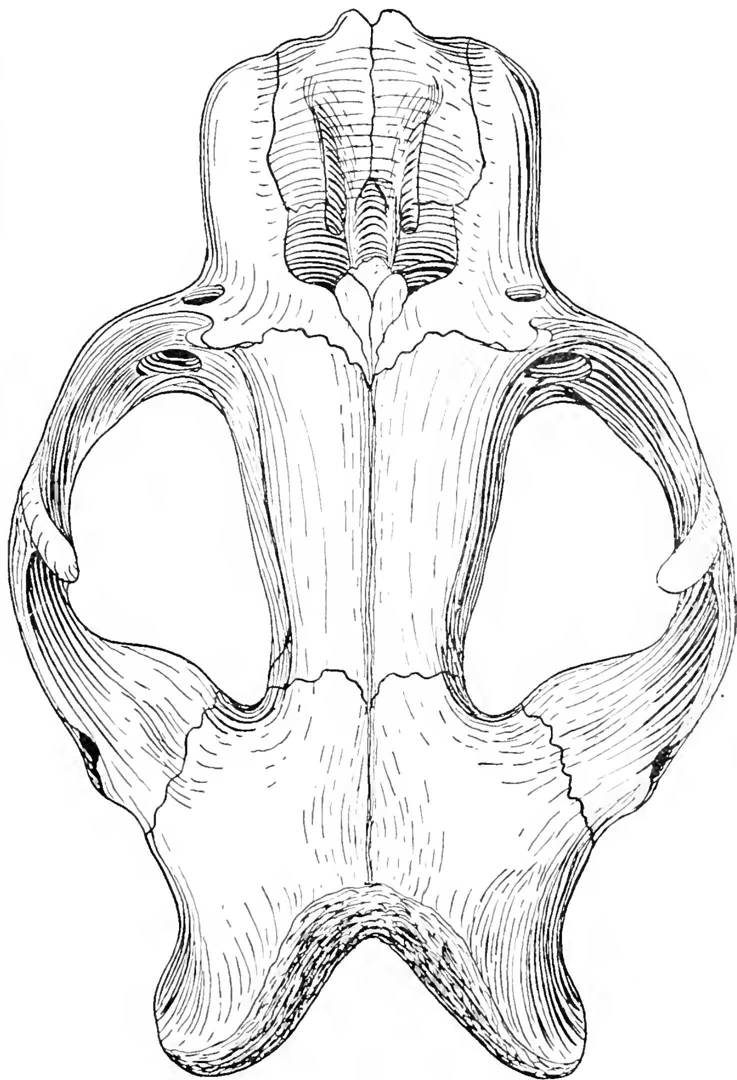


FIG. 2. — *Mirounga leonina* L. Ejemplar adulto ♂, nº 278, a 1/4 del natural.

tras que en los adultos ocurre un caso inverso sobre todo al nivel de los dientes caninos que es donde alcanza su mayor amplitud transversal. La longitud de este hueso (tomada desde la pun-

ta anterior al extremo posterior que une el frontal con el nasal, es de una vez y media el tamaño del joven.

NASALE. — Aumentan muy poco de amplitud pero en cambio sufren grandes modificaciones en el decurso de su desarrollo. En los jóvenes, la cara superior describe una línea recta que se dirige perpendicularmente hacia abajo, pero en los adultos, la orientación se invierte de modo que la superficie se curva fuertemente hacia arriba siendo debido, tal vez, al excesivo desarrollo del tabique nasal. Este último cartílago tiene en ese lugar un centímetro de espesor y se antepone a los huesos nasales de tal modo que quedan prácticamente encerrados por aquella sustancia cartilaginosa.

FRONTALE. — Muy importantes son también las modificaciones que se operan en estos huesos. En los juveniles se advierten dos planos principales: Una parte de la superficie es de línea casi plana en ambos sentidos anteroposterior y transverso; la otra mitad del hueso se orienta verticalmente de modo que se origina una línea divisoria y angulosa que viene a coincidir con el borde orbitario superior. Por el contrario, en los individuos adultos, los huesos adquieren una notable convexidad o abultamiento en su extremo anterior, describiendo transversalmente una sección semicilíndrica y no en forma de ángulo como en el caso de los jóvenes. Visto de arriba, los frontales del joven tienen la figura de un triángulo más o menos isósceles con su base situada hacia atrás, y su mayor constricción adelante; pero en los adultos se opera tal cambio que la mayor está precisamente en la parte anterior. Este enorme inflamiento está relacionado con el no menos desarrollo de los huesos etmoidales y además con la probóscide que adquiere su mayor amplitud en los individuos maduros. Con estas modificaciones que se operan en los frontales resulta también que el borde de la órbita es cada vez menos definido o mejor dicho no se destaca tan fácilmente como en los individuos de corta edad.

PARIETALE. — Esta es otra de las zonas craneanas en que se operan profundas modificaciones con la edad. Los parietales de los jóvenes describen una línea bastante convexa en ambos sentidos anteroposterior y transversa; mientras en los adultos la primera línea se torna cada vez más curva y el borde de ambos huesos se

eleva considerablemente contribuyendo a formar parte de la cresta occipital.

VISTA POSTERIOR

OCCIPITALE. — Notable es el cambio que se advierte también en estos huesos los cuales adquieren un enorme desarrollo sus alas laterales, prolongándose más de 10 centímetros hacia atrás del fondo del *planum occipitale*. Por esta causa dicha zona adquiere

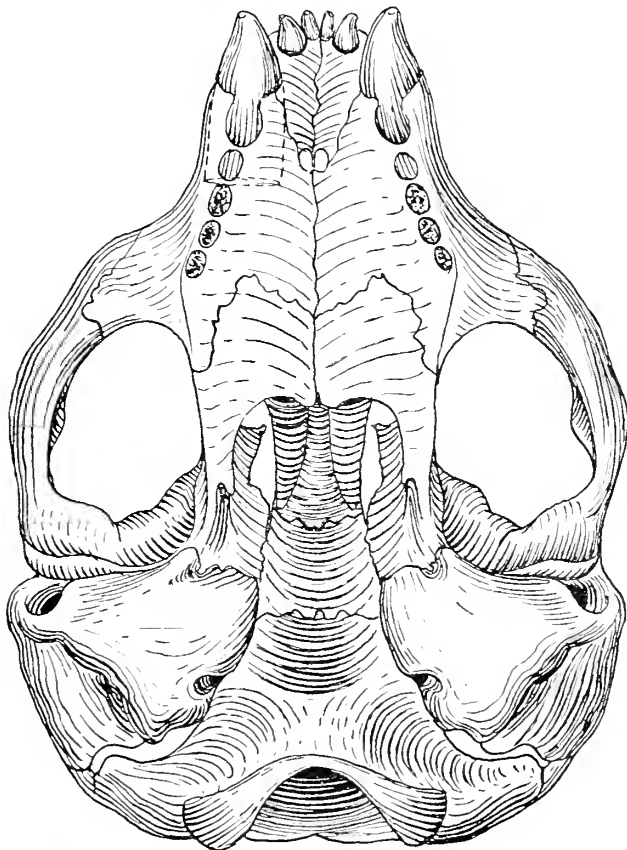


FIG. 3. — *Mirounga leonina* L. Ejemplar jóven nº 506, reducido a la 1/2 del natural.

con la edad una superficie muy cóncava en forma de una gran fosa. Interesante es observar, asimismo, el diámetro transverso del agujero occipital porque es más amplio en el joven, lo que en proporción resulta ser mucho mayor que el del adulto. En cambio no ocurre así con la distancia que media entre ambos lados

externos de los cóndilos occipitales que en el adulto es de media vez mayor. Dicha diferencia depende de la progresiva amplitud que adquieren lateralmente la superficie articular de los cóndilos occipitales.

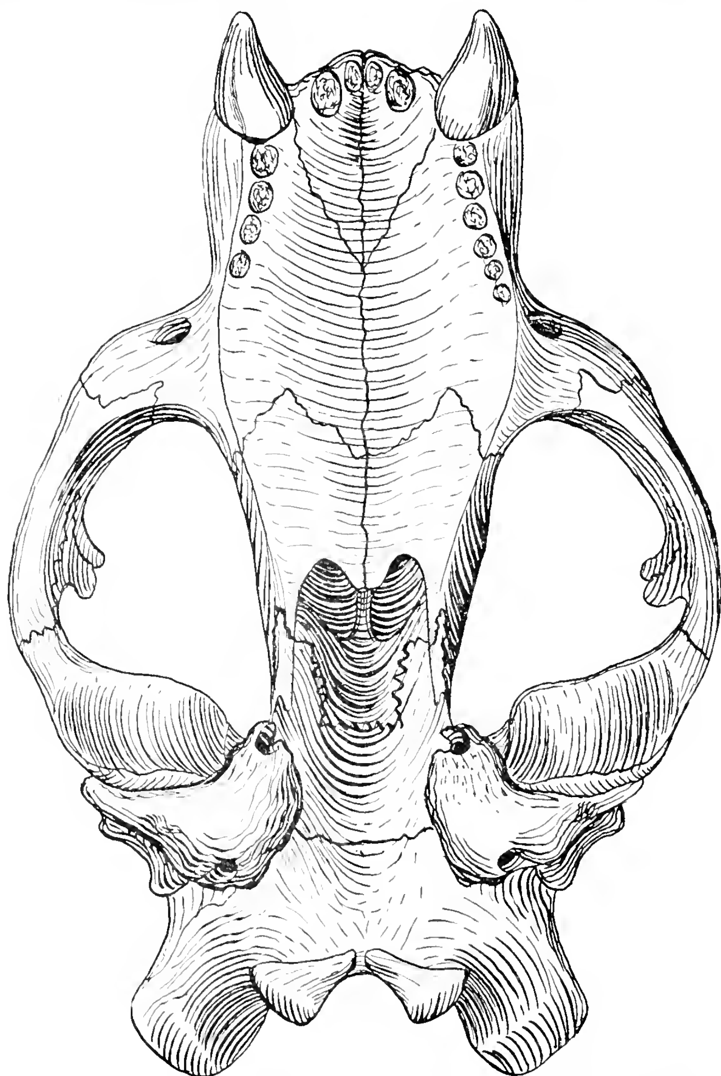


Fig. 4. — *Mirounga leonina* L. Ejemplar adulto ♂, nº 268, a 1/2 del natural.

VISTA INFERIOR

Ancho craneano. — En los individuos jóvenes, la distancia entre el borde de ambos agujeros audictivos es más o menos la misma que se obtiene cuando se miden ambos arcos cigomáticos (fi-

gura 3), pero en los adultos esta última aumenta considerablemente de anchura adquiriendo los arcos una fuerte curvatura y que es allí donde se encuentra su mayor anchura craneal (figura 4). Los arcos cigomáticos, a su vez, sufren algunas modificaciones en el decurso de su crecimiento; pues en los juveniles tiene el aspecto de una lámina ósea delgada, de borde filoso; mientras que en los adultos toman gran robustez y aquel borde se hace cada vez más romo presentando en estos casos una sección cuadrangular en una gran parte de su extensión. En los huesos restantes de la cara inferior, las modificaciones, por lo regular, consisten en un aumento progresivo.

VISTA LATERAL

El carácter morfológico que se advierte fácilmente cuando los cráneos son vistos lateralmente, es el que se refiere a los huesos parietales. En el joven (figura 5), el extremo posterior de los

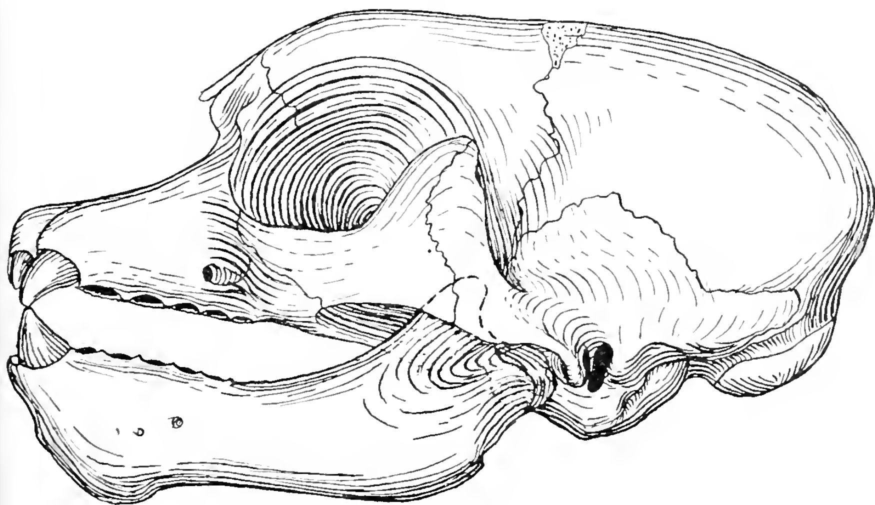


Fig. 5. — *Mirounga leonina* L. Ejemplar jóven, nº 506, a la 1/2 del natural.

parietales terminan describiendo una acentuada convexidad que cae verticalmente al borde posterior de los cóndilos occipitales; mientras en el adulto (figura 6), se opera un extraordinario desarrollo que motiva un recurvamiento hacia arriba y atrás de los citados huesos.

SUTURAS

Solamente en los individuos muy viejos debe operarse la obliteración de casi todas las suturas craneanas; pues el ejemplar que poseo, que es de gran magnitud y ha pertenecido a un individuo

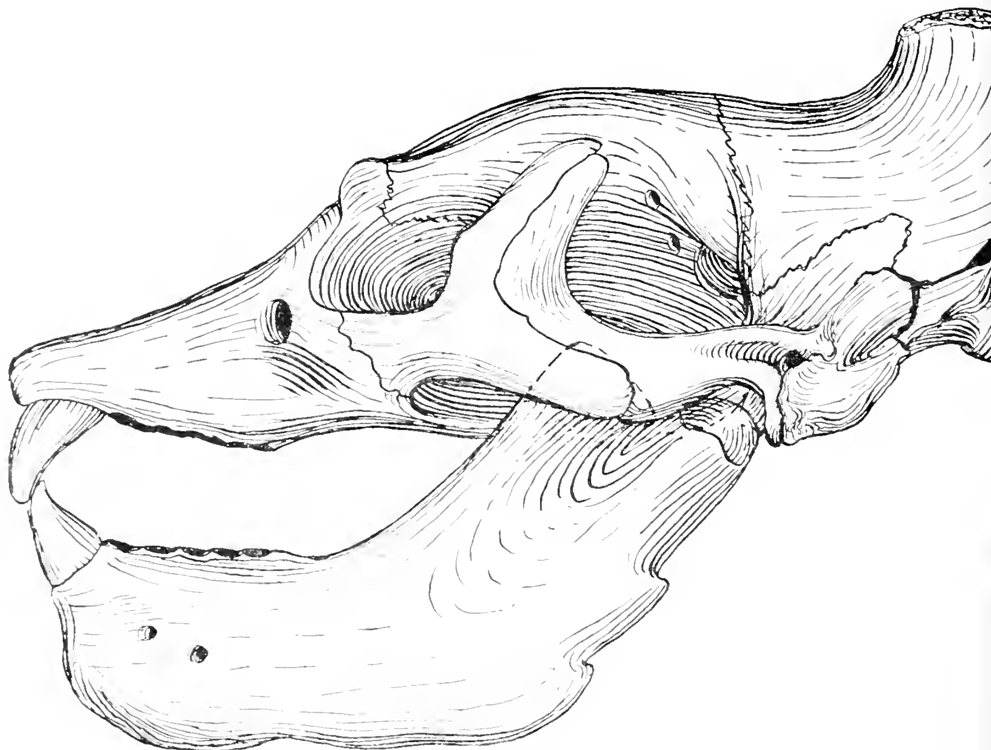


Fig. 6. — *Mirounga leonina* L. Ejemplar adulto ♂, nº 278, a 1/4 del natural.

viejo, sin embargo, todas las sinartrosis están abiertas igual que en el joven con excepción de la caja timpánica y del escamosal que se unen fuertemente desde una edad temprana.

MANDIBULA

La mandíbula adquiere un extraordinario crecimiento sobre todo en lo que respecta a la longitud sinfisiana, que es de dos veces y media la longitud de la que tiene en el joven. También es muy acentuado el crecimiento en altura de la rama la cual tiene en algunos trechos casi tres veces la altura de la del joven que

me sirve de término de comparación. Aparte de este extraordinario crecimiento, en la rama se operan modificaciones morfológicas relativamente apreciables. Una de ellas es, por ejemplo, el gran desarrollo de la protuberancia mentoniana lo que origina en la sínfisis una línea más ortognata que en la de los individuos jóvenes. Otro punto se refiere a su rama ascendente que se curva hacia arriba y adelante ofreciendo un ángulo cada vez más recto.

DENTADURA

La dentadura de los pinnípedos ofrece con frecuencia anomalías que consisten en la persistencia o ausencia de alguno de sus órganos dentales ya sea en ambos lados o en uno solo, tanto en los maxilares como en la mandíbula.

En el ejemplar juvenil existen cinco alvéolos postcaninos tanto en los maxilares como en la mandíbula, pero en el adulto hay seis órganos postcaninos en el maxilar del lado izquierdo y tan sólo cuatro en el lado opuesto.

Una característica interesante de los alvéolos es, por ejemplo, su profundidad que sólo la adquieren en el curso de su desarrollo extrauterino y en la edad adulta. En el espécimen joven, los alvéolos correspondientes a los premolares de leche tienen apenas dos milímetros de profundidad y su fondo de tejido óseo descansa inmediatamente sobre la raiz de los dientes caninos. Esta exigua profundidad se manifiesta también en los alvéolos de los dientes permanentes lo que me hace suponer que los folículos dentales no se desarrollan en una zona profunda, como ocurre esto último con muchos grupos de carnívoros, sinó superficialmente, cerca del borde alveolar. Con esto quedaría también explicado la pérdida frecuente de los dientes de los animales jóvenes sobre todo durante el proceso de maceración.

Los alvéolos, empero, van adquiriendo mayor hondura con la edad, de tal modo que en los viejos pueden alcanzar su fondo hasta cuatro centímetros y estar orientados oblícuamente hacia atrás y arriba en los del maxilar, y hacia atrás y abajo en los de la mandíbula.

También es interesante la modificación que sufre el diente canino; pues en el joven está orientado casi horizontalmente y su raiz ocupa una gran parte de los huesos premaxilares y además que la corona tiene mayor curvatura con la edad.

MEDIDAS CRANEODENTALES DE *MIROUNYA LEONINA* (L)

	Ejemplar ♂ nº 506 Col. Rusconi Loc.: Península Valdez	Ejemplar ♂ nº 278 Col. Rusconi Loc.: Península Valdez	Ej. ♂ según Turner 1888, Vol. XXVI. Loc.: Head Island	Ej. ♂ según Scott Loc.: Head Island	Ej. ♂ según Flower Loc.: Islas Falkland	Ej. ♀ según Turner Loc.: Islas Kerguelen
Longitud cóndilo basal	219	520	486	493	564	300
Longitud total	220	560	508	497	597	296
Longitud de los nasales	29	58	55	65	—	43
Ancho máximo de la fosa nasal anterior	37	87	98	96	—	48
Longitud de la fosa nasal desde la punta nasal al extremo del maxilar	56	180	—	—	—	—
Ancho bicigomático máximo	162	365	354	350	384	222
Ancho máximo de ambas crestas occipitales laterales	128	232	203	201	242	171
Ancho máximo detrás del agujero auditivo externo	160	300	284	303	—	199
Ancho del rostro al nivel de los caninos	60	162	160	146	158	62
Ancho interorbitario	26	75	65	71	—	38
Ancho del paladar por el lado externo del último molar	71	151	—	—	—	—
Diámetro bicondilar máximo	71	115	—	—	—	—
Longitud del paladar	104	275	—	—	—	—
Altura del cráneo desde el basion al supraoccipital	92	195	167	160	—	112
Longitud dental	70	160	—	—	—	—
Espacio ocupado por los dientes postcaninos	46	76	—	—	—	—
Diámetro transverso del canino al nivel alveolar	12	37	36	—	—	12
Longitud mandibular	147	370	350	326	375	191
Longitud sinfisiana	50	120	—	—	—	—
Altura de la apófisis coronoidea	60	215	—	—	—	—
Altura do la rama al nivel del último diente	25	100	—	—	—	—
Ancho del cóndilo mandibular	29	102	—	—	—	—
Espacio ocupado por toda la dentadura	63	110	—	—	—	—

DIFERENCIAS CON « M. ANGUSTIROSTRIS »

De las diversas especies de elefantes de mar propuestas por los autores, *Mirounga angustirostris* (Gill) es una de las buenas especies de la zona circunmpolar del norte y las diferencias craneanas que se advierten comparadas con las del sur son, entre otras, las que siguen:

El volumen craneano no difiere mayormente en ambas especies, pero en cambio el espesor o altura del arco cigomático es mucho menor en *M. leonina*. El hueso jugal es relativamente grácil y se prolonga en forma de una apófisis alargada con dirección hacia atrás y abajo; mientras que en la especie del norte dicho hueso es muy robusto verticalmente y casi truncado hacia atrás.

Además, en esta última especie, la parte posterior del maxilar al nivel del último diente, tiene una forma angulosa y de distinta morfología. En *angustirostris*, una parte del frontal es más alto y menos ancho que en el mismo hueso de *M. leonina*.

También la mandíbula acusa algunas diferencias, una de las cuales aparece en el borde inferior; pues, en la de *M. leonina* describe una línea en semicírculo bastante acentuado; mientras que la de *angustirostris* muestra entre el ángulo mandibular y la sínfisis una línea cóncava relativamente pronunciada. Sobre esta especie del norte se han ocupado también numerosos autores siendo uno de los recientes el artículo publicado por Townsend en 1912 quién dió a conocer diversos detalles de su anatomía craneana.

BIBLIOGRAFIA

ALLEN, J. A., *History of North American Pinnipeds*, 1880.

FLOWER, W. H., *On the elefant seal « Macrorhinus leoninus (Linn.)*, en *Proc. Zool. Society*, pp. 145-162, London, 1881.

MARELLI, C. A., *Los vertebrados exhibidos en los zoológicos del Plata*, en *Memorias del Jardín Zoológico de La Plata*, vol. IV, La Plata, 1931.

MARELLI, C. A., *Bibliografía Eurística de los mamíferos de caza y caza marítima*, en *Memorias del Jardín Zoológico de La Plata*, La Plata, 1936.

RUSCONI, C., *Los mamíferos del Jardín Zoológico de Buenos Aires y reseña de su antepasados prehistóricos*, en *Consejo General de Educación*, pp. 1-15, Paraná, 1935.

SCOTT, *Transv. New. Zeal Institut*, vol. XV, 1883.

TURNER, H. N., *Challenger's Report*, 1888.

TARIFAS FERROVIARIAS DE UTILIDAD MÁXIMA

POR EL

ING. EMILIO REBUELTO

(*Continuación*)

IV. — TARIFAS DE PRECIO UNICO

Llamamos tarifas de precio único, o de tipo postal, o tranviario, a aquellas tarifas en las cuales el precio del transporte es fijo, único, igual para todas las distancias, tal como sucede con el franqueo postal que es el mismo para una carta, sea que su destinatario se encuentre alejado del punto de procedencia unos pocos centenares de metros o varios centenares de kilómetros. El precio del pasaje tranviario, también es el mismo para muy diversas longitudes de trayectos.

En las empresas ferroviarias no rigen aún comúnmente tarifas de este tipo, aunque los « abonos » vienen a serlo en cierto modo, pues su precio es el mismo cualquiera que sea el número de viajes y por lo tanto los kilómetros recorridos por el pasajero, en determinado intervalo de tiempo. Ciertas tarifas por zonas, cuando éstas son muy extensas, así como un gran número de tarifas especiales, sobre todo las establecidas por motivos de competencia, ofrecen también ejemplos en los que la tarifa es constante e independiente de la distancia recorrida por la carga.

Estudiemos el caso general, en que una empresa decidiera implantar una tarifa de esta clase, a lo largo de su línea. En este caso, siendo $y = c$, se iba a originar a ambos lados de la línea una zona de influencia de un ancho constante, igual a

$$\frac{v - c}{f}.$$

En cuanto al largo de esta zona rectangular, es evidente que no influyendo la distancia x, sería indefinido; o sea, que, en teoría,

la zona de influencia creada por la tarifa postal sería un rectángulo extendido hasta el punto extremo de la línea. Pero en la práctica, la tarifa c sería aplicable solamente hasta la distancia en que igualase a los gastos de transporte:

$$gx = c \qquad \therefore \qquad x = \frac{c}{g}$$

Esta será la distancia máxima de transporte.

La zona de influencia se compondrá, pues, de un rectángulo de largo $\frac{c}{g}$ y un ancho igual a $2\,\frac{(v-c)}{f}$; y además, de un semicírculo de radio $\frac{v-c}{f}$, que corresponderá a la zona desde la cual se podrán hacer transportes radiales hacia punta de rieles; en total, pues,

$$A = \frac{2\,(v-c)}{f}\,\frac{c}{g} + \frac{1}{2}\,\pi\left(\frac{v-c}{f}\right)^2$$

La producción total será $A\gamma$; y como la tarifa es c, los productos serán $A\,\gamma\,c$

$$P = A\,\gamma\,c = \frac{2\,\gamma\,(v-c)\,c^2}{fg} + \frac{\gamma\,\pi\,(v-c)^2\,c}{2\,f^2}$$

Para avaluar los gastos, en la parte rectangular habrá que multiplicar la producción correspondiente a un elemento dx de la línea ferroviaria, por el gasto gx que ocasiona su transporte a la distancia x; esta producción será la correspondiente al área del rectángulo elemental $\frac{2\,(v-c)}{f}\,dx$; escribiendo su expresión en toneladas e integrando desde cero hasta $\frac{c}{g}$, tendremos

$$\int_0^{\frac{c}{g}} \frac{2\,(v-c)}{f}\,\gamma\,gx\,dx = \frac{\gamma\,(v-c)\,c^2}{fg}$$

y agregando los gastos que origina el transporte de la producción del área semicircular, a la distancia $\frac{c}{g}$, que serán, por lo tanto, c, resultará finalmente

$$G = \frac{\gamma\,(v-c)\,c^2}{fg} + \frac{\gamma\,\pi\,(v-c)^2\,c}{2\,f^2}$$

Y la utilidad de la empresa, siendo la diferencia entre productos y gastos, importará para la distancia $\frac{c}{g}$,

$$U = P - G = \frac{\gamma (v - c) c^2}{fg}$$

En esta expresión, no aparece π, lo que demuestra que la carga procedente de la zona semicircular, no produce utilidad alguna; en efecto, se la transporta por un precio c a una distancia x, cuyos gastos son precisamente $gx = c$. Para los cálculos sobre la utilidad de la empresa, cuando se lleva la tarifa c hasta la distancia máxima $\frac{c}{g}$, puede, pues, prescindirse de la zona semicircular, pero no para el estudio aislado de los productos, gastos y coeficiente de explotación.

En realidad no debe en ningún caso prescindirse de cuanto facilite estos transportes desde punta de rieles, aunque se hagan al costo, pues ellos favorecen el desarrollo de la zona, e indirectamente, el tráfico de ella o hacia ella de otras cargas que, con otras tarifas, pueden ofrecer amplia compensación remunerativa.

Si buscamos ahora el valor de c que conduce al máximo de U, tendremos:

$$\frac{dU}{dc} = \frac{\gamma}{fg} [2vc - 3c^2]$$

$$\frac{d^2U}{dc^2} = \frac{2\gamma}{fg} [v - 3c]$$

El valor de c, distinto de cero, que anula a la derivada primera, es

$$c = \frac{2}{3} v$$

siendo fácil verificar que éste hace negativa a la derivada segunda; luego hemos encontrado el máximo, el cual será

$$U = \frac{\gamma}{fg}\left(v - \frac{2}{3} v\right)\frac{4v^2}{9} = \frac{4\gamma v^3}{27 fg}$$

$$= 0{,}148 \frac{\gamma v^3}{fg}$$

Recordemos que con las tarifas *parabólicas* no se llegaba más que a $0{,}133 \frac{\gamma v^3}{fg}$; luego, las del tipo postal, ofrecen cierta ventaja

sobre aquéllas, si bien no alcanzan a igualar a la utilidad suministrada por las *terminales* que ya vimos era de $0,166 \frac{\gamma v^3}{fg}$.

En cuanto a la distancia máxima hasta la que pueden ser aplicadas estas tarifas, resulta de

$$c = gx = \frac{2}{3} v \quad \therefore \quad x = \frac{2v}{3g} = 0,66 \frac{v}{g}$$

algo mayor de la correspondiente a las kilométricas, $0,5 \frac{v}{g}$, pero un poco menor de la conseguida con las terminales y parabólicas. Esto último no es un inconveniente en la práctica, pues generalmente, para mercaderías de alto valor de v, y en ferrocarriles en que g es bajo, la longitud resultante para x, es superior a la necesaria en la realidad, por no haber a esas distancias tierras en explotación o mercaderías que transportar, y muchas veces, ni llega el ferrocarril a tener sus líneas extendidas hasta semejantes distancias.

En 1935 (ver *Estadísticas de los Ferrocarriles en explotación*, publicada por la Dirección General de Ferrocarriles), el gasto directo por ton-Km útil en el Central Argentino fué de 1,89 \$ oro por 1.000 ton-Km, y el término medio de aprovechamiento de los vagones, de 2,27 ton. brutas para una ton. útil; de aquí se deduce que

$$g = 0,00189\ (2,27) = 0,00429$$

en \$ oro o 0,0097 \$ m/n por ton-Km útil, un centavo aproximadamente; entonces

$$x = \frac{2v}{3g} = \frac{2v}{0,03} = 67\, v$$

Bastaría que una carga tuviera un v igual o superior a los 14 \$ m/n — lo que es un caso frecuente, — para que x resultara igual o superior a los 1000 Km, distancia de los puertos o de los grandes mercados consumidores que podría ser alcanzada fácilmente con estas tarifas de tipo postal; en el caso de

$$v = 14 \quad , \quad c = \frac{2}{3} v = 9,33 \text{ \$ m/n.}$$

Los valores de P y G, una vez fijado c, resultan, respectivamente

$$P = \left(\frac{2}{g} + \frac{\pi}{6f}\right)\frac{\gamma c^3}{3f}$$

$$G = \left(\frac{1}{g} + \frac{\pi}{6f}\right)\frac{\gamma c^3}{3f}$$

y entonces el coeficiente de explotación que resulta para toda la línea es

$$E = \frac{G}{P} = \frac{\frac{1}{g} + \frac{\pi}{6f}}{\frac{2}{g} + \frac{\pi}{6f}} = \frac{6f + \pi g}{12f + \pi g}$$

$$= \frac{1 + \frac{\pi g}{6f}}{2 + \frac{\pi g}{6f}}$$

o sea, aproximadamente, 0,5, pues el término $\frac{\pi g}{6f}$ es pequeño, alrededor de 0,1.

Si se prescinde del efecto de la zona semicircular, el valor de E es exactamente 0,50.

Esta es una característica de las tarifas de tipo postal, lo que era presumible, pues se trata de tarifas caras en los primeros kilómetros, donde se debe evidenciar más aún el descenso de E, debido a que los productos crecen linealmente con la distancia, y los gastos con el cuadrado de la distancia. En efecto: El valor de los productos, a la distancia x, es

$$P = 2\gamma \frac{(v - c)}{f} cx + \frac{\gamma}{2}\pi \left(\frac{v - c}{f}\right)^2 c$$

y el de los gastos

$$G = 2\gamma \frac{(v - c)}{f} \int_0^x gx\, dx + \frac{\gamma\pi}{2}\left(\frac{v - c}{f}\right)^2 gx$$

Una vez determinado el valor de $c = \frac{2}{3} v$ que produce la utilidad máxima, estas expresiones se convierten en

$$P = \frac{4\gamma v^2 x}{9f} + \frac{\gamma \pi v^3}{27 f^2}$$

$$G = \frac{\gamma g v x^2}{3f} + \frac{\gamma \pi v^2 g x}{18 f^2}$$

No debe extrañar que para $x = 0$, resulte un valor para los productos, lo que equivocadamente podría interpretarse como conduciendo al absurdo de que, no habiendo línea férrea, puesto que $x = 0$, existen, sin embargo, productos. Lo que sucede es que al suponer anulada la longitud del ferrocarril, no se anula el área de la zona semicircular con que termina la zona total del ferrocarril. Los productores de la zona pagan c $ m/n por el transporte de sus cargas cualquiera que sea la distancia x; y si los productores de la zona semicircular que queda cuando x es nula, efectuaran ese pago, tendríamos efectivamente, los productos que indica la fórmula para $x = 0$. En conclusión, así como el valor de x está limitado superiormente por $\frac{2\,v}{3\,g}$, lo está inferiormente por 0, y deberá ser siempre

$$0 < x < \frac{2\,v}{3\,g}$$

Si dejamos de lado el término correspondiente al área semicircular, el coeficiente de explotación se reduce a

$$E = \frac{G}{P} = \frac{3\,gx}{4\,v}$$

valor creciente con x, y que podrá bajar hasta límites extremos cuando v sea algo grande, y x reducido. El mayor valor de E se alcanzará para la distancia máxima x,

$$E = \frac{3\,g}{4\,v} \cdot \frac{2\,v}{3\,g} = 0{,}5$$

comprobándose así un resultado anterior.

Tomando en cuenta la zona semicircular, se tiene

$$E = \frac{\dfrac{\gamma\, g\, v\, x^2}{3\,f} + \dfrac{\gamma\, \pi\, g\, v^2\, x}{18\,f^2}}{\dfrac{4\,\gamma\, v^2\, x}{9\,f} + \dfrac{\gamma\, \pi\, v^3}{27\,f^2}}$$

$$= \frac{(6\,fx + \pi\, v)\; 3\,gx}{(12\,fx + \pi\, v)\; 2\,v}$$

valor que es sorprendentemente pequeño cuando x no se acerca a la distancia máxima.

Por ejemplo, cuando $x = \frac{v}{3g}$, el término $\frac{3gx}{2v}$ resulta 0,5; y entonces

$$E = 0{,}5 \frac{6fx + \pi v}{12fx + \pi v}$$

$$= 0{,}5 \frac{\frac{2fv}{g} + \pi v}{\frac{4fv}{g} + \pi v} = 0{,}5 \frac{2f + \pi g}{4f + \pi g}$$

$$= 0{,}5 \frac{1 + \frac{\pi g}{2f}}{2 + \frac{\pi g}{2f}}$$

y como $\frac{\pi g}{2f}$ es en general menor que 0,3, el valor de E se aproxima a

$$E = 0{,}5 \frac{1{,}3}{2{,}3} = 0{,}5\,(0{,}56) = 0{,}28$$

Las tarifas postales son, pues, un ejemplo evidente de que un coeficiente de explotación bajo, no va acompañado de grandes utilidades, y que lo importante para la buena marcha de una empresa no es obtener muchos productos, ni tampoco incurrir en pocos gastos, sino en que unos y otros guarden entre sí la debida proporción para que la utilidad sea máxima. Más adelante, al comparar las utilidades conseguidas a una misma distancia con diferentes tarifas, volveremos sobre este punto.

Los resultados anteriores suponen que toda la zona de producción posible estuviera en actividad; pero en la práctica pueden presentarse circunstancias muy distintas. Supongamos que la zona *terminase bruscamente* a una distancia x_1; dejemos de lado por el momento la zona semicircular. La utilidad proporcionada por la parte rectangular, será

$$U = 2\gamma \frac{(v - c)}{f} \int_0^{x_1} (c - gx)\, dx = \gamma \frac{(v - c)}{f} (2\,cx_1 - gx_1^2)$$

Considerando esta expresión como una función de c, derivando respecto a c, igualando a cero, y despejando el valor de c, resulta

$$c = \frac{2v + gx_1}{4}$$

valor que hace negativa la derivada segunda; luego corresponde a un máximo de la utilidad de la empresa, la cual será

$$U = \frac{\gamma}{f}\left(v - \frac{2v + gx_1}{4}\right)\left(vx_1 + \frac{gx_1^2}{2} - gx_1^2\right)$$

$$= \frac{\gamma}{8f}(2v - gx_1)^2 x_1$$

Es claro que para $x_1 = \frac{2v}{3g}$, se obtiene el valor anterior de U,

$$U = \frac{4\gamma v^3}{27 fg}$$

Al tener en cuenta el área semicircular con que termina la zona, el cálculo se complica un poco, pero es necesario tomarla en consideración, pues produce cierta utilidad, desde que la tarifa a la distancia x_1, es mayor que los gastos cuando x_1 es menor que la máxima $\frac{2v}{3g}$. La expresión de la utilidad en función de c, es

$$U = \frac{\gamma(v - c)}{f}(2cx_1 - gx_1^2) + \gamma\frac{\pi}{2}\left(\frac{v - c}{f}\right)^2(c - gx_1)$$

Igualando a cero la derivada con respecto a c, después de algunas simplificaciones, resulta la siguiente ecuación de segundo grado:

$$\frac{3}{2}\pi c^2 - [4fx_1 + \pi g x_1 + 2\pi v]c +$$

$$+ fgx_1^2 + (2f + \pi g)vx_1 + \frac{\pi}{2}v^2 = 0$$

Resolviéndola, se elige aquella de sus dos raíces que hace negativa a la segunda derivada; esta última es:

$$3\pi c - (4f + \pi g)x_1 - 2\pi v$$

para lo cual deberá ser

$$c < \frac{(4f + \pi g)x_1 + 2\pi v}{3\pi}$$

$$\therefore \qquad c < \frac{2v + gx_1}{3} + \frac{4f}{3\pi}$$

El siguiente ejemplo aclara el procedimiento del cálculo.

Sea un ferrocarril, en el cual el gasto directo por ton-Km útil es $g = 0{,}03$ \$ m/n; en una zona de malos caminos donde $f = 0{,}12$ \$ m/n. Se supone que se trata del transporte de una mercadería para la cual $v = 10$ \$ m/n, y $\gamma = 100$ ton.

El ferrocarril empieza a construirse, y ha librado al servivio una primera sección de 100 Km. Este sería el valor de x_1. La zona de afluencia termina bruscamente a los 100 kilómetros, tal como lo supone el caso teórico.

Si no tenemos en cuenta el área de la zona semicircular, la tarifa postal de utilidad máxima será

$$c = \frac{2\,v + gx_1}{4} = \frac{20 + 0{,}03\,(100)}{4} = \frac{23}{4} = 5{,}75 \text{ \$ m/n}$$

y la utilidad conseguida por la empresa resulta

$$U = \frac{\gamma}{8f}\,(2\,v - gx_1)^2\,x_1 = \frac{100}{8\,(0{,}12)}\,[20 - 0{,}03\,(100)]^2\,100 =$$

$$= \frac{10\,000}{0{,}96}\,17^2 = 3.010.415 \text{ \$ m/n.}$$

Cuando el ferrocarril libre al servicio público otra sección de vía, por ejemplo, 50 Km más, deberá subir la tarifa a

$$c = \frac{20 + 0{,}03\,(150)}{4} = 6{,}12 \text{ \$ m/n,}$$

y así sucesivamente, pero teniendo cuidado de no pasar de la distancia máxima de aplicación,

$$x = \frac{2\,v}{3\,g} = \frac{20}{0{,}09} = 222 \text{ Km}$$

para la cual la tarifa alcanzará al valor máximo de

$$c = \frac{2}{3}\,v = \frac{2}{3}\,10 = 6{,}60 \text{ \$ m/n}$$

Comprobemos que en los 100 primeros kilómetros, con la tarifa postal de 5,75 \$ moneda nacional, la empresa obtendría mayores utilidades que con tarifas de 5,60 y 5,90 \$ m/n.

Resultados con las tarifas de:

	5,60	5,75	5,90
Ancho de la zona a cada lado de la vía, en kilómetros	36,6	35,4	34,1
Area de la zona rectangular en Km²	7320	7080	6820
Producción total en ton.	732.000	708.000	682.000
Productos cobrados en \$ m/n.	4.098.200	4.071.000	4.023.800
Gastos del transporte	1.098.000	1.060.585	1.023.000
Utilidad	3.000.200	3.010.415	3.000.800

La mayor utilidad que proporciona la tarifa de 5,75 es de 10.000 \$ m/n, sobre las otras dos, sean éstas mayores o menores. El coeficiente de explotación es para todas aproximadamente igual a 0,25, valor muy bajo, pero explicable por tratarse de un recorrido corto (100 Km).

Tomando ahora en cuenta la zona semicircular, tendremos que verificar los siguientes cálculos preparatorios:

$$\frac{3}{2}\pi = \frac{3}{2}(3{,}14) \quad = 4{,}71 \qquad 4{,}71$$

$$4fx_1 = 4\,(0{,}12)\,100 = 48$$
$$\pi g x_1 = 3{,}14\,(0{,}03)\,100 = 9{,}42$$
$$2\pi v = 2\,(3{,}14)\,10 = 62{,}80 \qquad 120{,}22$$

$$fgx_1^2 = 0{,}12\,(0{,}03)\,10\,000 = 36$$
$$2fvx_1 = 2\,(0{,}12)\,(10)\,(100) = 240$$
$$\pi g v x_1 = 3{,}14\,(0{,}03)\,(10)\,(100) = 94{,}20$$
$$\frac{\pi}{2}v^2 = 3{,}14\left(\frac{1}{2}\right)100 = 157 \qquad 527{,}20$$

La ecuación de segundo grado a resolver, será

$$4{,}71\,c^2 - 120{,}22\,c + 527{,}20 = 0$$

o aproximadamente

$$4{,}7\,c^2 - 120\,c + 527 = 0$$

$$c = \frac{60 \pm \sqrt{60^2 - (4{,}7)\,(527)}}{4{,}7} = \frac{60 \pm \sqrt{1124}}{4{,}7}$$

La raíz correspondiente al signo negativo es la única que conviene al problema, y su valor es $c = 5{,}64$ \$ m/n. Verifica también las condiciones del máximo, porque

$$\frac{2v + gx_1}{3} + \frac{4f}{3\pi} = \frac{20+3}{3} + \frac{0{,}48}{9{,}42} = 7{,}66 + 0{,}05 = 7{,}71$$

que es, efectivamente, mayor que c.

El cálculo de la utilidad, de acuerdo a la fórmula deducida antes, es:

De la zona rectaugular:

$$U = \frac{\gamma\,(v-c)}{f}\,(2\,cx_1 - gx_1^2) =$$

$$= 100\,\frac{(10-5{,}64)}{0{,}12}\,(1128 - 300) = 3.008.400 \text{ \$ m/n}$$

De la zona semicircular:

$$u = \frac{\gamma\,\pi}{2}\left(\frac{v-c}{f}\right)^2 (c - gx_1) =$$

$$= \frac{314}{2}\left(\frac{4{,}36}{0{,}12}\right)^2 (5{,}64 - 3) = \qquad 547.159 \text{ \$ m/n}$$

Utilidad total 3.555.559 \$ m/n

que supera en más de 500.000 $ m/n el resultado obtenido con la tarifa de 5,75 $ m/n, y sin tener en cuenta la ganancia dejada por la carga proveniente de la zona semicircular.

Puede hacerse el cálculo de c sin pasar por la resolución de la ecuación de segundo grado; para eso se adoptan diferentes valores de c, calculando separadamente las utilidades provenientes de las dos zonas, sumándolas, y buscando así por tanteos el valor de c que produce el máximo valor de esta suma.

Si llamamos C el capital invertido por Km. de vía, Cx será el correspondiente a los x kilómetros de vía. Relacionando la utilidad al capital, tendríamos el *interés* i del negocio ferroviario:

$$i = \frac{U}{Cx} = \frac{\gamma (v - c)}{Cf} (2c - gx) + \frac{\gamma \pi}{2C} \left(\frac{v - c}{f} \right)^2 \left(\frac{c}{x} - g \right)$$

En rigor, esto supone que en la línea no hay más transportes que los de las cargas cuya tarifa es c, o sea, que todas las cargas se transportan a igual tarifa. Admitamos por un momento que se verificase efectivamente ese caso extremo. La fórmula nos demuestra que el interés i disminuye con x, pues x figura con signo negativo en un término y en el denominador de otro. La conclusión es, que cuanto más se prolongue la línea, más disminuye el interés del capital invertido en ella.

Si se consideran diferentes mercaderías, a diferentes tarifas c_1, c_2, $c_3 \ldots$ producirán las respectivas utilidades u_1, u_2, $u_3 \ldots$ y el interés será

$$i = \frac{u_1 + u_2 + u_3 + \ldots}{Cx}$$

En la nueva suma, aparecerán varios términos en x, con signo negativo, y otros varios términos con la x en el denominador: o sea, el interés i disminuirá con x, tal como ya se evidenciaba en el caso de una sola tarifa.

Otro caso distinto que puede presentarse en la práctica, es aquel en que la zona de afluencia *principia* a la distancia x_1. Puede suceder, por ejemplo, que los primeros 50 o 100 Km. deban ser abandonados a la competencia de los camiones, o de otras empresas de transporte que converjan hacia el mismo mercado; o que se trate de cargas agrícolas, forestales o mineras, que sólo se producen a partir de

determinada distancia, etc. La fórmula fundamental que nos da la utilidad, sería en este caso

$$U = 2\gamma \frac{(v - c)}{f} \int_{x_1}^{\frac{c}{g}} (c - gx)\, dx =$$

$$= \gamma \frac{(v - c)}{fg} [c^2 - 2\, cgx_1 + g^2\, x_1^2] =$$

$$= \gamma \frac{(v - c)}{fg} (c - gx_1)^2$$

De aquí sale, sucesivamente

$$\frac{dU}{dc} = \frac{\gamma\, (c - gx_1)}{fg} [-(c - gx_1) + 2\,(v - c)] = 0$$

$$\therefore \qquad c = \frac{2\, v + gx_1}{3}$$

Este será el valor de la tarifa de utilidad máxima, pues anula a la derivada primera, y sustituído en la segunda, le da un valor negativo. La utilidad será entonces

$$U = \frac{\gamma}{fg} \left(v - \frac{2\, v + gx_1}{3} \right) \left(\frac{2\, v + gx_1}{3} - gx_1 \right)^2$$

$$= \frac{4\,\gamma}{27\, fg} (v - gx_1)^3$$

Estos resultados se pueden combinar con los anteriores, suponiendo la zona dividida en varias secciones: una de 0 a x_1, en la cual la tarifa y la utilidad serán, según ya vimos

$$c = \frac{2\, v + gx_1}{4} \quad ; \quad U = \frac{\gamma}{8\, f} (2\, v - gx_1)^2\, x_1$$

y otra de x_1 en adelante:

$$c = \frac{2\, v + gx_1}{3} \quad ; \quad U = \frac{4\,\gamma}{27\, fg} (v - gx_1)^3$$

La utilidad resultante será la suma de estas dos, y se puede entonces plantear el problema de determinar a x_1 de modo que sea máxima la utilidad conseguida con estas dos tarifas postales escalonadas. También se pueden suponer nuevos puntos de división, x_1, x_2, $x_3 \dots$, y determinar las tarifas más convenientes dentro de cada tramo, y para la suma de todos los tramos.

Otro grupo interesante de problemas es el que resulta de considerar *ya existente* una zona de producción, de dimensión, ubicación y forma independiente de la tarifa; entonces la determinación de ésta se plantea en forma distinta a la utilizada en las páginas anteriores; hasta puede suceder que el ancho de la zona *aumente* en vez de disminuir con la distancia, y por lo tanto con la tarifa, como hemos supuesto precedentemente. Hay que buscar entonces si conviene aprovechar toda la zona, o sólo ciertas partes de ella, y cuáles, y a qué tarifa, para obtener la utilidad máxima. El planteo inicial sería escribir

$$U = 2\gamma \int_{x_1}^{x_2} z\,(c - gx)\,dx$$

siendo z una función de x, que caracterizase los límites extremos de la zona; y x_1 x_2 los valores de x que limitan el intervalo dentro del cual z conserva la misma forma. En el caso general, en vez de una, habría que hacer varias integraciones.

Pero como no nos proponemos aquí agotar todos los problemas a que dan origen las tarifas de tipo postal, asunto al cual pensamos dedicar un estudio aparte, nos limitamos a la enunciación de estas cuestiones.

(Continuará)

BIBLIOGRAFÍA (*)

POR C. C. D.

DURRIEU (MAURICIO). *Tratado de los Presupuestos de Obras de Ingeniería y Arquitectura.* (Tomos I a IV) 812 páginas 18 x 27. Buenos Aires, Tomás Palumbo, 1935-7.

Nuestro distinguido consocio publicó, no hace mucho, en los Anales de la Sociedad Científica Argentina, un trabajo titulado "Cotejos económicos y selección económica" (1), el cual había sido anteriormente materia de una comunicación a la Academia Nacional de Ciencias. Este nuevo trabajo que nos ocupa, mucho más extenso, encierra el mismo concepto de aquélla, si bien referido al solo campo de la construcción. El concepto de este nuevo estudio no queda sin embargo aun bien explicado en los cuatro fascículos aparecidos, que tan solamente contienen dos capítulos de los seis que constituirán, una vez terminados, la obra completa. Algo más de las tres cuartas partes de las 800 páginas publicadas, corresponden al capítulo segundo y suministran la documentación más general necesaria, en la práctica de la construcción, para formular buenas análisis de precios y costos. Esa documentación se encuentra casi toda expresada en forma de tablas, pues el autor ha utilizado la exposición corrida sólo cuando la tabular resultaba inconveniente o desperdiciaba espacio.

El profesor Durrieu ha utilizado datos observados en el país por él mismo o por algunos de sus discípulos. Los datos que traen esas tablas son, en gran parte, nuevos o inéditos, cuando no totalmente nuevos.

Lo primero ocurre en las tablas relativas a Yesería, Pinturería y trabajos de hincadura; lo segundo en las de Carpintería de Taller, Obras Sanitarias e Instalaciones Eléctricas.

Esas tablas, cuya utilidad se verá probablemente más cuando el autor publique la continuación de su trabajo, solo encaran el campo de los trabajos generales sin abordar los particulares correspondientes a ramas o especialidades de las profesiones del ingeniero y del arquitecto.

Se trata, como se ve, de un estudio que exige una labor enorme y que, de llevarla enteramente a cabo, exigiría el concurso de varios colaboradores; el ingeniero Durrieu, por su parte, ha procurado precisar datos de interés general. Muy versado el autor sobre materiales de construcción, ha procurado asentar las informaciones más aceptables relativas a los materiales nacionales; seguramente esos datos serán ampliados en algún otro capítulo que continúe el trabajo publicado hasta este momento. Al parecer el plan completo de dicho trabajo requerirá 1200 páginas impresas, y puede afirmarse que es el más amplio y moderno que cabe concebir ya que, por un lado, la materia económica ha sido siempre bastante descuidada por los ingenieros; y apenas si se nota, en la actualidad,

(*) De la *S. C. A.*

(1) Publicado luego en libro aparte, 125 págs. (17 × 26 ½). Palumbo, 1937.

una señalada reacción en ese sentido. Un gran paso fué dado cuando se procedió a la organización de los costos, punto fundamental que el ing. Durrieu se ocupa con extensión en el capítulo 1º estableciendo cuadros reasuntivos originales. Es evidentemente ilusorio calcular sin una precisa calificación de las cantidades con que se opera.

Clasificados los costos, vuélvese posible agruparlos en las expresiones esenciales de la formación de otros costos más complejos, y en atención a su naturaleza y a las condiciones de su obtensión y aplicación, constituyen sistemas definidos de estimación.

La selección de estos sistemos con el objeto de utilizarlos en la práctica, es una nueva exigencia técnica que se resuelve encarando diversas modalidades de la economía de la construcción. La magnitud de las obras, su ubicación, su extensión, difusión o agrupación; los medios de ejecución (el material a ese efecto destinado, su abundancia o su escasez, la facilidad o no de obtenerlos, su propiedad (mayor o menor); el plan de realización, el sistema de ejecución (por contrato, etc.); la premura; y tantos otros asuntos son factores que concurren más o menos intrínsecamente a decidir esa economía y que han de her considerados al presuponer.

Sin duda, tantos y tan intrincados elementos hacen que aun con mucha versación y experiencia, resulte difícil adquirir seguridad y acierto; pero parece más peligroso desconocerlos o desatenderlos. Cree, por eso, el Ing. Durrieu, en la conveniencia de enseñar, en ingeniería económica, el imperio del método científico en los procedimientos ya que solo con él pueden estimarse aquellos elementos en forma adecuada. Tal estimación es una función del tiempo disponible para efectuarla, de la precisión de los proyectos y de la forma de realización. Ni los datos tabulares de materiales y tiempos de ejecución, ni las fórmulas corrientes, bastan para satisfacerla; se necesita también el conocimiento teórico-práctico del director de las obras; este conocimiento constituye un elemento más, tan indispensable como los otros, pues sirve de guía para el técnico a los efectos de anticipar costos correspondientes a los planes y a los medios de construir que determina. También se necesitan elementos de comprobación; ellos se obtienen principalmente mediante las verificaciones de los trabajos ejecutados.

El autor piensa dedicar a dichos elementos el capítulo 6º de su libro, y en general manifiesta que lo restante de su trabajo consistirá en una amplia exposición del concepto y de los procedimientos relativos a todos estos últimos puntos mencionados. Se ve que el ingeniero Durrieu abarca la materia con criterio integral. Su actuación en la enseñanza superior ha respondido por lo demás a ese pensamiento de inculcar al ingeniero y al arquitecto, un criterio teórico-práctico completo. Según su propia expresión, "hay que tratar de hacer de él una breva que madure temprano y no un simple higo". Los estudios económicos de esos profesionales deben, lo mismo que sus demás estudios, ser, a su juicio, profundos: nada de superficial ni de rudimentario.

Se trata, en suma, de un trabajo importante del ingeniero Durrieu que como otros de él, honra la ciencia en las ramas económicas de la ingeniería y de la arquitectura.

C. C. D.

SOCIOS ACTIVOS

Abrines, Héctor Aníbal
Aguilar, Félix
Albizzati, Carlos M.
Alessi, Juan M.
Alvarez, Raúl J.
Alvarez de Toledo, Belisario
Allende Lezama, Luciano P.
Anastasi, Camilo
Anchorena, Juan E.
André, Enrique de
Andrioletti, Juan Luis
Añón Suárez, Vicente
Aparicio, Francisco de
Aráoz Alfaro, Gregorio
Arce, Manuel J.
Armani, Aquiles
Arnaudo, Silvio J.
Avila Méndez, Delfín
Bado, Atilio A.
Bachmann, Ernesto
Baglietto, Eduardo E.
Balbiani, Atilio
Ballani, Luis M.
Bancalari, Agustín
Bandoni, Alfredo J.
Barabino Amadeo, S.
Bargna, Juan L.
Bariiari, Mariano J.
Barral Souto, José
Barrancos, Leónidas A.
Becke, Alejandro von der
Berrino, Juan B.
Bertino, José Carlos
Besio Moreno, Nicolás
Bianchi Lischetti, A.
Biggeri, Carlos
Blaquier, Juan
Boaglio, Santiago
Bolognini, Héctor
Bonanni, Cayetano A.
Bontempi, Luis
Bordas, Alejandro F.
Bordenave, Pablo E.
Borzacov, Vladimir
Borruat, Luis A.
Borzi, Ana María
Bosch, Gonzalo
Bosisio, Anecto J.
Bottaro, Juan C.
Bozzini, Luis (h.)
Briano, Juan A.
Bulch, Raúl
Bunge, Juan C.
Buontempo, Guillermo
Burkart, Arturo
Busso, Eduardo B.
Butty, Enrique
Buzzo, Alfredo
Caillet Bois, Teodoro
Calandra, Raúl E.
Canale, Humberto
Canal Feijoo, Bernardo
Capelli, Pedro F.
Carabelli, Juan José
Carbia, Rómulo D.
Carbone, Esteban
Carbonell, José J.
Cárcova, Enrique de la
Carelli, Antonio
Carelli, Humberto H.
Caride Massini, Pedro
Carman, Ernesto
Carrea, Juan Ubaldo
Casacuberta, Antonio
Castellanos, Alberto
Castello, Manuel F.
Castiñeiras, Julio R.
Ceppi, Héctor
Cernuschi, Félix
Clos, Enrique C.
Cock, Guillermo E.
Coni Bazán, F. A.
Curti, Orlando P.
Curutchet, Luis
Chanourdie, Enrique
Chizzini Melo, Aníbal F.
D'Ascoli, Lucio
Dassen, Claro C.
Dasso, Héctor
Dasso, Ricardo L.
De Cesare, Elías A.
De Fina, Armando L.
De la Iml, Juan E.
Delleplane, Luis J.
Dennier, Jorge
Deulofeu, Venancio
Díaz, Emilio C.
Dieulefait, Carlos E.
Doello-Jurado, Martín
Dobranich, Jorge W.
Domínguez, Juan A.
Dubecq, Raúl E.
Dueñas, José
Duhau, Luis
Dupont, Enrique
Durañona y Vedia, A.
Durrieu, Mauricio
Escudero, Antonio
Escudero, Pedro
Faré, Santo S.
Fernández, Alberto J.
Fernández Díaz, A.
Fernández Long, S.
Figini, Angel
Figuerero, Hernando W.
Fischer, Gustavo Juan
Flores, Emilio M.
Floriani, Luis
Florit Carlos J.
Fossa Mancini, E.
Franceschi, Alfredo
Fürnkorn, Divico A.
Gadda, Carlos Manuel
Galmarini, Alfredo G.
Gando, Alfredo R.
Gandolfi Herrero, Augusto
Gandolfo, José S.
Gascón, Alberto
Gaspar, Fernando L.
Géneau, Carlos E.
Gerardi, Donato
Ghigliazza, Sebastián
Giagnoni, Bartolomé E.
Giannone, José
Gradín, Carlos
Grieben, Arturo
Gutiérrez, Ricardo J.
Haussler, Emilio
Herbin, Luis A.
Hermitte, Enrique
Herrera Vegas, M.
Herzer, Bernardo
Hickethier, Carlos F.
Hofmann, Herbert
Houssay, Bernardo A.
Hoyo, Arturo
Igartúa, Luis María
Irigoyen, Luis H.
Isetta, José
Ivanissevich, Ludovico
Jorge, José M.
Jakob, Cristofredo
Kervar, Juan B.
King, Diarmid O.
Kinkelin Pelletán, J. C. de
Knoche, Walter
Kraglievich, Nicolás T.
Krapf, Eduardo
Labarthe, Julio
Lagunas, Simón
La Menza, Francisco
Laporte, Luis B.
Larco, Esteban
Lasso, Alfredo L.
Latzina, Eduardo
Ligniéres, Roberto
Lizer y Trelles, C. A.
Lombardi, Alberto
Loudet, Osvaldo
Loyarte, Ramón G.
Lugones, Arturo M.
Llauró, José
Mac Donagh, E. J.
Magnin, Félix J.
Magnin, Jorge
Mainini, Carlos
Malloi, Emilio
Mamberto, Benito
Marcó del Pont, E.
Marchionatto, Juan B.
Martignone, Eduardo
Marotta, F. Pedro
Marotta, R. Armando
Mata, Leopoldo
Méndez, Julio
Meoli, Gabriel
Meoli, Humberto
Mercau, Agustín
Meriggi, Juan C.
Mermoz, Francisco A.
Molfino, José F.
Molina Carranza, L.
Molle, Clotilde C.
Montes, Vicente E.
Moragues Bernat, Jaime
Moreno, Evaristo V.
Nágera, Juan José
Natale, Alfredo
Natale, Ernesto
Negrete, Lucia
Negri, Mario L.
Nielsen, Juan
Novelli, Armando
Oglobiin, Alejandro
Oliveri, Alfredo B.
Ortega Belgrano, Raúl
Ortiz, Aníbal A.
Ortiz de Rosas, Jorge
Otamendi, Gustavo
Ottonello, Héctor
Páez, José María
Page, Franklin Nelson
Paltoví y Oliveras, A.
Parodi, Edmundo
Parodi, Lorenzo R.
Parodi, Rodolfo
Pasman, Rodolfo E.
Pastore, Franco
Paz Anchorena, José M.
Pérez Hernández, A.
Perrone, Cayetano
Pestalardo, Agustín
Pini, Aldo S.
Platz, Hubert
Podestá, Juan Carlos
Posadas, Carlos
Quinos, José Luis
Quinterno, Bruno F.
Quiroga, Pedro R.
Raimondi, Alejandro
Raffo, Bartolomé M.
Ramaccioni, Danilo
Ramallo, Carlos M.
Ratto, Héctor R.
Rebuelto, Antonio
Rebuelto, Emilio
Recce, William Asher
Repetto, Blas Angel
Repossini, José
Ringuelet, Emilio J.
Rissotto, Atilio A.
Robles, Angel A.
Rodriguez Aravena, S.

Rodríguez, Germinal
Rodríguez, Miguel
Roffo, Angel H.
Roffo, Juan
Roldán, Raimundo
Romero Brest, Enrique
Rokotnitz, Otto
Rospide, Juan
Rossell Soler, Pedro
Ruata, Luis E.
Ruíz Moreno, Isidoro
Ruiz Moreno, Adrián
Rumi, Tomás J.
Sabaria, Enrique
Salomón, Hugo
Sánchez, José Ricardo
Sánchez, Gregorio L.
Sánchez Díaz, Abel
Sánchez Sorondo, M. G.
Sanromán, Iberio
Santángelo, Rodolfo
Sarhy, Juan F.
Sarrabayrouse, Eugenio
Savon, Marcos A.
Schnack, Benno J.
Schulz, Guillermo
Selva, Domingo
Selzer, Samuel
Sesma,, Angel
Sheahan, Juan F.
Silva, Leónidas L.
Simonoff, Miguel
Simons, Hellmut
Siri, Luis
Sobral, Arturo
Solari, Emilio F.
Solari, Miguel A.
Sordelli, Alfredo
Soler, Frank L.
Spinetto, David J.
Spota, Víctor J.
Storni, Segundo R.
Taiana, Alberto F.
Taiana, Jorge
Tarragona, José
Tello, Eugenio
Torre Bertucci, Pedro
Torello, Pablo
Tossini, Luis
Trelles, Rogelio A.
Trucco, Sixto E.
Valeiras, Antonio
Valentini, Argentino
Valentinuzzi, Máximo
Vallebella, Colón B.
Vanossi, Reinaldo
Varela Gil, José
Vecchi, Arístides de
Vela Huergo, Julio
Verdaguer, Juan
Veyga, Francisco de
Vidal, Eduardo
Vignati, Milcíades A.
Villalobos D., C.
Vignaux, Juan C.
Vinardell, Alberto
Volpatti, Eduardo
Wainer, Jacobo
Wauters, Carlos
Wernicke, Raúl
White, Guillermo J.
Williams, Adolfo T.
Zamboni, Agustín
Zappi, Enrique V.
Zavalla, Carlos M.
Zuloaga, Angel M.

SOCIOS ADHERENTES

Bazzanella, José
Cotlar, Mischa
Devoto, Carlos Alberto
Ferramola, Raúl
Folcini, Martín L. G.
García, Eduardo D.
Goyena, Ricardo J.
Gorchs, Agustín C.
Laclau, Juan Pedro
Magne de la Croix, P. A.
Mailhos, Luis E.
Milesi, Emilio Angel
Quevedo Capdevila, Eduardo A.
Recoder, Roberto F.
Repetto, Cayetano
Rusconi, Carlos
Sadosky, Manuel
Somonte, Eduardo
Vistalli, Alina M.
Wechsler, Wolf

CASAS ADHERENTES

Angel Estrada y Cía.
Benvenuto y Cía.
Lutz, Ferrando y Cía.
Hijos de Atilio Massone
Otto Hess, S. A.
T. Gr. "Tomás Palumbo"
Jacobo Peuser, S. A. Ltda.

SOCIO VITALICIO

Huergo, Eduardo María

MIEMBROS PROTECTORES DE LA ORGANIZACION DIDACTICA DE BUENOS AIRES

Anchorena, Juan E.
Besio Moreno, Nicolás
Tornquist, E. y Cía. (Lda.)

SECCION CORDOBA

COMISION DIRECTIVA

Presidente, Dr. Juan Olsacher; Vice-presidente, Dr. Miguel Fernández; Vice-presidente, Ing. Daniel A. García; Secretario de actas, Dr. Guillermo V. Stuckert; Secretario de correspondencia, Prof. Tulio Mácola; Tesorero, Sr. Bernardo Pilotto; Pro-tesorero, Dr. Carlos C. Hosseus; Vocales: Ing. Clodoveo Pascualini; Ing. Jorge E. Bobone; Ing. Luis Chechi; Ing. Ambrosio L. Taravella; Dr. Federico Padula; Dr. José Carlomagno; Dr. Meade L. Zimmer; Sr. Enrique Sparn.

SOCIOS ACTIVOS

Aguiar, Henoch D.
Bobone, Jorge E.
Brandan, Ramón A.
Broglia, Alberto A.
Buteler, Jesús E.
Camilloni, Carlos
Carlomagno, José
Chaudet, Enrique
Checchi, Luis
Deheza, Eduardo
Esteban, Fernando
Fernández, Miguel
Fontana, Lorenzo F.
García, Daniel
Godoy, Salvador A.
Gordillo, Pedro N.
Hosseus, Carlos Curt
Larrauri, Agustín C.
Mácola, Berardo A.
Mácola, Tulio
Mirizzi, Pablo Luis
Ninci, Raúl T.
Olaf Lützow, Holm
Olsacher, Juan
Padula, Federico
Pasqualini, Clodoveo
Peláez J. Gambastiani de

Pilotto, Bernardo
Ponce Laforgue, Carlos
Rothlin, Edwin
Schmiedecke, Augusto
Sparn, Enrique
Stuckert, Guillermo V.
Taravella, Ambrosio L.
Trebino, Natalio
Urciolo, Victorio
Vercello, Carlos
Yadarola, Mauricio L.
Zimmer, Mesde L.

SECCION SANTA FE

COMISION DIRECTIVA

Presidente, Dr. Gustavo A. Fester; Vice-presidente, Dr. José Piazza; Secretario de correspondencia, Ing. Quím. Francisco A. Bertuzzi; Secretario de actas, Ing. Quím. José Cruellas; Tesorero, Ing. Quím. Enrique Virasoro; Vocal 1º, Ing. José Babini; Vocal 2º, Prof. Rolando Hereñú; Vocal suplente 1º, Prof. Julio Salaber; Vocal suplente 2, Ing. Quím. Guillermo Berraz; Encargado de Biblioteca y Canje, Ing. Quím. Rodolfo Rouzaut; Encargado de Publicaciones, Ing. José Babini.

SOCIOS ACTIVOS

Anadón, Leónidas
Ariotti, Juan Carlos
Babini, José
Berraz, Guillermo
Bertuzzi, Francisco A.
Bossi, Celestino
Cerana, Miguel
Claus, Guillermo
Cohan, Marcos
Courault, Pablo
Crouzeilles, A. L. de
Cruellas, José
Christen, Carlos
Christen, Rodolfo G.
Damianovich, Horacio
Falco, Federico
Fester, Gustavo A.
Frenguelli, Joaquín
Gollán, Josué (h.)
Hereñú, Rolando
Hotschewer, Curto
Juliá, Tolrá Antonio
Kleer, Gregorio
Lachaga, Dámaso A.
Mai, Carlos
Mántaras, Fernando
Marelli, Hipólito
Martino, Antonio E.
Montpellier, Luis Marcos
Mounier, Celestino
Muzzio, Enrique
Nigro, Angel
Niklison, Carlos A.
Oliva, José
Peresutti, Luis
Piazza, José
Piñero, Rodolfo
Pozzo, Hiram J.
Ragonese, Arturo E.
Reinares, Sergio
Rouzaut, Rodolfo
Salaber, Julio
Salgado, José
Santini, Bruno L. P.
Schivazappa, Mario
Simonutti, Atilio A.
Tissembaum, Mariano
Urondo, Francisco E.
Virasoro, Enrique

SECCION MENDOZA

COMISION DIRECTIVA

Presidente, Dr. Juan B. Lara; Vice-presidente, Ing. Agr. José Raúl Ponce; Secretario, Ing. Agr. Julio Tolosa (h); Tesorero, Ing. Cayetano C. Piccione; Bibliotecario, Sr. Adrián Ruíz Leal; Vocales: Dr. Eduardo Carette; Dr. Mario Bidone; Ing. Alfredo Rosenthal; Sr. Manuel Tellechea; Ing. Agr. Rafael E. Pontis.

SOCIOS ACTIVOS

Ahumada, Ciro
Anzorena, Jacinto
Ayala Castagnino, G.
Basso, Germinal
Benegas, Raúl
Bidone, Mario
Borsani, Carlos Pablo
Burgoa, Pedro A.
Carette, Eduardo
Castillo, José
Croce, Francisco M.
Espinosa, Norberto A.
Flor Alvarado, José M.
Galeano, Edgardo
García, José Federico
Godoy Vergelin, G.
Gomensoro, José N.
Granzella, Sinibaldo
Guevara, José R.
Jofré, Alberto L.
Lara, Juan B.
Lucero, Braulio G.
Lugones, Manuel G.
Magistretti, Guillermo
Maveroff, Aquiles
Mayorga, Santiago C.
Navarro Correas, José A.
Paganotto, Juan P.
Pelaia, Dante
Piccione, Cayetano C.
Ponce, José Raúl
Pontis, Rafael E.
Richard, Alfonso E.
Rosales, Ranulfo S.
Rosenthal, Alfrado
Ruíz, Aníbal
Ruíz Leal, Adrián
Sáez Medina, Miguel
San Martín, José Benito de
Serra, Luis Angel
Silvestre, Tomás
Stura, Angel C.
Tellechea, Manuel
Tolosa, Julio (h)
Toso, Juan F.

SECCION LA PLATA

COMISION DIRECTIVA

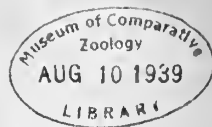
Presidente, Dr. Carlos A. Sagastume; Secretaria, Dra. Juana Cortelezzi; Tesorero, Dr. Carlos T. Teobaldo; Vocales: Ingº Juan Sabato, Ingº Manuel Ucha, Dr. Pedro G. Paternosto, Dr. Alberto E. Sagastume Berra.

SOCIOS ACTIVOS

Alsina Fuertes, Fidel
Amarante, Pedro C.
Angll, Jerónimo
Arroyo Basaldúa, Víctor M.
Basualdo, Washington S.
Bauer, Conrado
Bonet, Luis A.
Brau, Eduardo F.
Canals Frau, Salvador
Cortelezzi, Juana
Crespi Gherzi, Rodolfo A.
Christmann, Federico E.
Daló, Héctor R.
Ferrari, Obdulio J. F.
Gascón, Jorge
Gershánik, Simón
Giovambattista, Humberto
Grisi, Adolfo P.
Loedel Palumbo, Enrique
Mc Loughlin, Rogelio P.
Magliano, Hilario
Marmonti, Angel
Massimino, Blas
Méndez, José D.
Micheletti, Luis A.
Nico, Raúl
Oliva, Virgilio
Paternosto, Pedro G.
Pera, Tomás Carlos
Platzceck, Ricardo P.
Rodríguez, Marcelo R. N.
Sabato, Juan
Sáez, Francisco A.
Sagastume Berra, A. E.
Sagastume, Carlos A.
Scheggia, Eduardo R.
Teobaldo, Carlos
Toranzos, Fausto L.
Trejo, César A.
Ucha Udabe, Manuel
Vucetich, Danilo C.
Wilkens, Alejandro

SOCIOS CORRESPONDIENTES

Aguilar y Santillán, R.	México
Alvarez, Antenor	Sgo. del Estero
Amaral, Afranio de	San Pablo (Br.)
Avendaño, Leónidas	Lima
Bachmann, Carlos J.	Lima
Bodenbender, Guillermo	Córdoba
Bolívar, Ignacio	Madrid
Bonarelli, Guido	Gubbio (It.)
Borel, Emile	París
Bragg, William Henry	Londres
Bruch, Carlos	Olivos (B. A.)
Cabrera, Blás	Madrid
Campos Porto, Pablo	Río de Janeiro
Carabajal, Melitón M.	Lima
Darmois, Eugenio	Nancy (Fr.)
Darmois, Georges	París
Dávila, Rubén	Santiago (Ch.)
Escomel Edmundo	Arequipa (P.)
Fiebrig, Carlos	Munich (Al.)
Fontecilla Larrain, Arturo	Santiago (Ch.)
Fort, Michel	Lima
González del Riego, Felipe	Lima
Greve, Germán	Santiago (Ch.)
Guinier, Philibert	Nancy (Fr.)
Hadamard, Jacques	París
Hauman, Luciano	Bruselas
Hernández, Juvenal	Santiago (Ch.)
Hijar y Haro, Luis	México
Janet, Pierre	París
Jiménez de Asúa, Luis	Madrid
Keiper, Guillermo	Berlín
Lahille, Fernando	Tarn (Fr.)
Langevin, Paul	París
Levi Civita, Tullo	Roma
Lobo, Bruno	Rio de Janeiro
Mardones, Francisco	Santiago (Ch.)
Molina, Enrique	Concepc. (Ch.)
Monjaráz, Jesús E.	México
Moretti, Gaetano	Milán
Oliver Schneider, Carlos	Santiago (Ch.)
Pereira d'Andrade, Lencastre	Nova Goa (I.
Perrin, Tomás G.	México
Perrine, Carlos D.	Córdoba
Pi y Suñer, Augusto	Barcelona
Porter, Carlos E.	Santiago (Ch.)
Reyes Cox, Eduardo	Santiago (Ch.)
Rowe, Leo S.	New York
Shepperd, William R.	Wáshington
Tello, Julio C.	Lima
Valle, Rafael H.	México
Vélez, Daniel M.	México
Villarán, Manuel V.	Lima
Vitoria, Eduardo	Barcelona
Volterra, Vito	Roma



ANALES

DE LA

SOCIEDAD CIENTIFICA ARGENTINA

ADOPTADOS PARA SUS PUBLICACIONES POR LA

ACADEMIA NACIONAL DE CIENCIAS EXACTAS, FISICAS Y NATURALES

DIRECTOR: EMILIO REBUELTO

MAYO 1939 — ENTREGA V — TOMO CXXVII

SUMARIO

BUENOS AIRES

Calle Santa Fe 1145

1939

ADVERTENCIA. — Los colaboradores de los Anales son personalmente responsables de la tesis sustentada en sus escritos. Tienen derecho a la corrección de dos pruebas. Los que deseen tirada aparte de 50 ejemplares de sus artículos, deben solicitarla por escrito. Los manuscritos, correspondencia, etc. se enviarán a la sede social, Santa Fe 1145.

Impreso en los Talleres Gráficos "TOMAS PALUMBO" - La Madrid 321-325 - Buenos Aires

SOBRE UNA DEFINICIÓN ALGEBRAICA DE LAS DERIVADAS

POR EL

DR. ALBERTO E. SAGASTUME BERRA

Nos proponemos en esta nota someter a la consideración de los estudiosos una definición algebraica de las derivadas parciales de una función de varias variables. Creemos que el tema, tal como quedará aquí esbozado, y que tiene ciertos puntos de contacto con un trabajo publicado hace años por nuestro estimado Profesor Dr. Hugo Broggi ([1]), puede dar lugar a interesantes desarrollos y aplicaciones.

1. — Llamemos C al campo de números hipercomplejos a $n + 1$ unidades ($n \geq 1$), de las cuales la primera sea la unidad principal 1, y las demás las designaremos con $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n$, que cumplan la condición (tabla de multiplicación):

$$\varepsilon_h \, \varepsilon_k = 0 \quad \text{para todo} \quad h, k = 1, \ldots n. \qquad [1]$$

Los coeficientes se supondrán reales. C es, en consecuencia, conmutativo, asociativo y distributivo.

En particular, es $\varepsilon_h^2 = 0$, por lo que podemos decir que las ε_h son unidades *duales*, y podemos llamar a C, un *sistema hipercomplejo dual general*.

Sean $i_1, i_2, \ldots, i_r$, r índices distintos entre los números $1, \ldots, n$, y consideremos una función real $f(x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_r})$ de las variables reales $x_{i_1}, \ldots, x_{i_r}$. Admitamos que a cada uno de esos índices, y para cada sistema de valores de las variables $x_{i_1}, \ldots, x_{i_r}$ (y eventualmente, no para todas las posibles f, sino para un conjunto más restringido), corresponda al valor $f(x_{i_1}, \ldots, x_{i_r})$ otro valor $D_h f$ ($h = i_1$-

([1]) « Sobre la definición descriptiva de la derivada ». Contribución al estudio de las ciencias físicomatemáticas. Vol. I (1914), p. 239-43.

$\ldots, i_r$), que será así función de las x_{i_k}, y consideremos en el campo C los hipercomplejos especiales de la forma

$$u = f(x_{i_1}, \ldots x_{i_r}) + D_{i_1} f . \varepsilon_{i_1} + D_{i_2} f . \varepsilon_{i_2} + \ldots + D_{i_r} f . \varepsilon_{i_r} ,$$

o mejor

$$u = f(x_{i_1}, \ldots, x_{i_r}) + \sum_{h=1}^{n} D_h f . \varepsilon_h , \qquad [2]$$

si definimos

$$D_h f(x_{i_1}, \ldots, x_{i_r}) = 0 \quad \text{para} \quad h \neq i_1, \ldots, i_r . \qquad [3]$$

Cuando existan las $D_h f$ y se cumplan las condiciones A, B, B' C, que a continuación enunciaremos, diremos que la D_h es una *operación de derivación* respecto a la variable x_h, y a la $D_h f$ la llamaremos *derivada parcial de la función* f *respecto a la variable* x_h.

Por lo pronto, por la definición [3] se tiene el

Teorema I. — La derivada parcial de una función respecto a una variable de la cual no depende es cero.

En particular, si f se reduce a una constante:

Teorema I'. — Las derivadas parciales de una constante son todas nulas.

2. *Condición A. — El sistema de los hipercomplejos de la forma* [2] *es un cuerpo K.*

a) Esto significa, en primer lugar, que los hipercomplejos [2], variando r y los índices i, deben formar grupo respecto a la suma. Es decir, si [2] y

$$v = g(x_{j_1}, \ldots, x_{j_s}) + \sum_{h=1}^{n} D_h g . \varepsilon_h \qquad [2']$$

son dos de ellos, tal debe ser también $u \pm v$, y el cero 0 (la propiedad asociativa se cumple, pues ya en el sistema total C se verifica). Como

$$u \pm v = (f \pm g) + \sum_{h=1}^{n} (D_h f \pm D_h g) . \varepsilon_h ,$$

para que $u \pm v$ pertenezca a K, es necesario y basta que

$$D_h (f \pm g) = D_h f \pm D_h g : \qquad [4]$$

Teorema II. — La derivada parcial de una suma, o diferencia, es la suma, o diferencia, de las derivadas parciales de sus términos (todas respecto a una misma variable).

Además, según el teorema I', el complejo $0 + \sum_{h=1}^{n} 0 \,.\, \varepsilon_h = 0$ pertenece a K.

b) En segundo lugar, los hipercomplejos que consideramos, exceptuando el cero, deben formar grupo respecto al producto. Es decir, $u \,.\, v$ debe pertenecer a K, la unidad 1 también (lo que ya se verifica por el Teorema I'), y, si $u \neq 0$, también u^{-1} debe pertenecer a K. (La propiedad asociativa es obvia, por poseerla ya C). Se tiene, en virtud de [1]:

$$u . v = f . g + \sum_{h=1}^{n} (f . D_h g + g . D_h f) \varepsilon_h ,$$

que debe pertenecer a K, es decir, debe ser de la forma

$$f g + \sum_{h=1}^{n} D_h (f g) . \varepsilon_h$$

lo que exige que

$$D_h (f g) = f . D_h g + g . D_h f \qquad [5]$$

y recíprocamente.

Teorema III. — La derivada parcial de un producto de dos funciones es la suma de cada una de las funciones por la derivada de la otra (respecto a la misma variable).

Si $u \neq 0$, por el Teorema I' debe ser $f \neq 0$, y recíprocamente, si esta condición se cumple, es $u \neq 0$. Luego, si suponemos $f \neq 0$, y en la [5] hacemos $g = \frac{1}{f}$, teniendo en cuenta que $D_h 1 = 0$, se tiene

$$D_h \frac{1}{f} = - \frac{D_h f}{f^2} . \qquad [5']$$

Teorema III'. — La derivada parcial de $\frac{1}{f}$ $(f \neq 0)$ *es igual a la derivada de f con signo contrario, dividida por el cuadrado de f.*

La [5′] expresa la condición de que u^{-1} pertenezca a K. En efecto, es fácil ver que u^{-1} está dado por

$$u^{-1} = \frac{1}{f} - \sum_{h=1}^{n} \frac{D_h f}{f^2} . \varepsilon_h$$

que en virtud de [5′] equivale a

$$u^{-1} = \frac{1}{f} + \sum_{h=1}^{n} D_h \frac{1}{f} . \varepsilon_h,$$

es decir, al hecho de que u^{-1} pertenezca a K.

c) La distributividad del producto respecto a la suma se verifica en K, porque se verifica ya en C.

Observemos que K, que acabamos de demostrar que es un cuerpo cuando se cumplen las condiciones [4] y [5], contiene al cuerpo R de los números reales, pues según el Teorema I′ los complejos

$$c + \sum_{h=1}^{n} 0 . \varepsilon_h \qquad (c, \text{ constante real})$$

pertenecen a K.

3. *Condición B. — El cuerpo K contiene a los complejos $x_i + \varepsilon_i$ para $i = 1, 2, \ldots, n$.* En otros términos: se tiene

$$D_h x_i = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad h \neq i \\ 1 & \text{si} \quad h = i \end{cases} \qquad [6]$$

Teor ma IV. — La derivada de x_i respecto a x_h vale 0 ó 1 según que sea $h \neq i$ ó $h = i$.

Esto supone, naturalmente, que las x_i son todas independientes entre sí. Si en cambio algunas de ellas dependen de otras, impondremos la

Condición B′. — Si las variables $x_{i_1}, \ldots, x_{i_r}$ $(r < n)$ se suponen funciones de las variables $x_{j_1}, \ldots, x_{j_s}$ $(s \leq n - r)$, siendo distintos todos los índices i_k, j_h:

$$x_{i_k} = \varphi_k (x_{j_1}, \ldots, x_{j_s}) , \quad (k = 1, \ldots, r) \qquad [7]$$

el cuerpo K contiene a los complejos de la forma

$$w = f (x_{i_1}, \ldots, x_{i_r}) + \sum_{k=1}^{r} D_{i_k} f . [\varepsilon_{i_k} - \varphi_k (x_{j_1}, \ldots, x_{j_s})] . \qquad [8]$$

Para ver cuál es el significado de la condición B', designemos por u_k el complejo correspondiente a la función φ_k y perteneciente a K, esto es:

$$u_k = \varphi_k + \sum_{h=1}^{s} D_{j_h} \varphi_k . \varepsilon_{j_h} \qquad (k = 1, \ldots, r).$$

Como u_k pertenece a K, también la combinación lineal $\sum D_{i_k} f . u_k$ pertenece a K, y lo mismo ocurre con

$$w + \sum_{k=1}^{r} D_{i_k} f . u_k = f + \sum_{k=1}^{r} D_{i_k} f [\varepsilon_{i_k} - \varphi_k + u_k] =$$

$$= f + \sum_{k=1}^{r} D_{i_k} f . \varepsilon_{i_k} + \sum_{h=1}^{s} \left(\sum_{k=1}^{r} D_{i_k} f . D_{j_h} \varphi_k \right) . \varepsilon_{j_h} .$$

Comparando con el complejo

$$f + \sum_{t=1}^{n} D_t f . \varepsilon_t$$

resulta

$$D_{j_h} f = \sum_{k=1}^{r} D_{i_k} f . D_{j_h} \varphi_k , \qquad [9]$$

es decir, el

Teorema V. — La derivada respecto a x_{j_h} de una función compuesta $f(x_{i_1}, \ldots, x_{i_r})$, donde las $x_{i_k} = \varphi_k(x_{j_1}, \ldots, x_{j_s})$, está dada por la [9]. En particular, para $r = 1$:

$$D_{j_h} f(x_{i_1}) = D_{i_1} f . D_{j_h} \varphi_1 . \qquad [9']$$

Recíprocamente, de la [9] se deduce que el complejo [8] pertenece a K.

4. — Si

$$u_m = f_m + \sum_{h=1}^{n} D_h f_m . \varepsilon_h \qquad (m = 1, 2, \ldots) ,$$

(donde $f_m = f_m(x_{i_1}, \ldots, x_{i_r})$ siendo los índices i_k independientes de m) es una sucesión de complejos de K, puede ocurrir que exista

$$u = \lim_{m \to \infty} u_m ,$$

en cuyo caso diremos que la sucesión u_m converge. Análogamente

puede considerarse la convergencia uniforme de u_m en un cierto campo. La convergencia significa que existen, separadamente,

$$f = \lim_{m \to \infty} f_m \quad , \quad \psi_h = \lim_{m \to \infty} D_h f_m \quad (h = 1, \ldots n);$$

pero naturalmente, el complejo

$$u = f + \sum_{h=1}^{m} \psi_h . \varepsilon_h$$

no pertenecerá en general a K, es decir, en general será $\psi_h \neq D_h f$. Admitiremos esta circunstancia bajo una condición, que es:

Condición C. — Si la sucesión u_m (que depende de las variables x_{i_k}) tiende uniformemente al complejo

$$u = f + \sum_{h=1}^{m} \psi_h . \varepsilon_h$$

en un cierto campo de variabilidad de las x_{ik}, entonces u pertenece a K; es decir

$$\lim_{m \to \infty} D_h f_m = D_h \left(\lim_{m \to \infty} f_m\right) \qquad [10]$$

No se excluye que u pueda pertenecer a K aún en otros casos.

5. — Apliquemos al caso de una variable x ($n = 1$) lo que hemos expuesto en los párrafos anteriores; y más precisamente, comparemos las operaciones (²) Df y la ordinaria

$$f' = \frac{df}{dx} .$$

Es evidente que la aplicación reiterada de [4], [5], [5′] y [6] nos permite obtener Df cuando f es una función racional cualquiera. Más aún, en este caso se obtiene

$$D f(x) = f'(x) ,$$

es decir, ambas operaciones coinciden. Aplicando la condición C, se obtiene la misma coincidencia bajo la hipótesis más general de que f admita un desarrollo en serie de potencias de x, o de $\frac{1}{x}$ (basta

(²) En todo lo que sigue suprimimos los índices h en las expresiones $D_h f$, ϵ_h y análogas, por no ser ya necesarias.

tomar como f_m en la [10] la suma parcial de los m primeros términos de esa serie).

Sea ahora f una función cualquiera derivable en el sentido ordinario (es decir, tal que exista f') y su derivada f' sea continua (en un cierto campo).

Por ser f' continua, puede aproximarse uniformemente, según el conocido teorema de Weierstrasz, por una sucesión P'_m de polinomios. Si P_m es el polinomio obtenido integrando P'_m, los P_m aproximan también uniformemente la f. Entonces la sucesión

$$u_m = P_m + P'_m . \varepsilon = P_m + DP_m . \varepsilon$$

tiende uniformemente a

$$u = f + f' . \varepsilon$$

y por tanto, por la condición C, u pertenece a K, lo que significa que

$$Df = f' .$$

Llegamos así al interesante resultado:

Teorema VI. — *Si f es una función* (3) *que admite una derivada continua en el sentido ordinario, entonces dicha derivada coincide con Df, cuando se cumplen las condiciones A, B, C* (4).

Agregando la condición B', esto mismo es válido para una función de función que satisfaga análogas condiciones.

(3) El resultado se extiende a funciones de más de una variable, pues el teorema de Weierstrasz también es válido en ese caso. Véase E.W. Hobson: *The Theory of Functions of a Real Variable.* Cambridge (1926), vol II, p. 230 y sig.

(4) Este resultado lo debo a la gentil colaboración, que aquí agradezco, de mi amigo y colega Dr. A. Durañona y Vedia.

ESTRUCTURAS DE ANÁGENOS (1)

POR

MISCHA COTLAR

Introducción. — El objeto de este trabajo es dar un método *constructivo* cuya aplicación permite desarrollar varias teorías matemáticas en casos muy generales y pone en evidencia las relaciones existentes entre ellas. Al querer desarrollar una teoría en un campo nuevo, éste, en general, no reunirá las características necesarias. Entonces se recurre a un método *constructivo* que dote al campo de nuevos entes, cuya introducción haga posible el desarrollo de la teoría. Consideremos los siguientes ejemplos:

1) Al querer desarrollar la teoría de límites en el campo de los números racionales, como éste carecía de « la continuidad », fué necesario recurrir a uno de los 3 métodos constructivos de Dedeckind, Kantor y Weirstrass que amplían este campo con los números irracionales, formando así un campo « continuo ».

2) Para extender y sistematizar varios resultados de la Geometría, fué necesario introducir nuevos entes que son los puntos impropios e imaginarios.

3) Al querer desarrollar la teoría de divisibilidad en los cuerpos algebraicos, como en éstos no siempre dos números admiten un máximo común divisor, fué necesario ampliar los cuerpos con los ideales de Kummer-Dedeckind. La teoría de ideales es una teoría constructiva por excelencia.

4) Consideremos el conjunto de todos los números naturales menos los primeros 4 números: 5, 6, 7,... En este conjunto no se

(1) Un resumen del contenido de este trabajo fué presentado por el Prof. M. M. Fréchet y M. Arauszojn al *Congrés des Socitétés Savantes A Bordeaux* de 1939, con los títulos: 1º *Les structures d'Anagènes et les Espaces arithmétiques.* 2º *Anagènes généralisés. Application aux Espaces topologiques.*

puede desarrollar la teoría de divisibilidad puesto que evidentemente no hay única descomposición en factores primos, por ejemplo $60 = 5.12 = 6.10$. Luego para poder desarrollar dicha teoría, habría que recurrir a un método *constructivo* que amplíe este conjunto con los cuatro elementos que hemos quitado.

5) La teoría de series sumables puede con iderarse, entre sus múltiples aspectos, como una teoría constructiva que amplía el campo de las series con suma.

6) Para el desarrollo de la teoría de funciones continuas en un espacio abstracto es necesario que éste sea compacto. Por eso los espacios métricos se completan por el método de Kantor-Cauchy hasta obtener un espacio compacto.

Como se ve, en cada uno de los ejemplos 1), 2), 3), 4) y 6) se utiliza un método diferente para lograr el objeto. Sin embargo, como vamos a mostrarlo, al examinar más profundamente el método de Dedekind citado en el ej. 1), se llega a un método constructivo, que es el que exponemos a continuación, el cual puede reemplazar a esos diferentes métodos en cada uno de los ejemplos citados. Más aún; aplicando este método se puede desarrollar la teoría de divisibilidad en campos donde la teoría de ideales no llega. Además resolvemos una cuestión más general que la citada en el ej. 6), o sea, demostramos que un espacio topológico muy general puede ampliarse hasta obtener un espacio compacto, y en el caso de que el espacio ya sea compacto esta ampliación no introduce ninguna modificación en la estructura topológica del mismo (permanencia).

Antes de exponer el método aclaremos sus características principales. Los nuevos entes creados por los métodos constructivos corresponden generalmente a conjuntos de entes primitivos que podemos llamar « sin origen », ya que el número irracional es una cortadura sin el menor (mayor) elemento, el ideal no principal es un anillo sin divisor común, el punto impropio es un conjunto de determinadas rectas sin punto común, etc. Por eso damos el nombre de « anágeno » al nuevo elemento creado por nuestro método (anágeno — « sin origen »).

Suponemos que todo método puede llamarse « método constructivo » si satisface a los 3 principios básicos siguientes. En algunos casos basta con los dos últimos. Estos principios constituyen la esencia de nuestro método.

1) Principio de Prolongación: La ampliación se efectúa de tal modo que el nuevo campo contiene al primitivo como subcampo. Así los números reales contienen a los racionales como caso particular conservando las leyes de suma multiplicación y monotonía.

2) Principio de Permanencia: El método constructivo que nos da el nuevo ente con el cual conseguiremos determinado objeto (antes imposible) en un campo, no da elementos nuevos si se aplica a un campo donde este objeto ya fué logrado. Por ejemplo: los ideales del anillo de los números naturales son todos principales, es decir, coinciden con los elementos primitivos; la sumabilidad de series coincide con la convergencia en el caso de las series convergentes.

3) Principio de Totalidad: Si se aplica el método a un campo ampliado ya una vez con el mismo método, no se obtienen nuevos entes.

Así, por ejemplo, la cortadura en el campo de los números reales no define nuevos números; en este caso la « totalidad » es la « continuidad ».

Este último principio es fundamental en todo nuestro trabajo, y con él llegamos a que la continuidad, o mejor dicho la totalidad es tan necesaria para la Teoría de Números como para la Teoría de Límites.

En otra memoria nos ocuparemos de las aplicaciones a la aritmética y los Espacios topológicos.

Cúmpleme agradecer al eminente matemático M. M. Fréchet por sus consejos y críticas muy preciosas; al Prof. J. C. Vignaux por los conocimientos matemáticos y el constante estímulo que recibo tan desinteresadamente desde hace tiempo y que yo aprecio en todo su valor y al Prof. A. Durañona y Vedia por sus observaciones tan atinadas.

I. — Anágenos (1). Método de Dedeking

1 — Un conjunto se dice « *parcialmente ordenado* » (*) si él contiene pares de elementos a, b, ligados entre sí por una relación $a \subset b$ (« *a precede b* ») tal que:

para todo elemento a del conjunto es $a \subset a$

$a \subset b$ y $b \subset c$ entraña $a \subset c$.

(*) Conservaremos la terminología de V. Clivenko, *Théorie des Structures*, Hermann, 1938.

Se llama « *estructura* » a todo conjunto parcialmente ordenado que verifica las siguientes dos condiciones:

1° A todo par de elementos a, b del conjunto corresponde un elemento $a b$ del conjunto (« *producto* de a y b ») tal que:

$$ab \subset a \quad ; \quad ab \subset b \quad ; \quad c \subset a \ \text{ y } \ c \subset b \ \text{ entraña } \ c \subset ab.$$

2° A todo par de elementos a, b del conjunto corresponde un elemento $a + b$ del mismo (« *suma* de a y de b ») tal que:

$$a \subset a + b \quad ; \quad b \subset a + b \quad ; \quad a \subset c \ \text{ y } \ b \subset c \ \text{ entraña } \ a + b \subset c.$$

De la misma manera se define la suma y producto de infinitos elementos, pero no siempre existen estos elementos. Una estructura tal, que para toda sucesión infinita de elementos existen la suma y producto de estos elementos, se llama « *estructura fuerte* ».

Se dice que la estructura $\bar{S}$ es « isomorfa » con la estructura S si se puede establecer una correspondencia biunívoca $a \longrightarrow \bar{a}$ tal que $ab \longrightarrow \bar{a}\bar{b}$ y $a + b \longrightarrow \bar{a} + \bar{b}$. Si esta correspondencia es unívoca sin ser biunívoca, la $\bar{S}$ es « homomorfa » con S.

Ahora vamos a demostrar que *todo conjunto parcialmente ordenado puede ampliarse con nuevos entes de acuerdo a los 3 principios enunciados, de modo que el conjunto ampliado sea una estructura fuerte.*

2. — Consideremos un conjunto parcialmente ordenado fijo. Si al mismo tiempo es $a \subset b$ y $b \subset a$ vamos a escribir $a = b$, y desde el punto de vista de conjuntos ordenados no les vamos a considerar como elementos distintos. Si el conjunto no tiene un « primer » y un « último » elemento, agregaremos esos dos elementos. Es decir, agregaremos los elementos « 0 » y « 1 » tales que para todo elemento a se tiene $0 \subset a$ y $1 \supset a$.

Sean $C_e(a)$ el conjunto de todos los elementos que siguen a a y $C_i(a)$ el conjunto de todos los elementos que preceden a a. Entonces a pertenece a ambos conjuntos y es el elemento « generador » de éstos. Las propiedades siguientes son inmediatas:

A) Si $C_e(a) \leq C_e(b)$ es $C_i(a) \geq C_i(b)$ y $a \supset b$,

y recíprocamente si $a \supset b$ es $C_e(a) \leq C_e(b)$.

Si $C_i(a) \leq C_i(b)$ es $C_e(a) \geq C_e(b)$ y $a \subset b$,
y recíprocamente si $a \subset b$ es $C_i(a) \leq C_i(b)$.

Si $C_e(a) = C_e(b)$ es $C_i(a) = C_i(b)$ y $a = b$,
y recíprocamente si $a = b$ es $C_e(a) = C_e(b)$.

B) Si $a' \varepsilon C_e(a)$ y $a'' \supset a'$ se deduce $a'' \varepsilon C_e(a)$.
Si $b' \varepsilon C_i(a)$ y $b'' \subset b'$ es $b'' \varepsilon C_i(a)$.

C) $C_i(a)$ está formado por *todos* los elementos que preceden a *todos* los elementos de $C_e(a)$. $C_e(a)$ está formado por *todos* los elementos que siguen a *todos* los elementos de $C_i(a)$.

Consideremos el conjunto de los posibles pares de conjuntos de la forma

$$[C_i(a) \quad ; \quad C_e(a)].$$

Escribamos

$$[C_i(a) \quad ; \quad C_e(a)] \subset [C_i(b) \quad ; \quad C_e(b)]$$
$$\text{si} \quad C_i(a) \leq C_i(b) \quad \text{y} \quad C_e(a) \geq C_e(b),$$

entonces este conjunto será parcialmente ordenado y en virtud de (A) en vez del conjunto primitivo se puede considerar este último; es decir los dos conjuntos son isomorfos como conjuntos parcialmente ordenados.

3. — Llamemos « anágeno (1) » o simplemente (*) « anágeno » a todo par de conjuntos

$$(A_i \quad ; \quad A_e)$$

que verifica las siguientes dos condiciones:

1) A_i está formado por *todos* los elementos que preceden a *todos* los elementos de A_e.
2) A_e está formado por *todos* los elementos que siguen a *todos* los elementos de A_i.

(*) Escribimos anágeno (1) para distinguirles de los anágenos (2) y (3) que introduzcamos más adelante.

A_i es el « componente i o izquierda »; A_e es el « componente e o derecha » del anágeno, y dado uno de ellos queda determinado el otro. Evidentemente no todo conjunto puede ser un componente de anágeno; en efecto:

Para que un conjunto C sea un A_e (A_i) es necesario y suficiente que formando el conjunto C' de *todos* los elementos que preceden (siguen) a los de C, y luego el conjunto C'' de *todos* los elementos que siguen (preceden) a todos los C' — resulte $C'' = C$. Si los componentes del anágeno tienen un elemento común a diremos que es un anágeno « propio » de generador pripio a, o anágeno propio a. En caso contrario decimos que el anágenos $(A_i ; A_e)$ define un generador « impropio » α y lo designamos $\alpha = (A_i A_e)$.

Sean $(A_i ; A_e)$ y $(B_i ; B_e)$ dos anágenos; si $A_i \leq B_i$ es $A_e \geq B_e$. En efecto, sean $\{a_i\}$ $\{a_e\}$ $\{b_i$ $\{b_e\}$ los elementos de A_i, A_e, B_i, B_e respectivamente. Todo b_e es $\supset b_i$ y si $A_i \leq B_i$ será todo $b_e \supset$ que cualquier a_i, luego $b_e \varepsilon A_e$ es decir $B_e \leq A_e$. Análogamente si $A_e \leq B_e$ es $A_i \geq B_i$ Por lo tanto podemos dar la siguiente

Definición. — Sean $a = (A_i ; A_e)$ $\beta = (B_i ; B_e)$. Escribamos

$$\alpha \subset \beta \quad \text{o} \quad (A_i ; A_e) \subset (B_i ; B_e) \quad \text{si} \quad A_i \leq B_i \quad \text{o si} \quad A_e \geq B_e ,$$

$$\text{y} \quad \alpha = \beta \quad \text{si} \quad A_i = B_i \quad \text{o si} \quad A_{\infty} = B_e .$$

Según esta definición los anágenos forman un conjunto parcialmente ordenado, y de lo dicho en el § 2 se deduce el

PRINCIPIO DE PROLONGACIÓN. — El conjunto ordenado primitivo es isomorfo con el de los anágenos propios, siendo $a \rightarrow (C_i (a) ; C_e (a)$.

TEOREMA I. — Sean $\alpha = (A_i ; A_e)$ un anágeno cualquiera y $a = (C_i (a) ; C_e (a))$ un anágeno propio. Si $a \supset \alpha$ es $a \varepsilon A_e$ y recíprocamente. Si $a \supset \alpha$ es $a \varepsilon A_i$ y recíprocamente.

Demostración. — Si $a \supset \alpha$ es por definición $C_e (a) \leq A_e$ y como $a \varepsilon C_e (a)$ resulta $a \varepsilon A_e$. Recíprocamente, si $a \varepsilon A_e$ como todo elemento que sigue a a también pertenece a A_e resulta $C_e (a) \leq A_e$ o $a \subset \alpha$. Análogamente se demuestra la otra parte del teorema.

Este teorema muestra que el componente e (i) de anágeno es el conjunto de todos los generadores propios que siguen (preceden) al generador del anágeno.

Pero además de estos generadores propios puede haber otros generadores, impropios, que preceden o siguen al generador dado. A éstos se refiere el siguiente

TEOREMA II. — Si β precede (sigue) a todos los elementos propios que siguen (preceden) a α, entonces β también precede (sigue) a todos los elementos impropios que siguen (preceden) a α. En particular $\beta \subset \alpha$ $(\beta \supset \alpha)$.

Demostración. — Sea A_e el componente e de α y a un elemento cualquiera de A_e. En virtud del teorema anterior es $a \supset \alpha$, luego, por hipótesis, es $\beta \subset a$. Si B_e es el componente e de β resulta $a \varepsilon B_e$. o $A_e \leq B_e$, es decir $\beta \subset \alpha$, lo que demuestra la tesis.

Llamamos conjunto « *completado* (1) » a un conjunto que ya fué ampliado con los anágenos (1). Ahora, el conjunto completado (es decir el conjunto de los anágenos) es a su vez un conjunto parcialmente ordenado y podría completarse de nuevo con anágenos. Pero, como lo muestra el siguiente teorema, esta nueva ampliación no introduce nuevos elementos; en otras palabras, los anágenos de anágenos no definen generadores impropios.

PRINCIPIO DE TOTALIDAD. — Todo conjunto completado es isomorfo con el de sus anágenos. En otras palabras, si $(\mathcal{A}_i ; \mathcal{A}_e)$ es un par de conjuntos de anágenos tales que

$\mathcal{A}_i$ está formado por *todos* los anágenos que preceden a todos los de $\mathcal{A}_e$

$\mathcal{A}_e$ está formado por *todos* los anágenos que siguen a todos los de $\mathcal{A}_i$

hay un anágeno común a los dos conjuntos.

En efecto: Sean A_i, A_e los conjuntos formados por los elementos (anágenos) propios de $\mathcal{A}_i$, $\mathcal{A}_e$ respectivamente; en virtud del terema I ninguno de estos conjuntos es vacío. Vamos a mostrar antes que (A_i, A_e) es un anágeno:

Todo elemento de A_i pertenece a $\mathcal{A}_i$, luego precede a todos los generadores de $\mathcal{A}_e$ y en particular a los de A_e. Recíprocamente, todo generador propio que precede a todos los de A_e pertenece a A_i. En efecto, sea a tal generador y α uno cualquiera de $\mathcal{A}_e$. Como el componente «e» de α forma parte de $\mathcal{A}_e$ y como este componente está formado por generadores propios resulta que él forma parte de A_e; luego a precede a todos los elementos de este componente

y por lo tanto $a \subset \alpha$ (T. II). Así que a precede a todos los elementos de $\mathscr{A}_e$, luego $a \varepsilon \mathscr{A}_i$ y por ser propio $a \varepsilon A_i$.

Así que (A_i, A_e) es un anágeno; sea $\alpha = (A_i ; A_e)$ y $\beta \varepsilon \mathscr{A}_i$ El componente «i» de β forma parte de $\mathscr{A}_i$ y por lo tanto de A_i, luego $\beta \subset \alpha$. Análogamente se verá que α precede a todo elemento de A_e así que α debe pertenecer a A_i y A_e l. q. d. d.

4. — La ampliación de un conjunto parcialmente ordenado con los anágenos (1) tiene por objeto obtener una estructura fuerte, y de acuerdo al principio de permanencia toda estructura fuerte debe ser un conjunto completado.

TEOREMA III. — La intersección (producto) de varios o infinitos (de potencia arbitraria) componentes « e » (« i ») de anágenos es un componente « e » (i) de anágeno.

Demostración. — Sean $A_e, B_e, \ldots$ esos componentes, $A_i, B_i, \ldots$ los componentes « i » correspondientes y $C = A_e \times B_e \times \ldots$ Sea C' el conjunto de los elementos que preceden a todos los de C. El conjunto C' es determinado porque C no es vacío puesto que desde el principio hemos adjuntado los elementos 0 y 1. Evidentemente $C' \geq A_i + B_i + \ldots$. Luego Si a es un elemento que sigue a todos los de C', resulta que a sigue a todos los elementos de A_i, y $B_i, \ldots$ y por lo tanto $a \varepsilon A_e$, $a \varepsilon B_e, \ldots$ luego $a \varepsilon C$. De manera que si C'' es el conjunto de los elementos que siguen a todos los de C' es $C'' \leq C$. Pero por definición de C'' es $C \leq C''$. luego $C = C''$, es decir que C es un componente « e » de anágeno (§ 3).

TEOREMA IV. — Los anágenos forman una estructura fuerte (*) tal que

$$\text{si } \alpha = (A_i, A_e),\ \beta = (B_i, B_e), \ldots \text{ y } \alpha + \beta + \ldots = (S_i, S_e),\ \alpha\beta = (P_i, P_e)$$
$$\text{es } S_e = A_e \times B_e \times \ldots\ ;\ P_i = A_i \times B_i \times \ldots$$

Demostración. — En virtud del teor. anterior es $S_e = A_e \times B_e \ldots$ un componente « e » de un anágeno que designemos

$$\alpha + \beta + \ldots = (S_i, S_e).$$

(*) Mejor dicho una structura « muy fuerte », porque las structuras fuertes se definen como tales que admiten la suma y producto para toda sucesión infinita de elementos, mientras que en nuestro caso esta infinidad puede ser de cualquier potencia.

Por definición se tiene que

$$\alpha \subset \alpha + \beta + \ldots \; , \; \beta \subset \alpha + \beta + \ldots$$

Además si $\alpha \subset \mu$, $\beta \subset \mu$, ... el componente « e » de μ está contenido en A_e, B_e,... por lo tanto en S_e, luego $\alpha + \beta + \ldots \subset \mu$ l. q. d. d.

Principio de permanencia. — Toda estructura « muy fuerte » es isomorfa con la estructura de sus anágenos, es decir que está completada.

En efecto, sea (A_i, A_e) un anágeno de esta estructura. El producto de todos los elementos de A_e por una parte debe pertenecer a A_i, y por otra parte sigue a todos los elementos de A_i, y por lo tanto debe pertenecer a A_e.

Nota: El teorema queda cierto si cambiamos la condición: estructura muy fuerte, por la condición: un conjunto parcialmente ordenado que admite el producto (o suma) de un número cualquiera de elementos. Esta observación nos será muy útil en adelante.

El teorema siguiente puede ser útil en algunos casos.

Teorema V. — Dado un conjunto parcialmente ordenado tal que a todo elemento de este conjunto preceden un número finito de elementos no iguales, y para todo par de elementos existe el producto de estos elementos, entonces este conjunto ya está completado (1).

Demostración. — Sea A_e un componente « e » de este conjunto y a, b dos de sus elementos. Por hipótesis ab es un elemento del conjunto, y, como es fácil ver, pertenece a A_e. Si todos los elementos de A_e siguen a ab es A_e un anágeno propio. Si no, hay un $c \varepsilon A_e$ que no sigue a ab. Entonces $d' = abc$ pertenece a A_e y no es igual a ab. Si d' precede a todos los de A_e es éste un anágeno propio. Si no hay un $c' \varepsilon A_e$ que no sigue a d'. Entonces $d'' = d' c'$ pertenece a A_e y no es igual a d'. Siguiendo de la misma manera obtendremos la sucesión $a \supset ab \supset d' \supset d'' \supset \ldots$ que debe terminar en un $d^{(n)}$, pues de lo contrario a tendrá infinitos elementos que le preceden y no iguales entre sí; $d^{(n)}$ precede entonces a todos los de A_e luego éste es un anágeno propio.

5. — Entre los conjuntos parcialmente ordenados vamos a distinguir 2 tipos de estos conjuntos. En primer lugar llamemos « conjunto analítico » a todo conjunto que está ordenado de tal modo

que dados dos de sus elementos uno precede al otro, excluída la posibilidad de que no sean comparables. Acá el concepto de preceder es la generalización del concepto menor igual. El anágeno en este caso es una generalización de la cortadura de Dedecking y la teoría hasta ahora desarrollada la generalización de la teoría de límites. Así el principio de totalidad es el de la continuidad y definiendo convenientemente los « entornos » se obtiene un espacio topológico de Hausdorff, y por lo tanto se tiene la teoría de límites. Finalmente los elementos 0 ó 1 pueden definirse como el producto de todos los componentes « i » o de todos los componentes « e » del conjunto análogamente a la definición de los límites superior e inferior de oscilación.

Llamemos « conjuntos aritméticos » a los que están ordenados de manera que a todo elemento le preceden un número finito de elementos no iguales, en cambio a todo par de elementos les siguen infinitos no iguales entre sí. Los conjuntos aritméticos más importantes son el de los números naturales ordinarios o en general los anillos de los enteros de un cuerpo algebraico. Como vamos a mostrar los anágenos pueden reemplazar a la teoría de ideales para construir la teoría de la divisibilidad en los conjuntos aritméticos. Ahora sólo indicaremos que

Teorema VI. — En un cuerpo algebraico, haciendo $a \subset b$ si a es divisor de b, los componeness « e » de anágenos son ideales de Kummer-Dedeckind.

En efecto: Sean a, b dos elementos del componente A_e. Como a y b son múltiples de todos los elementos de A_i lo será también $a - b$, luego $a - b \varepsilon A_i$. Además todo múltiplo de un elemento de A_e pertenece a A_e, luego A_e es un ideal. Además el generador de A_e se confunde con el número ideal por ser ambos el máximo común divisor de A_e (T. V). Finalmente los ceros y unidades son los mismos para los anágenos e ideales.

El recíproco de este teorema no es siempre cierto. En efecto: Como se sabe (*) hay anillos donde cada elemento admite un número finito de divisores y cada par de elementos un máximo común divisor, pero este máximo común divisor de elementos no coincide con el de los ideales de estos elementos. En cambio, según lo demostra-

(*) V. der Varden *Algebra*, § 16, t. I.

do (T. V), en este anillo todos los anágenos son propios. Luego en este anillo los anágenos no son isomorfos con los ideales.

6. — Indiearemos todavía brevemente cómo puede generalizarse lo dicho en el § 5 referente a los conjuntos analíticos.

Consideremos un conjunto completado (1) cualquiera. En él se puede introducir la definición de Frechet de « entorno » de la siguiente manera (*):

Definición. — Diremos que p es « elemento de acumulación » del conjunto $A = \{a_i\}$ si existe un subconjunto $A_1 < A$ o bien un subconjunto $A_2 < A$, tales que p es el produeto de los elementos de A_1 o bien la suma de los elementos de A_2 y además $p\,A_1\;p\,A_2$.

De este modo el conjunto completado puede considerarse como un espaeio topológico de Frechet. Indiquemos el siguiente teorema que nos será util más adelante.

Teorema VII. — Toda sucesión $\{a_i\}$ infinita tiene un elemento de acumulación.

Demostración. — Sea $d = a_1\, a_2 \ldots a_n \ldots$ Si d no pertenece a $A = \{a_i\}$ el teorema está demostrado. Si no sea $d = a_1$ y $A_1 = A - \{a_1\}$. Si $d_1 = a_2\, a_3 \ldots$ no pertenece a A el teorema está demostrado si no sea $d_2 = a_2$. Siguiendo del mismo modo obtendremos $a_1 \subset a_2 \subset \ldots \subset a_n \subset \ldots$. Si esta sucesión es finita el teorema está demostrado, si no supongamos que esta sueesión es infinita; entonces $a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots$ no puede ser ninguno de esos elementos. Pero estos elementos pertenecen a A, luego $a_1 + \ldots + a_n + \ldots$ es un elemento de aeumulación de A l. q. d. d.

En particular se tiene el siguiente: *Teorema de Weirstrass*: En un eonjunto analítico todo conjunto que no admite más que un elemento de acumulación es numerable.

El espacio compaeto así definido tiene varias propiedades interesantes, pero acá tenemos que limitarnos a lo expuesto, puesto que esta euestión no entra en el objeto de este trabajo.

(*) El concepto de punto de acumulación dado acá es diferente del introducido por M. L. Kantorovitch (Clivenko, obra citada). El nuestro está tomado de la definición de Frechet para espacios abstractos, mientras que el segundo está tomado de la Aritmética de la teoría de conjuntos.

7. — Todo lo expuesto relativo a los anágenos (1) admite una generalización muy importante. Nos limitaremos a indicar lo necesario para el objeto de este trabajo. Sea E un espacio parcialmente ordenado contenido en otro tal espacio $\bar{E}$ de modo que si en E es $a \subset b$ también lo es en $\bar{E}$.

Definición. — Diremos que un conjunto A_e de E es un « *anágeno e* de E *respecto a* $\bar{E}$ », cuando al formar el conjunto A_1 de todos los elementos de $\bar{E}$ que preceden a todos los de A_e, luego el conjunto A_2 de todos los elementos de $\bar{E}$ que siguen a todos los de A_1, se verifica $E\,A_2 = A_e$. Análogamente se definen los anágenos i con respecto a $\bar{E}$.

Diremos que el anágeno (relativo $\bar{E}$) A_e sigue al anágeno B_e si $A_e \leqq B_e$.

El producto de anágenos relativos (en número o potencia cualquiera) *es un anágeno.* La demostración es idéntica a la del T. III, § 4. Luego de este teorema se deduce (Nota del § 4) que los *anágenos* relativos *forman una estructura muy fuerte.* Además a todo elemento de E corresponde un anágeno respecto a $\bar{E}$ formado de la siguiente manera: sea A el conjunto de los elementos de $\bar{E}$ que siguen a este elemento y $A_e = A\,.\,\bar{E}$; A_e es un anágeno como es fácil de verlo. Todavía indiquemos las 2 propiedades siguientes: Sea A_e un anágeno de E respecto a $\bar{E}$, A_1 el conjunto de los elementos de $\bar{E}$ que preceden a todos los de A_e y $A_i = A_1\,.\,E$, entonces es A_i un anágeno i de E con respecto a E, es decir en sentido ordinario. Recíprocamente a todo anágeno i, A_i en sentido ordinario corresponde un A_e con respecto a $\bar{E}$; en efecto, si A' es el conjunto de los elementos de $\bar{E}$ que siguen a todos de A_i es $A_e = A'\,.\,E$ un anágeno respecto a $\bar{E}$.

En particular, si E es una estructura los anágenos que acabamos de definir proporcionan un método de « prolongación » de estructuras.

II. — La composición de anágenos

8. — *Definción.* — Llamemos « composición *e* » de dos conjuntos A, B, de una estructura, al conjunto C_e formado por todos los elementos de A, B y los posibles elementos de la forma ab donde $a \in A$, $b \in B$. En símbolos $C_e = A \overset{e}{-} B$.

Análogamente la « composición i » de A , B es el conjunto C_i formado por los elementos de $A + B$ y los elementos de la forma $a + b$, $a \varepsilon A$, $b \varepsilon B$; $C_i = A \overset{i}{-} B$.

La definición se extiende fácilmente a un número *finito* de conjuntos. Además es fácil ver que se verifica:

$$(A + B) \overset{e}{-} C = (A \overset{e}{-} C) + (B \overset{e}{-} C) \;\; ; \;\; (A + B) \overset{i}{-} C = (A \overset{i}{-} C) + (B \overset{i}{-} C).$$

Condición α. — Diremos que un espacio parcialmente ordenado verifica la condición α, o que es un espacio α, si la composición e de dos componentes e de anágenos del espacio es otro componente e de anágeno.

Como veremos esta condición es equivalente a la siguiente: la composición i de anágenos i es un anágeno i.

9. — Este capítulo lo dedicamos a las demostraciones de las siguientes propiedades:

1) Si A_e, B_e, C_e son componentes e de anágenos cualesquiera es

$$(A_e \times C_e) \overset{e}{-} (B_e \times C_e) = (A_e \overset{e}{-} B_e) \times C_e$$

1 a) Si A_i, B_i, C_i son anágenos i cualesquiera es

$$(A_i \overset{i}{-} B_i) \times C_i = (A_i \times C_i) \overset{i}{-} (B_i \times C_i).$$

2) Si A_e, B_e son anágenos e cualesquiera, $D = A_e \overset{e}{-} B_e$ y D_1 un anágeno e tal que $D_1 \leq D$, es $D_1 = A_1 \overset{e}{-} B_1$ donde A_1, B_1 son anágenos y $A_1 \leqq A$, $B_1 \leqq B$. Análogamente para los anágenos i.

3) Si A_e, $B_.$, C_e son anágenos e cualesquiera, de $A_e \overset{e}{-} C_e = B_e \overset{e}{-} C_e$, $A_e \times C_e = B_e \times C_e$ se deduce $A_e = B_e$. Análogamente para los componentes i.

4) Si el espacio verifica la condición α) y A_e, B_e, C_e son anágenos del mismo, es $(A_e \overset{e}{-} C_e) \times (B_e \overset{e}{-} C_e) = (A_e \times B_e) \overset{e}{-} C_e$, análogamente para los componentes de i.

5) En un espacio α la composición i de anágenos i es un anágeno i.

6) Los anágenos de un espacio α forman una estructura distributiva (*) y recíprocamente.

(*) Una structura es distributiva si se verifica la relación $(a + b)\,c = a\,c + b\,c$. Vea Clivenko, o. c.

Es muy importante hacer notar que 1), 2), 3) se verifican siempre, mientras que 4), 5), 6) suponen la condición α.

Sin embargo el objeto de este capítulo no es solamente el demostrar dichas propiedades, tanto más que utilizando las propiedades conocidas de las estructuras distributivas (*) las propiedades 4, 5, 6 pueden deducirse mucho más fácilmente de lo que hacemos acá. Pero como nuestras demostraciones se basan sobre un punto de vista muy diferente, o sea, sobre el de operaciones sobre conjuntos, ellas permiten extender todos estos resultados a conjuntos mucho más generales que los anágenos, lo que constituye precisamente el objeto de este capítulo.

TEOREMA I. — Los componentes e de un espacio cualquiera verifican la relación

$$(A \times C) \stackrel{e}{-} (B \times C) = C \times (B \stackrel{e}{-} A).$$

Demostración. — Sean

$$M_1 = A \times C \quad M_2 = B \times C \quad D = A \stackrel{e}{-} B \quad \Delta = M_1 \stackrel{e}{-} M_2 \quad M = D \times C \qquad [1]$$

se trata entonces de demostrar que $\Delta = M$. De la definición de la composición es fácil de ver que $\Delta < M$. Vamos a mostrar que $M < \Delta$.

Como $M_1 < A \quad M_2 < B$ podemos hacer

$$A' = A - M_1 \quad ; \quad B' = B - M_2 \qquad [2]$$

y tomando en cuenta [1] será

$$M = D \times C = (A \stackrel{e}{-} B) \times C = [(A' + M_1) \stackrel{e}{-} (B' + M_2)] \times C =$$
$$= [(A' \stackrel{e}{-} B') \times C] + [(A' \stackrel{e}{-} M_2) \times C] + [(M_1 \stackrel{e}{-} B') \times C] +$$
$$+ [(M_1 \stackrel{e}{-} M_2) \times C] \qquad [3]$$

Si $n \varepsilon M$ tiene que pertenecer n a uno de los cuatro sumandos de [3].

1) Si $n \varepsilon (A' \stackrel{e}{-} B') \times C$ es $n \varepsilon A' \stackrel{e}{-} B'$ luego o $n \varepsilon A'$ o $n \varepsilon B'$ o $n = a'.b'$, donde $a' \varepsilon A'$, $b' \varepsilon B'$. Las dos primeras posibilidades en

(*) Vea CLIVENKO u HOORE: *Algebra abstracta.*

virtud de [2] contradicen a $n \varepsilon C$. Si $n = a' b'$ será $a' \supset n$; como $n \varepsilon C$ será $a' \varepsilon C$, lo que contradice [2].

2) Si $n \varepsilon (A' \stackrel{e}{-} M_2) \times C$ es o $n \varepsilon A'$ o $n \varepsilon M_2$ o $n = a' . m_2$, donde $a' \varepsilon A'$ $m_2 \varepsilon M_2$. Como en [1] veremos que no puede ser ni $n \varepsilon A'$ ni $n = a' . m_2$, queda, pues, $n \varepsilon M_2$, y con más razón $n \varepsilon \Delta = M_1 \stackrel{e}{-} M_2$. *Luego en este caso* $n \varepsilon \Delta$.

3) y 4) Se verá, como en 1) y 2), que sólo es posible $n \varepsilon \Delta$; luego

$$\Delta > M \text{ l. q. d. d.}$$

Corolario. — Si A, B son anágenos $\stackrel{e}{-}$ de un espacio cualquiera, $D = A \stackrel{e}{-} B$ y D_1 un anágeno del espacio tal que $D_1 \leq D$, es $D_1 = A_1 \stackrel{e}{-} B_1$ donde A_1, B_1 son anágenos tales que $A_1 \leq A$ $B_1 \leq B$.

Demostración. — Como $D_1 \leq D$ se tiene

$$D_1 = D_1 \times D = D_1 \times (A \stackrel{e}{-} B)$$

y como D_1, A, B son anágenos,

es $$D_1 = D_1 \times (A \stackrel{e}{-} B) = (D_1 \times A) \stackrel{e}{-} (D_1 \times B) = A_1 \stackrel{e}{-} B_1$$

siendo $A_1 = A \times D_1$ $B_1 = B \times D_1$ anágenos por ser producto de anágenos.

De la misma manera se demuestran las propiedades enunciadas respecto a los anágenos i.

Teorema II. — Los componentes c de un espacio α verifican la relación

$$(A \stackrel{e}{-} C) \times (B \stackrel{e}{-} C) = C \stackrel{e}{-} (A \times B).$$

Demostración. — Sean

$$D_1 = A \stackrel{e}{-} C \; ; \; D_2 = B \stackrel{e}{-} C \; ; \; M = A \times B \quad W = D_1 \times D_2 \quad D = M \stackrel{e}{-} C \qquad [1]$$

Se trata de ver que $W = D$ para lo cual basta mostrar que $W < D$.

Haciendo $$A' = A - M \quad B' = B - M \qquad [2]$$
tenemos

$$W = [(A' \stackrel{e}{-} C) \times (B' \stackrel{e}{-} C)] + [(A' \stackrel{e}{-} C) \times (M \stackrel{e}{-} C)] +$$
$$+ [(M \stackrel{e}{-} C) \times (B' \stackrel{e}{-} C)] + [(M \stackrel{e}{-} C) \times (M \stackrel{e}{-} C)] \qquad [3]$$

Si $n \varepsilon W$ tiene que ser n de uno de los 4 sumandos de [3]. Si n es de los tres últimos sumandos es $n \varepsilon M \stackrel{e}{-} C$ o sea $n \varepsilon D$. Supongamos, pues, $n \varepsilon (A' \stackrel{e}{-} C) \times (B' \stackrel{e}{-} C)$. Entonces es

o a la vez $n \varepsilon A'$ $n \varepsilon C'$

o a la vez $n \varepsilon B'$ $n \varepsilon C$

o a la vez $n = a'.c$ $n = b'.c_1$ donde $a' \varepsilon B'$, $b' \varepsilon B'$, $c \varepsilon C$, $c, \varepsilon C$.

De estas posibilidades la tercera incluye a las otras dos. Supongamos, pues, $n = a'.c = b'.c_1$. Entonces $a' \supset n$, luego $a' \varepsilon W$, puesto que W es un anágeno e (*). Por lo tanto podemos aplicarle a a' los mismos razonamientos que a n, es decir que o $a' \varepsilon D$ o $a' = b_1' c_2$ donde $b_1' \varepsilon B'$ $c_2 \varepsilon C$. La segunda posibilidad da $b_1' \supset a'$ $b_1' \supset c_2$, luego $b_1' \varepsilon A$, lo que es una contradicción (2).

Luego queda $a' \varepsilon D$, y como $n = a'.c$ es $n \varepsilon D$ l. q. d. d.

Corolario. — Si $M = A \times B$ y $M_1 \geq M$ es $M_1 = A_1 \times B_1$ donde $A_1 \geq A$ y $B_1 \geq B$ y A, B son anágenos e de un espacio α.

Demostración. — En virtud del teorema se tiene

$$M_1 = M \stackrel{e}{-} M_1 = (A \times B) \stackrel{e}{-} M_1 = (A \stackrel{e}{-} M_1) \times (B \stackrel{e}{-} M_1) = A_1 \times B_1$$

si hacemos

$$A_1 = A \stackrel{e}{-} M_1 \geq A \ ; B_1 = B \stackrel{e}{-} M_1 \geq B.$$

Si A_e, B_e son anágenos e de generadores α, β, respectivamente, como se ha visto en el capítulo anterior es $A_e \times B_e$ un componente $\stackrel{e}{-}$ e cuyo generador es $\alpha + \beta$. Ahora si el espacio verifica la condición α) es $A_e \stackrel{e}{-} B_e$ también un componente e y, como es fácil de verlo, su generador es $\alpha\beta$; eso se ve inmediatamente, tomando en cuenta que el producto de los elementos de un componente e pertenece al mismo. Por lo tanto los teoremas precedentes pueden enunciarse así:

En un espacio α los generadores de anágenos verifican

$$(\alpha + \gamma)(\beta + \gamma) = \alpha . \beta + \gamma$$

$$\alpha . \gamma + \beta . \gamma = (\alpha + \beta) . \gamma$$

si $\mu = \alpha + \beta$ y $\mu_1 \subset \mu$ es $\mu_1 = \alpha_1 + \beta_1$ donde $\alpha_1 \subset \alpha$ $\beta_1 \subset \beta$.

(*) En virtud de la condición (α).

Es fácil de ver que esta última relación indica que la composición i de decomponentes i de anágenos de un espacio α es otro componente i de anágeno. Luego repitiendo los razonamientos de los teoremas I, II demostraremos sus tesis respectivas para la composición i y anágenos i.

De manera que los anágenos, o, lo que es lo mismo, los generadores de los anágenos de un espacio α forman una estructura « muy fuerte » y además distributiva. Recíprocamente, toda estructura fuerte y distributiva para ser isomorfa con la de sus anágenos es un espacio α.

Finalmente demostraremos el siguiente importante teorema.

TEOREMA III. — En un espacio cualquiera

para anágenos e: de $A \times C = B \times C \quad A \stackrel{e}{-} C = B \stackrel{e}{-} C$ se deduce $A = B$

para anágenos i: de $A \times C = B \times C \quad A \stackrel{i}{-} C = B \stackrel{i}{-} C$ se deduce $A = B$

Demostración. — Suponemos que A, B, C son componentes e y $M = A \times C = B \times C \quad \Delta = A \stackrel{e}{-} C = B \stackrel{e}{-} C$. Como $A < \Delta$ todo a de A pertenece a Δ. Pero $\Delta = B \stackrel{e}{-} C$ luego a o pertenece a B, o a C, o es $a = b\,c$, $b \varepsilon B$, $c \varepsilon C$.

1) Si $a \varepsilon C$ es $a \varepsilon M = A \times C = B \times C$, $a \varepsilon B$.

2) Si $a = b\,.\,c$ es $c > a$, $c \varepsilon A$, $c \varepsilon M = A \times C = B \times C$, $c \varepsilon B$

y como $a = b\,.\,c$ es $a \varepsilon B$.

De manera que en todos los casos $a \varepsilon B$ o sea $A < B$. Pero los mismos razonamientos sirven para ver que $B < A$ luego $A = B$ l. q. d. d.

Basándose en este teorema vamos a mostrar que hay estructuras de anágenos que no verifican la condición α). Para eso bastará ver que estas estructuras no verifican el teorema III. Consideremos, pues, el conjunto de los símbolos

$$(a_1\ ,\ a_2\ ,\ a_3)$$

donde a_1, a_2, a_3 son enteros ordinarios tales que

$$a_3^2 \equiv 0\ (md\ a_2).$$

Diremos que $(b_1,\ b_2,\ b_3)$ precede a $(a_1\ ,\ a_2\ ,\ a_3)$ cuando

$$a_1 \equiv 0\ (md\ b_1) \quad ; \quad a_1\,a_2 \equiv 0\ (md\ b_1\,b_2) \quad \text{y} \quad a_1\,a_3 \equiv b_1\,b_3\ (md\ b_2)$$

En vez de preceder vamos a decir divisor. Es fácil comprobar (lo dejamos a cargo del lector) que todo símbolo tiene un número finito de divisores no iguales y que todo par de símbolos admite un máximo común divisor. Luego en virtud del teorema V, Cap. I, el conjunto de los símbolos ya está completado. Sin embargo el teorema III no se cumple, así p. ej. haciendo

$$\alpha = (1, 9, 0) \quad \beta = (1, 9, 3) \ , \ \gamma = (1, 3, 0)$$

se verá fácilmente que el máximo divisor de α y γ y de β y γ es el mismo, o sea $\delta = (3, 3, 0)$, y el mínimo común múltiple de α *y* γ y β y γ es también el mismo:

$$\mu = (3, 1, 0);$$

sin embargo α y β no son iguales puesto que para que dos símbolos sean iguales es necesario que sea $a_1 = b_1$ $a_2 = b_2$ $a_3 \equiv b_3$ $(md\ a_2)$.

Otro ejemplo muy simple es el siguiente:

Dado un conjunto cualquiera consideremos todas las familias F de subconjuntos de este conjunto que verifican

a) Todo elemento del conjunto pertenece a algún subconjunto de F.

b) Dos subconjuntos de F no tienen elementos comunes.

Escribimos $F \subset F'$ cuando cada subconjunto de F está contenido en algún subconjunto de F'. Es fácil ver que las familias F forman una estructura « muy fuerte », y por lo tanto ya están completadas por los anágenos. Sin embargo no siempre tales estructuras son distributivas.

Así supongamos que el conjunto se compone de 3 elementos a, b, c.

Consideremos las tres familias

$$F_1 \{(a, b) ; (c)\} \qquad F_2 \{(a, c) ; (b)\} \qquad F_3 \{(a) ; (b, c)\}$$

entonces

$$F_1 + F_2 = \{(a, b, c)\} \text{ y } (F_1 + F_2) . F_3 = F_3 = \{a, (b, c)\}$$

mientras que

$$F_1 F_3 = \{(a) ; (b) ; (c)\} \ F_2 F_3 \{(a) ; (b) ; (c)\}$$

y

$$F_1 F_3 + F_2 F_3 = \{(a) ; (b) ; (c)\} \neq F_1 + F_2 . F_3 .$$

De estructuras de este tipo nos ocuparemos más detalladamente en el capítulo que sigue.

10. — Examinando la demostración dada del teorema II se verá que en ella sólo se utilizaron las siguientes propiedades de los anágenos e (i):

1) Si $a \in A_e (A_i)$ $a_1 \supset a$ $(a_1 \subset a)$ es $a_1 \in A_e (A_i)$
2) Si $a \in A_e$ $b \in A_e$ $(a, b \in A_i)$ es $a \cdot b \in A_e$ $(a + b \in A_i)$
3) La composición e (i) de anágenos es un anágeno.

La condición 3) equivale a la siguiente

3a) Si $d = a . b$ $d_1 \supset d$ existen $a_1 \supset a$ $b_1 \supset b$ tales que $d_1 = a_1 . b_1$ (Si $m = a + b$ $m_1 \subset m$ existen $a_1 \subset a$ $b_1 \subset b$ tales que $m_1 = a_1 + b_1$)

Además, de las propiedades de estructuras sólo se utilizaron las dos siguientes:

a) Si $a \supset b$ $b \supset c$ es $a \supset c$; *b*) Si $a . b = c$ es $a \supset c$
(Si $a \subset b$ $b \subset c$ es $a \subset c$) (Si $a + b = c$ es $a \subset c$).

Esta observación nos permite extender los resultados obtenidos de la siguiente manera:

Diremos que un conjunto parcialmente ordenado es un « *espacio base e* » cuando en él está definida una función uniforme o multiforme $D(a, b)$ que hace corresponder a todo par de elementos uno o infinitos elementos del conjunto y satisface a las dos siguientes condiciones:

I Si $D(a, b) = c$ es $a \supset c$ $b \supset c$
II Si $d = D(a, b)$ y $d_1 \supset d$ existen $a_1 \supset a$ $b_1 \supset b$ tales que $d_1 = D(a_1, b_1)$.

Acá $d = D(a, b)$ significa que d es uno de los valores que la función D hace corresponder al par a, b.

A todo espacio-base e hacemos corresponder anágenos e de esta base que son conjuntos A_e que verifican las siguientes dos condiciones:

A) Si $a \in A_e$ y $a_1 \supset a$ es $a_1 \in A_e$.
B) Si $a \in A_e$ $b \in A_e$ es $D(a, b) \in A_e$, donde $D(a, b)$ es cualquiera de las determinaciones de la función.

Diremos que un anágeno de la base precede a otro de la misma si lo contiene. En símbolos $A_e \supset A'_e$ si $A_e < A'_e$.

De II se deduce que la composición *e* de dos anágenos A_e, A'_e, o sea el conjunto formado por los elementos de A_e, A'_e y los posibles elementos de la forma $D(a, a')$ donde $a \in A_e$ $a' \in A'_e$, es un anágeno *e* de la base. Además el producto de dos o infinitos anágenos de la base es evidentemente un anágeno. Por lo tanto los anágenos forman una estructura muy fuerte (vea la nota del § 4), y además distributiva, puesto que las demostraciones de este capítulo son válidas para los anágenos *e* de la base, como lo hemos hecho observar.

De las subestructuras distributivas de la estructura de los anágenos de la base distinguimos la siguiente que llamaremos ***estructura asociada a la base***. Esta está definida de la manera siguiente: Consideremos el conjunto de los anágenos de la base tales que cada uno contiene un elemento que precede a todos los demás. Luego consideramos los posibles productos y composiciones de estos anágenos y de los anágenos resultantes. La estructura así obtenida sigue siendo distributiva y es la estructura que llamamos « asociada » a la base *e*.

Evidentemente que toda estructura distributiva es una base *e* si hacemos $D(a, b) = a.b$ y los anágenos de la estructura asociada a esta base son los anágenos de la estructura misma y recíprocamente, es decir que la estructura de la base es en este caso la estructura misma. Es decir que toda estructura distributiva es una estructura asociada a una base. Pero una estructura no distributiva no puede considerarse como asociada de una base haciendo $D(a, b) = a.b$, puesto que en este caso no se verifica la condición II.

En el capítulo siguiente vamos a mostrar que en toda estructura puede definirse la función D de modo que la estructura sea una base, y además de tal manera que si la estructura es distributiva la función D coincide con el producto de la misma (principio de permanencia).

Es evidente que de la misma manera se definen las bases *i* y se extienden a éstos todos los resultados precedentes.

(Concluirá)

SUR UN NOUVEAU RÉACTIF GÉNÉRAL DE LA FORME ÉNOLIQUE: LE NITRATE MERCUREUX. (IV) ÉTABLISSEMENT DU MECANISME DE LA RÉACTION

PAR

M. ENRIQUE V. ZAPPI ET MLLE. ALICE MANINI

RÉSUMÉ

La capacité de réduire a mercure métallique la solution de nitrate mercureux, qui possèdent les énols et d'autres substances avec des doubles liaisons actives, peut être expliquée par l'état d'équilibre dans lequel se trouvent les sels mercureuses, exprimé par l'équation:



$$(NO_3)_2Hg_2 \leftrightarrows Hg + (NO_3)_2Hg$$

Par son action mercurisante le nitrate mercurique donne lieu a la formation de complèxes peu solubles avec les énols et substances actives, ce qui provoque le déplacement de la réaction vers la droite, et la séparation de mercure métallique pour rétablir l'équilibre.

Nous avons annoncé dans des mémoires antérieures ([1-3]) que le nitrate mercureux est un réactif de la forme énolique, d'un caractère bien plus général que celui du chlorure férrique, étant capable de réveler aussi l'existence de pseudo-formes et de doubles liaisions actives qui échappent a l'investigation avec ce dernier réactif.

En résumant, notre observation fondamentale était, que les substances dont les molécules possèdent les fonctions énolique — C (OH) = CH —, imino alcool — C (OH) = NH, thioimino-alcool — C (SH) = NH, isonitrile = C = NH, isocyano et isothio-

([1]) ZAPPI E. V., *Anales Asoc. Quím. Argentina*, 1931, **19**; 199. *Bull. Soc. Chim. de France*, 1932, **51**; 54.

([2]) ZAPPI E. V. et A. T. WILLIAMS, *Anales Asoc. Quím. Argentina*, 1932, **20**; 147. *Bull. Soc. Chim. de France*, 1932, **51**; 1258.

([3]) ZAPPI E. V. et A. MANINI, *Anales Asoc. Quím. Argentina*, 1934, **22**; 21.

cyano, $O = C = H$ et $S = C = NH$, isonitro $R_2C = N \begin{smallmatrix} \diagup OH \\ \diagdown\!\!\diagdown O \end{smallmatrix}$, allylique $— CH_2 — CH = CH_2$ ou acétylenique $— C \equiv C —$, réduisent la solution de nitrate mercureux, en produisant la précipitación de mercure métallique très finement divisé.

Dans la présente mémoire nous donnons les résultats des études réalisés en vue d'établir les causes qui originent la précipitation du mercure des sels mercureuses et tachons d'établir une interprétation du mécanisme de cette réaction des énols.

Notre première observation donnà lieu a d'autres travaux de comprobation et de interprétation, dont quelques uns ont porté leurs auteurs a des conclusions imprévues.

Dansi et Sempronj (4) ont étendu ses investigations a d'autres substances et trouvèrent des rèsultats qui s'accordent avec la spécifité de nôtre réactif.

La méthyl-éthylcetone, la méthyl-nonylcetone, la méthyl heptènone, capables de prendre la forme énolique le réduisent immédiatement a mercure métallique.

D'autres cétones, telles que la méthyl-acétophénone et la propylphenone, originent aussi une réduction, tout en passant par des composés intermédiaires de couleur jaune qui après un chauffage très lèger produisent du mercure métallique.

Etant donnée la rapidité de sa décomposition, ces corps jaunes n'ont pu être analysés, mais les auteurs ont constaté qui ne sont pas des nitrates basiques; qu'ils contiennent de la matière organique; qui réagissent comme des composés mercureux et que par l'action de la chaleur ils se décomposent en dégageant des gas niteux.

Parmi les nitriles, Dansi et Sempronj ont trouvé que le benzonitrile ni le p-nitro-benzonitrile ni l'acétonitrile, preparé avec de l'acétamide, n'ont pas d'action sur le nitrate mercureux, tandis que l'acétonitrile preparé avec du sulphate de méthyle et cyanure de potasium, et qui contienne par celà des petites quantités de méthyl carbylamine, est réducteur.

Ils résument leurs observations en disant que le « reactif de Zappi » est d'un emploi facile et complètement général.

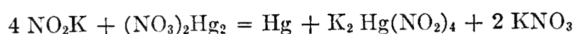
Sarkar et Ray (5) ont noté que les solutions des formiates alcalins réduisent la solution de nitrate mercureux, tandis que l'acide formique ou les formiates alkyliques ne le font pas. En partant de ce

(4) DANSI A. et A. SEMPRONJ, *Gazz. Chim. Ital.*, 1933, **63**; 560.
(5) SARKAR P. B. et B. C. RAY, *Nature London*, 1936, t. 137; p. 495.

phénomène ils tirent des conséquences intéressantes sur la structure électronique de l'acide formique, études qui ont donné naissance a plusieurs travaux physico-chimiques sur la même question (6).

Fialkow (7) attribue la réduction des sels mercureuses par les sulfocyanates a la facilité qui possède l'ion sulfocyanique pour former des complèxcs avec le sels mercuriques, occasionnant de cette manière la séparation de mercure métallique. Il étudia la décomposition du chlorure, bromure, iodure, acétate, sulfate, et benzoate mercureux et trouva que dans tous les cas il y a précipitation de la moltié du mercure contenu dans le sel mercureux.

Une conclusion analogue est annoncée par Abbeg et Pick (8) comme résultat de ses études sur la décomposition du nitrate mercureux par le nitrite de potasium, laquelle répond a l'équation:



$$4\,NO_2K + (NO_3)_2Hg_2 = Hg + K_2\,Hg(NO_2)_4 + 2\,KNO_3$$

Plus récemment Tananaeff et Ostroshinskaja (9) suivèrent quantitativement la réaction antérieure sur le nitrate, sulfate et acetate mercureux et démontrèrent qu'elle peut être représentée toujours par l'égalité:



$$2\,Hg^{-} = Hg + Hg^{--}$$

Cette disproportion a été dejà signalé, il y a beaucoup de temps par M. Lang (10) lequel après avoir ajouté de la pyridine a une solution de nitrate mercureux nota que simultanément avec une séparation de mercure métallique le liquide perdaït ses réactions mercureuses pour ne presenter plus que celles mercuriques.

Selon Abel (11) le mercure, dans les solutions mercureuses, se trouve en équilibre parmi ses divers degrés d'oxydation, ce qui

(6) Ray S. K., *Journ. Indian Chem. Soc.*, 1936, t. 13; p. 484. - Seshadri T. S., *Current Science*, 1936, t. 4; p. 650 et 812. - Wheelter T. S., Idem, ídem, p. 650; 1936, t. 5; p. 17. - Small P. A. et H. Wolfenden, *Journ. Chem. Soc. London*, 1936, p. 1811. - Madhusudanan P. K., *Journ. Indian Chem. Soc.*, 1937, t. 14; p. 172.

(7) Fialkow J., *Communication privée et après en Zeitschr. anorg. allgem., Chemie*, t. 205; p. 235.

(8) Abegg R. et H. Pick, *Zeitschr. anorg. allgem. Chem.*, 1906, t. 51; p. 20.

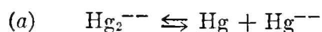
(9) Tananaeff N. A. et G. I. Ostroshinskaja, *Ukrain. Chem. Journ.*, 1930, t. 5; p. 67. *Chem Zentr.*, 1930, t. 2; 1581.

(10) Lang, *Ber. D. Ch. G.*, 1888, t. 21; p. 1578.

(11) Abel E., *Zeitschr. anorg. allgem. Chem.*, 1901, t. 26; p. 361.

explique la tendence des composés mercureux a se dédoubler en mercure et sel mercurique, dès que les conditions sont favorables.

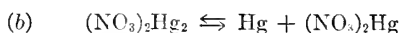
Dans le traité d'Abegg ([12]) cet équilibre est representé ioniquement par l'équation:



$$(a) \qquad Hg_2^{--} \leftrightarrows Hg + Hg^{--}$$

en signalant que la réaction peut se déplacer vers la droite lorsque l'ion Hg^{--} est introduit dans un complèxe suffisamment insoluble, ce qui détermine la précipitation de mercure métallique.

Par analogie avec les faits signalés, nous pensons que la solution de nitrate mercureux est dissociée selon:



$$(b) \qquad (NO_3)_2Hg_2 \leftrightarrows Hg + (NO_3)_2Hg$$

et que la réaction des énols et d'autres substances actives provient de sa combination avec le nitrate mercurique, formant un complèxe, ce qui dérange l'équilibre et donne lieu à une separation de mercure finement divisé.

Dans cette mémoire nous presentons les données expérimentales qui semblent confiimer nôtre hypothèse.

Parte expérimentale

Pour établir la posibilité de nôtre interprétation de la réaction des énols avec le nitrate mercureux nous avons observé les variations qui subit la concentration de l'ion mercureux après sa réaction sur des quantités molaires de substances actives, récueillant et pésant simultanément le mercure qui se dépose dans chaque opération.

Les complèxes formés par l'alcool allylique et la pyridine, en réagissant sur le nitrate mercureux ont été isolés et comparés avec ceux qui se forment avec le nitrate mercurique.

Effets de l'adition de 1 mol. d'énol ou de substance active à une solution de nitrate mercureux. — Cettes réactions furent établies en versant 0,01 mol. d'acétylacétate d'ethyle, a'alcool allylique ou de pyridine, dissous dans 5 cc. d'alcool, dans 50 cc. d'une solution de

([12]) Abegg R. et F. Auerbach, *Handbuch der anorganischen Chemie*. Leipzig 1905, t. 2; p. 599.

nitrate mercureux, preparée selon (1), et dont la concentration initiale correspondait a 14,8 g. de mercure dans 100 cc.

Quelques minutes après, lorsque le liquide est bien limpide, on le filtre en récueillant le mercure precipité sur un filtre double, lavant avec de l'acide acétique (1 %) jusqu'à disparition de réaction mercureuse, puis avec de l'alcool et de l'éther.

On séche sur de la potasse caustique dans un exsiccateur qui contient un vase avec quelques globules de mercure et on pèse 24 heure après.

Sur une partie aliquote du liquide filtré on détermine la concentration residuelle de l'ion mercureux, en précipitant avec un excés de chlorure de sodium [13] et exprimant le résultat comme du mercure métallique.

Les tableaux I, II et III présentent les données dans la forme suivante:

La première colonne indique la concentration primitive de la solution mercureuse expresée en grammes de mercure; la deuxième, donne la concentration après avoir adjouté a la solution 0,01 mol. de substance active. La troisième porte la différence trouvée entre les deux chiffres antérieures, et la quatrième colonne est le poids du mercure métallique recueillé dans chaque opération.

TABLEAU I. — *Action de* 0,01 *mol. d'ester acetylacétique* (*gr.* 1,3) *sur* 50 *cc. d'une solution de nitrate mercureux*

Concentration en Hg			Poids du Hg précipité
Initiale	Finale	Différence	
7,410	5,308	2,102	1,099
7,410	5,405	2,005	0,996
7,410	5,357	2,053	1,040
7,410	5,340	2,070	0,965
7,410	5,315	2,095	1,168
7,410	5,310	2,100	1,163
7,410	5,489	1,921	0,914
	Moyenne	2,049	1,049

(13) TREADWELL F. P., *Trattato di Chimica Analitica*, 1ère. ed. italienne, Vallardi, Milano, t. 2; p. 127.

TABLEAU II. — *Action de* 0,01 *mol. d'alcool allylique* (*gr.* 0,58) *sur* 50 *cc. d'une solution de nitrate mercureux*

Concentration en Hg			Poids du Hg précipité
Initiale	Finale	Différence	
7,410	5,316	2,094	1,038
7,410	5,349	2,061	1,063
7,410	5,406	2,004	1,009
	Moyenne	2,053	1,036

TABLEAU III. — *Action de* 0,01 *mol. de pyridine* (*gr.* 0,79) *sur* 50 *cc. d'une solution de nitrate mercureux*

Concentration en Hg			Poids du Hg précipité
Initiale	Finale	Différence	
7,410	5,412	1,998	0,990
7,410	5,392	2,018	0,994
7,410	5,478	1,932	0,956
	Moyenne	1,982	0,980

Action comparée des nitrates mercureux et mercurique sur la même substance active. — La précipitation de mercure observée quand on laisse agir les substances a forme énolique ou active sur les solutions de nitrate mercureux, est souvent accompagnée par la formation d'un complèxe mercuriel.

Nous avons taché d'isoler ces composés mais, malheureusement, dans beaucoup de cas il a été impossible de les purifier étant donnée leur insolubilité ou parce qu'ils continuaient a déposer du mercure après leur cristallisation.

Ce n'est que l'alcool allylique ou la pyridine qui se prètent bien a l'obtention de composés mercuriels purs, et nous les avons utilisés pour baser nos conclusions.

Action du nitrate mercureux sur l'alcool allylique. — Sur 50 cc. de la solution de nitrate mercureux nous avons versé 10 cc. d'alcool allylique dissous dans 30 cc. d'alcool ordinaire. On observe la sé

paration instantanée de mercure métallique, et on filtre maintes fois jusqu'a obtention d'un liquide limpide dans lequel commence a ce former un precipité.

Lavé a l'alcool et seché a l'air il forme des écailles blanches cristallines.

Analyse. — Dosage du mercure comme HgS.

A peu près 0,2 g. de substance sont traités par 20 cc. d'acide chlorhydrique concentré, 0,5 gr. de chlorate de potassium et évaporés lentement a siccité. On dilue avec de l'acide chlorhydrique dilué 1/10 et précipite avec de l'hydrogène sulfuré.

Le precipité est filtré, lavé; seché a 100-105° et pesé.

Substance, g. 0,2322	; HgS, g. 0,1695	; Trouvé Hg % 62,925
Substance, g. 0,2681	; HgS, g. 0,1948	; Trouvé Hg % 62,635
Substance, g. 0,2185	; HgS, g. 0,1597	; Trouvé Hg % 63,005
Substance, g. 0,2408	; HgS, g. 0,1757	; Trouvé Hg % 62,899
	Moyenne	; Trouvé Hg % 62,866

Le composé possède un aspect cristallin; sa solution dans l'acide sulfurique dilué n'absorbe pas du brome et donne un precipité blanc avec de l'acide chlorhydrique.

Il est soluble dans l'eau bouillante, d'ou récristallise par réffroidissement.

Les cristaux sechés sur acide sulfurique et a l'obscurité ont donné a l'analyse.

Analyse. — Dosage du mercure comme HgS.

Substance, g. 0,2162	; HgS, g. 0,1718	; Trouvé Hg % 68,484
Substance, g. 0,2211	; HgS, g. 0,1752	; Trouvé Hg % 68,308
	Moyenne	; Trouvé Hg % 68,396

Action du nitrate mercurique sur l'alcool allylique. — Dans 25 cc. d'une solution de nitrate mercurique d'une concentration égale a celle du nitrate mercureux employée dans ce travail, on verse 5 cc. d'alcool allylique dissous dans cc. 15 d'alcool éthylique.

Il ne se forme pas de mercure dans cette réaction et le composé mercuriel cristalise tout directement. Après deux heures on filtre, lave et sèche.

Analyse. — Dosage du mercure comme HgS.

Substance, g. 0,2124 ; HgS, g. 0,1564 ; Trouvé Hg % 63,47
Substance, g. 0,1817 ; HgS, g. 0,1323 ; Trouvé Hg % 62,76

Moyenne ; Trouvé Hg % 63,12

Action du nitrate mercureux sur la pyridine. — Dans cc. 10 de la solution de nitrate mercureux on verse cc. 5 de pyridine dissoute dans 10 cc. d'alcool. Après una heure on filtre pour séparer le mercure précipité; le liquide clair est additionné de cc. 10 d'alcool est laissé cristalliser pendant 24 heures.

Le composé est lavé a l'alcool et seché sur plaque.

Analyse. — Dosage de mercure comme HgS.

Substance, 0,2196 g. ; HgS, g. 0,1027 ; Trouvé Hg % 40,35
Substance, 0,2217 g. ; HgS, g. 0,1030 ; Trouvé Hg % 40,04

Récristallisé dans l'eau chaude, lavé a l'alcool et seché sur l'acide sulfurique il constitue des cristaux blancs. P. F. 246-248°.

Analyse. — Dosage du mercure comme HgS, selon la méthode antérieure.

Substance, g. 0,2136 ; HgS, g. 0,1020 ; Trouvé Hg % 41,16
Calculé pour 2 $C_5H_5N.H\ (NO_3)_2$ Hg % 41,56

Action du nitrate mercurique sur la pyridine. — On verse cc. 5 de pyridine dissoute dans cc. 10 d'alcool, dans cc. 25 d'une solution de nitrate mercurique a égale concentration que celle mercureuse employée. Il se forme inmédiatement un précipité blanc cristallisé, sans séparation de mercure.

Après demie-heure on filtre, lave a l'alcool et sèche a l'air. Cristaux blancs solubles dans l'eau chaude.

Analyse. — Dosage du mercure comme HgS.

Substance, g. 0,1443 ; HgS, g. 0,0635 ; Trouvé Hg % 37,92
Calculé pour 2 $C_5H_5N.Hg\ (NO_3)\ 2H_2O$ Hg % 38,68

Le composé récristallisé dans l'eau, et seché sur l'acide sulfurique, forme des cristaux blancs. P. F. 246-248°.

Analyse. — Dosage du mercure comme HgS.

Substance, g. 0,2157 ; HgS, g. 0,1030 ; Trouvé Hg % 41,15
Calculé pour 2 $C_5H_5N.Hg(NO_3)_2$ Hg % 41,56

Discussion

L'inéstabilité caractéristique des sels mercureuses peut être expliquée en considérant leur état de dissociation expresé par les équations (*a*) ou (*b*).

Maintes, causes peuvent rompre l'état d'équilibre et déplacer la reaction vers la droite, telles l'action de la lumière, d'une chaleur légère et jusque la simple action d'un dissolvent.

François indiqua la décomposition subie par l'iodure mercureux [14] lors de sa dissolution dans l'alcool, le phenol ou l'aniline, avec séparation de mercure.

Le chlorure mercureux est décomposé par ébullition avec de l'eau ou alcool [15] ainsi que le formiate ou l'acétate mercureux das les mêmes conditions [16].

Les solutions de nitrate mercureux chauffées a l'ébullition dégagent du mercure qui se volatilise et peut être condensé dans la vapeur distillée.

Cette curieuse propriété qui semble avoir être indiquée par Proust dès 1816 et qui ne figure pas dans les traités modernes, a été demontré de nouveau par Hada [17] lequel soutient qu'une décomposition analogue se produit même a froid, quand l'on dissout le nitrate mercureux pur dans l'eau.

Les solutions concentrées d'iodure de potassium, des chlorure alcalins et d'acide chlorhydrique a l'ébullition produissent aussi une séparation partiale du mercure des sels mercureuses [18].

D'une manière semblable agissent les solutions des cyanures ou d'acide cyanhydrique [19].

(14) François, *Compt. rend. Acad. Sciences*, 1895, t. 121; p. 253.

(15) Schmidt E., *Lehrbuch der pharmazeut Chemie*, 1919; p. 1186.

(16) Gmelin-Kraut, *Handbuch der anorganischen Chemie*, 1912, t. 5; p. 826.

(17) Hada, *Journ. Chem. Soc. London*, 1896, t. 69; p. 1667.

(18) Wentzki, *Zeitschr. angew. Chemie*, 1905, t. 18; p. 696. - Richards T. W. et E. H. Archibald, *Zeitschr. phys. Chem.*, 1902, t. 40; p. 385. - Fialkow J. et N. Tschownik, *Zeitschr. anorg. allg. Chemie.*, 1934, t. 219; p. 382.

(19) Jahn Fr., *Lieb. Ann.* 1837, t. 21; p. 149. - Wollschlaeger E., *Chem. Zentr.*, 1912, t. 2; p. 741, 1687. - Gmelin-Kraut, *Handbuch d. anorganischen Chemie*, 1912, t. 5; p. 347, 439, 641. - Zappi E. V. et A. Manini, *Anal. Asoc. Chim. Argentina*, 1934, t. 22; p. 21. - Clark R., *Journ. Chem. Soc. London*, 1936; p. 1050.

Les sulfocyanates (7 et 20), nitrites (8, 9 et 21), sulfites ([22]), ammoniaque ([23]); les amines et aminoacides (10, 14 et 24); les alcaloïdes ([25]) aussi provoquent le dédoublement des sels mercureuses dans mercure et sels mercuriques, et dans tous ces cas avec formation de complèxes mercuriels.

Les sels mercuriques jouissent extensivement, de la propriété de remplacer des hydrogènes dans les composés aliphatiques ou aromatiques par du mercure, ou de s'additionner sur les doubles ou triples liaisons, des sels complèxes; propriétés découvertes et étudiées par O. Dimroth et K. A. Hofmann et bien d'autres chimistes ([26]).

L'introduction directe du mercure dans les substances organiques possède un caractère si general qu'il a été designé par le terme « mercuration » analoguement a ceux sulfonation, nitration ou halogénation.

Dès que les solutions de nitrate mercureux contiennent du nitrate mercurique, c'est possible sa fixation sur les doubles liaisons énoliques ou actives pour donner un complèxe peu soluble.

En conséquence l'equilibre initial:



$$(NO_3)_2\,Hg \leftrightarrows Hg + (NO_3)_2Hg$$

serà troublé et pour le rétablir une certaine quantité de mercure devra se séparer.

Les conséquences d'une telle hypothèse seraient les suivantes:

1ère. — Pour chaque atome gramme de mercure qui se trouve sépare, 2 at. gr. de sel mercureux doivent disparaitre de la solution.

([20]) POLLACCI E., *Chem. Zentr.*, 1904, t. 1; p. 1070. Idem t. 2; p. 478. Idem 1908, t. 1; 1576. - GROSSMANN H., *Zeitschr. Electrochem.*, 1903, t. 9; p. 736. *Zeitschr. Anorg. Chem.*, 1905, t. 43; p. 356.

([21]) LANG R., *Journ. pratc. Chem.*, 1862, t. 68; p. 295. - GMELIN-KRAUT'S, *Handbuch*, 1912, t. 5; p. 637.

([22]) GMELIN-KRAUT'S, *Handbuch*, 1912, t. 5; p. 638.

([23]) KANE R., *Lieb. Ann.*, 1836, t. 18; p. 298. - Voyez aussi la blibliographie citée dans GLEDITSCH E. et TH. F. EGIDIUS, *Zeitschr. anorg. allg. Chem.*, 1936, t. 226; p. 265.

([24]) GROSSMANN H., *Ber. d. Chem. G.*, 1904, t. 371; p. 1253. - HOUBEN, *Die Methoden der organischen Chemie*, Leipzig, 1924, t. 4; p. 562.

([25]) ZWIKKER J., *Chem. Zentr.*, 1934, t. 1; 1360.

([26]) Voyez: F. C. WHITMORE, *Organic Compounds of Mercury*, New York, 1921. - E. KRAUSE et A. VON GROSSE, *Die Chemie der metall-organischen Verbindungen*, Berlín 1937.

2ème. — Il doit se former un complèxe mercuriel avec l'ion mercurique présent.

3ème. — Si la formation du complèxe est due a l'ion mercurique présent dans la solution mercureuse, on devra obténir le même complèxe mercuriel tout en employant indifféremment des solutions mercureuses ou mercuriques.

L'observation et la comparation des chiffres presentées dans les tableaux I, II et III, démontre que le poids du mercure mercureux, disparu de la solution et celui du mercure métallique récouvré sont dans tous cas dans une rélation très approchée, comme 2 à 1.

En considérant que l'atome gramme de Hg = 200,6, nous pouvons bien dire que l'addition de 2 mols. d'une substance active a une solution mercureuse produit la diminution de 2 at. gr. de Hg mercureux, dont 1 at. gr. de Hg est récuperé a l'etat métallique et l'autre reste en solution comme ion ou combinaison mercurique.

Ainsi croyons nous démontrée l'éxactitude de la première conséquence.

La deuxième est évidente, parce que dans la plupart des réactions citées dans la littérature chimique ou dans celles effectuées par nous, il y a formation de complèxes mercuriels peu solubles et difficiles a purifier.

Seulement l'alcool allylique et la pyridine déposent des cristaux blancs de composés qui peuvent être analysés.

Finalèment. nous avons demontré que les mêmes complèxes ont été formés lorsque l'alcool allylique ou la pyridine agissent tant sur le nitrate mercureux que sur le mercurique.

En effet le composé de l'alcool allylique formé avec du nitrate mercureux, contient 62,9 et 68,42 % de mercure avant et après sa récristallisation.

Celui preparé du nitrate mercurique contient 63,1 et 68,6 % de Hg dans les mêmes circunstances.

Les composés de la pyridine avec les nitrates mercureux ou mercuriques donnent 41,16 et 41,15 % de mercure respectivement et ont le même point de fusion.

Cette quantité de mercure correspond a une substance de formule $2\ C_5H_5N.Hg\ (NO_3)_2$.

Dans le Beilstein (27) figure une combinaison isolé par Pesci: $2\ C_5H_5N.Hg\ (NO_3)_2.2\ H_2O$, dont le contenu en Hg = 38,68 %,

(27) *Beilstein's Handbuch der organischen Chemie*, 3 Auf. 1899, t. 4; p. 107.

s'approche a celle du premier produit que nous avons isolé dans la réaction avec le nitrate mercurique.

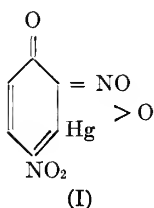
Les composés a 41,16 et 41,15 % de Hg seraient les produits de la deshydratation de ce dernier.

Ils semblent être idéntiques et confirmeraient notre hypothèse qui les atribue une origine commune a partir du nitrate mercurique présent dans les deux réactifs.

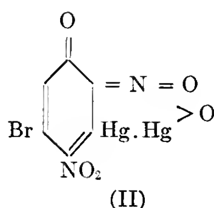
Un'autre façon d'éxpliquer les causes de la réaction est celle proposée par Mm. Dansi et Sempronj ([4]) consistant en admettre la formation intermédiaire d'un composé mercureux instable qui rapidement se dédoublerait dans mercure et composé mercurique.

En réalité ces auteurs fondent leur opinion sur la manière dont le nitrate mercureux réagit sur le picrate de potassium et sur le bromo-5-dinitro-2-4-phénate de potassium.

Dans le premier cas le réactif agit tout simplement en mercurisant la molécule et il se produit une substance jaune qui a été identifiée avec l'anhydride (I) dejà preparé par Hantzsch ([28]) lors de l'action de l'acide picrique sur l'oxyde mercure en milieu aqueux.



(I)



(II)

Dans l'autre réaction etudiée, ils obtinrent un composé qui donne les réactions des sels mercureuses et qui est réduit inmmediatement a mercure métallique par l'acétylacétate d'éthyle.

Par analogie avec les cas precédent ils assignèrent a ce composé la structure (II).

Dans les réactions effectuées avec d'autres nitrophénates ils constatèrent la formation de substances impures, en chemin de se réduire, et donnant aussi les réactions des composés mercureux, ce qui constitue pour Mm. Dansi et Sempronj une confirmation de leur hypothèse.

Sans avancer une opinion sur cette façon d'expliquer la réaction des enols sur le nitrate mercureux, nous dirons que dans toute la bibliographie consultée il n'est pas fait mention de complèxes mercu-

([28]) Hantzsch, *Ber. d. chem. G.*, 1907, t. 40; p. 330.

reux, et qui pendant le cours de nos travaux ils n'ont pas été observés du tout.

Cependant, la difficulté géneralèment eprouvée dans la purification des composés mercuriels obténus au cours des réactions essayées, pourrait être bien un indice de la présence de complèxes mercureux instables et en voie de se décomposer.

Nous tacherons d'éclairer cette question dans une prochaine communication.

Facultad de Quimica y Farmacia
La Plata (Argentina)

UN LEPIDÓPTERO NUEVO QUE PERJUDICA EL NÍSPERO EN LA ARGENTINA

(Familia **Gelechiidae**)

POR

AUGUST BUSCK
Bureau of Entomology and Plant Quarantine,
United States Department of Agriculture

La siguiente descripción de una nueva especie de lepidóptero que perjudica la fruta del níspero en la República Argentina, me fué solicitada por el entomólogo Everard E. Blanchard de la División de Zoología Agrícola, del Ministerio de Agricultura de Buenos Aires.

Proclesis eriobotryae, nueva especie

Cara y cabeza de color amarillo claro, lisas. Palpo labial muy largo y delgado; el segundo segmento llega al vértice, liso, apenas engrosado con escamas, amarillo claro; segmento apical largo, pero más corto que el segundo, delgado, amarillo claro, escasamente salpicado con moreno en el lado externo, ápice agudo. Palpo maxilar corto, pero distinto, amarillo claro. Trompa larga, formando espiral con escamas amarillas en la base. Antena 3/4, moreno rojizo claro; segmento basal sin peine. Tórax amarillo claro. Ala anterior amarillo claro, con las partes siguientes moreno rojizo oscuro: borde costal desde la base hasta el ápice, ápice, borde terminal y cilias; una primera mancha discal grande en el medio del ala, a veces confluyente con la raya costal; y una segunda mancha discal más pequeña en la extremidad de la célula, débilmente unida al borde dorsal moreno apagado por medio de una raya morena angosta. Todos estos dibujos morenos se borran fácilmente y se encuentran débiles en los adultos después del vuelo en los que el color amarillo del fondo predomina. Ala posterior ocráceo-blanquecina. Abdomen y patas claros ocráceos.

Nervulación típica del género (Fig. 3): ala anterior con todas las nervaduras; 2, 3, 4 y 5 casi equidistantes; 6 aproximada a la 7; 7 y 8 pecioladas a la costa; 9 nace de la base del pecíolo. Ala posterior con 7 nervaduras; 5 ausente; 3 y 4 pecioladas; 6 y 7 pecioladas.

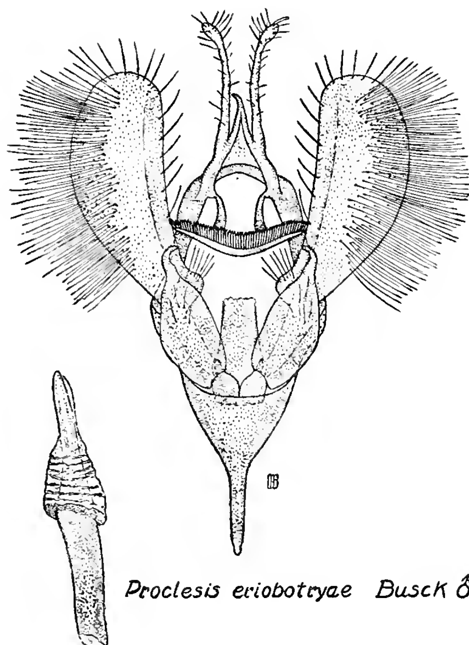


Fig. 1

Genitalia del macho típico del género (Fig. 1). Uncus débil, alargado, cónico, agudo. Socii muy alargados, filamentos delgados con ápices engrosados. Gnathos muy grande y prominente, con numerosos dientes en forma de rastrillo o peine transverso. Harpe dividido, parte superior más grande, espatulada, peludo y con los bordes engrosados; parte inferior fuertemente esclerotizada, terminando en una espina fuerte encurvada. Vinculum ancho, con borde engrosado y con apéndice largo anterior. Edego (*aedeagus*) casi recto, un poco ensanchado en el medio y con punta obtusa.

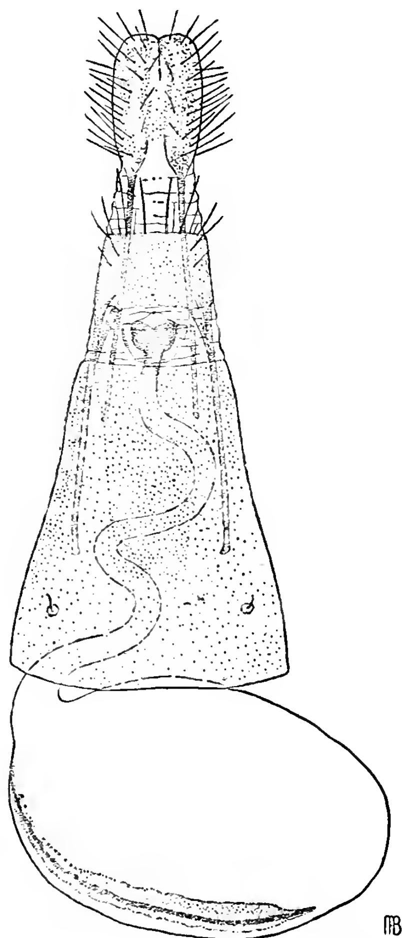
Genitalia de la hembra con el ostio (*ostium*) acopado y el extremo posterior del ductus bursae fuertemente esclerotizado; ductus largo; bursa ovalada, con signum angosto, fino y microespinoso, que casi alcanza el largo de la bursa.

Cada segmento abdominal con numerosas espinas antero-dorsales. Envergadura alar, 16-20 mm.

Tipo: U. S. National Museum, Nº 53116.

Localidad típica: Tucumán. Argentina.

Planta huésped: *Eriobotrya japonica*, LINDL.



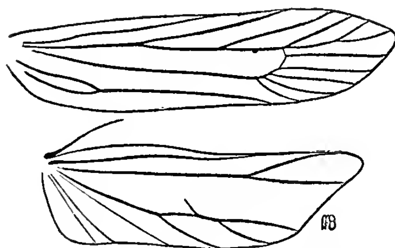
Proclesis eriobotryae Busck ♀

FIG. 2

Descripta de una serie de numerosos adultos criados por el Ing. Enrique F. Schultz de la fruta de nísperos en la Estación Experimental Agrícola de Tucumán, quien observa « que aunque en años anteriores esta plaga pasó inadvertida, había sido bastante abun-

dante durante la última estación (1938)». Las larvas se alimentan dentro de la fruta.

La especie presenta mucha similitud de tamaño y coloración con el tipo del género *Proclesis xanthoselene*, Walsingham, (Biologia Centrali Americana, vol. 4, p. 83, pl. 3, fig. 4, 1911), pero se separa fácilmente por los detalles de los dibujos y por la genitalia de ambos sexos. Las alas anteriores no presentan las escamas azul metálicascas de la especie de Walsingham y el ápice y borde terminal del ala son obscuros, contrastando con el ápice amarillo brillante del ápice alar de *P. xanthoselene*.



Proclesis eriobotryae Busck ♂

FIG. 3

La *P. xanthoselene* se alimenta de *Cassia grandis* en Panamá.

Meyrick (Genera Insectorum, Fasc. 184, 1925) colocó el género *Proclesis* como sinonimia de *Deoclona*, Busck, tipo *D. yuccasella* Busck (Proc. U. S. Nat. Mus., vol. 25, p. 837, pl. 30, figs. 24 y 24 bis, 1903), cuyas larvas se alimentan dentro de las cápsulas de semillas de la Yuca en la parte sudoeste de los Estados Unidos; pero aunque los dos géneros se hallan sin duda estrechamente vinculados, es preferible mantenerlos separados por las diferencias, tanto en los caracteres pterogósticos como de genitalia. La nervadura 9 del ala anterior de *Deoclona* se halla libre y no sale del peciolo de la 7 y 8, y el segmento apical del palpo labial es mucho más corto que en el género *Proclesis*.

El autor desea expresar aquí su sincero agradecimiento al entomólogo Everard E. Blanchard por haberle confiado material tan interesante y por la traducción al castellano de la descripción.

También agradece a la Sra. Foley Benson del Bureau of Entomology and Plant Quarantine, United States Department of Agri-

culture, por los excelentes dibujos de la nervulación alar y de la genitalia.

Summary

The author describes a new species of lepidopteron, *Proclesis eriobotryae*, n. sp., from Argentina, that damages the fruit of loquats (*Eriobotrya japonica*, Lindl.) in the province of Tucumán, where it was first noticed in 1938. The new species resembles *Proclesis xanthoselene*, Walsingham in size and colouring, but may be easily separated by the genitalia and details of the wing pattern. Meyrick sank *Proclesis* under *Deoclona*, Busck in 1925, but the author feels justified in retaining *Proclesis* on differences in genitalia and pterogostic characters.

SOBRE LAS INVASIONES DE AIRE POLAR

POR

EMILIO L. DIAZ

SUMARY

The autor is trying to investigate the caues producing the polar air sweeping on Argentina, and its mechanisme.

The results found are: it seems to be a augmentation of velocity of the air mass rising on tropical zones, then travelling in the inner of the stratosphere, doing, during its pass by the levels aloft the oceanic anticyclons of midle latitudes. a extension of the warmer air, southward. When the polar air masses increases its energy by the arrive of the travelling upper air; it wold originate the « cyclons train », and following that « train », the polar air will sweep the Argentine territory.

The factor cóntrolling that circulation seems to be the solar radiation.

The lag of making phenomena, is about 20 days; with a first solar radiation maximum 12 days before the « Sweeping », followed by the stratospheric wind maximum 1 day after.

The hipotesis explained conects the results got by the dinstics observers.

El presente trabajo fué emprendido con el objeto de tratar de investigar la génesis y mecanismo, que produce la invasión de las masas de aire polar sobre nuestro país; el procedimiento seguido consistió en determinar las fechas de iniciación del fenómeno considerado (« escobazo » de aire polar) y establecer a partir de ese momento, hacia atrás y hacia adelante, la evolución de las variables meteorológicas.

Se determinaron todas las fechas de comienzo de invasión de aire polar a la Patagonia, desde el 1º de Enero de 1936, al 30 de Junio de 1937; ocasionalmente se fijaron las fechas análogas, para Junio, Julio y Agosto de 1935; Agosto, Septiembre y Octubre de 1937; y Julio, Agosto y Septiembre de 1938; con el objeto de analizar los datos de los sondajes estratosféricos realizados en Omaha (EE. UU.), a fin de ligar la invasión del aire polar con la circulación de altas capas de la Atmósfera.

Los factores empleados en este trabajo fueron:

Radiación solar.

Temperatura en Panamá. (Lat. 12° N.).

Viento a 6.000 mts. de altura en Omaha (EE. UU.), dirección media NNW. (Lat. 41° N.).

Viento a 12.000 mts. de altura en Omaha (EE. UU.), dirección media WNW.

Viento a 22.000 mts. de altura en Omaha (EE. UU.), dirección media E.

Presión atmosférica en Villa Mercedes (Argentina) (Lat. 34° S.).

Presión atmosférica en Río Gallegos (Argentina) (Lat. 52° S.).

Presión atmosférica en Orcadas (Argentina) (Lat. 61° S.).

Viento a 3.000 mts. de altura en F. Norhona (Brasil) (Lat. 4° S).

Viento a 6.000 mts. de altura en C. Redentor (Argentina) (Lat. 33° S.).

Viento a 5.000 mts. de altura en C. Rivadavia (Argentina) (Lat. 46° S.).

Para estas variables se anotaron, día por día, todos los valores de las mismas que precedían a cada invasión de aire polar, escribiéndolos horizontalmente hasta 48 días antes (70 días antes para F. Noronha), promediando luego por columnas los valores que correspondían a: 1 día antes, 2 días antes,..... 23 días antes,..... 48 días antes.

PRESIÓN EN VILLA MERCEDES

Fecha « esc. polar »	Dias antes 0	1	2	etc.
My 5/37	60	64	65	.... etc.
My 9	57	61	57	.... etc.
My 12	62	65	64	.... etc.
.	.	.	.	....
.	.	.	.	....
.	.	.	.	....
.	.	.	.	....
Etc.	etc.	etc.	etc.	.... etc.
Promedio	....	....	....	.... etc.

En total se han analizado más de 102 « escobazos » polares.

Con los valores así obtenidos, se calcularon otros deducidos de promediar 3 días consecutivos:

$$y' = \frac{y_n + y_{n+1} + y_{n+2}}{3} \qquad [1]$$

Y a su vez para el análisis de las ondas de períodos largos, se promediaron 5 valores consecutivos de y' :

$$y'' = \frac{y'_n + y'_{n+1} + y'_{n+2} + y'_{n+3} + y'_{n+4}}{5}$$

Lo que equivale a hacer:

$$y'' = \frac{y_n + 2\,y_{n+1} + 3\,y_{n+2} + 3\,y_{n+3} + 3\,y_{n+4} + 2\,y_{n+5} + y_{n+6}}{15} \qquad [2]$$

Y además se consideraron los valores individualmente, con el fin de eliminar las ocasiones, en que el proceso de suavización falseara los hechos.

El análisis efectuado mostró que en líneas generales el origen de cada invasión de aire polar al territorio de nuestro país, hay que buscarlo en los fenómenos solares que ocurren a partir de unos 20 días antes del mencionado « escobazo polar ».

Mostró asimismo el análisis, como van conectados entre sí los resultados obtenidos por diversos observadores y por nosotros, entre la radiación solar; la presión y la temperatura de diversas zonas de la tierra; así como la ligazón que nosotros determinamos entre dicha radiación y el viento en la base de la estratosfera, en trabajos anteriores, aparecidos en estos mismos *Anales*.

Analicemos ahora la onda obtenida eliminando la de 3 días), (promedios de los valores correspondientes a 3 días consecutivos) disponiendo las curvas en la forma que muestra la figura 1 y 1 bis, radiación solar, temperatura en Panamá, viento a 12.000 y 22.000 mts. en Omaha (como representación de la circulación estratosférica), presión en Villa Mercedes, presión en Río Gallegos, y presión en Orcadas; podemos notar que la aparente desordenada evolución de los mismos desaparece cuando empiezo a manifestarse las oscilaciones del valor de la radiación solar que determinarán el « escobazo polar ».

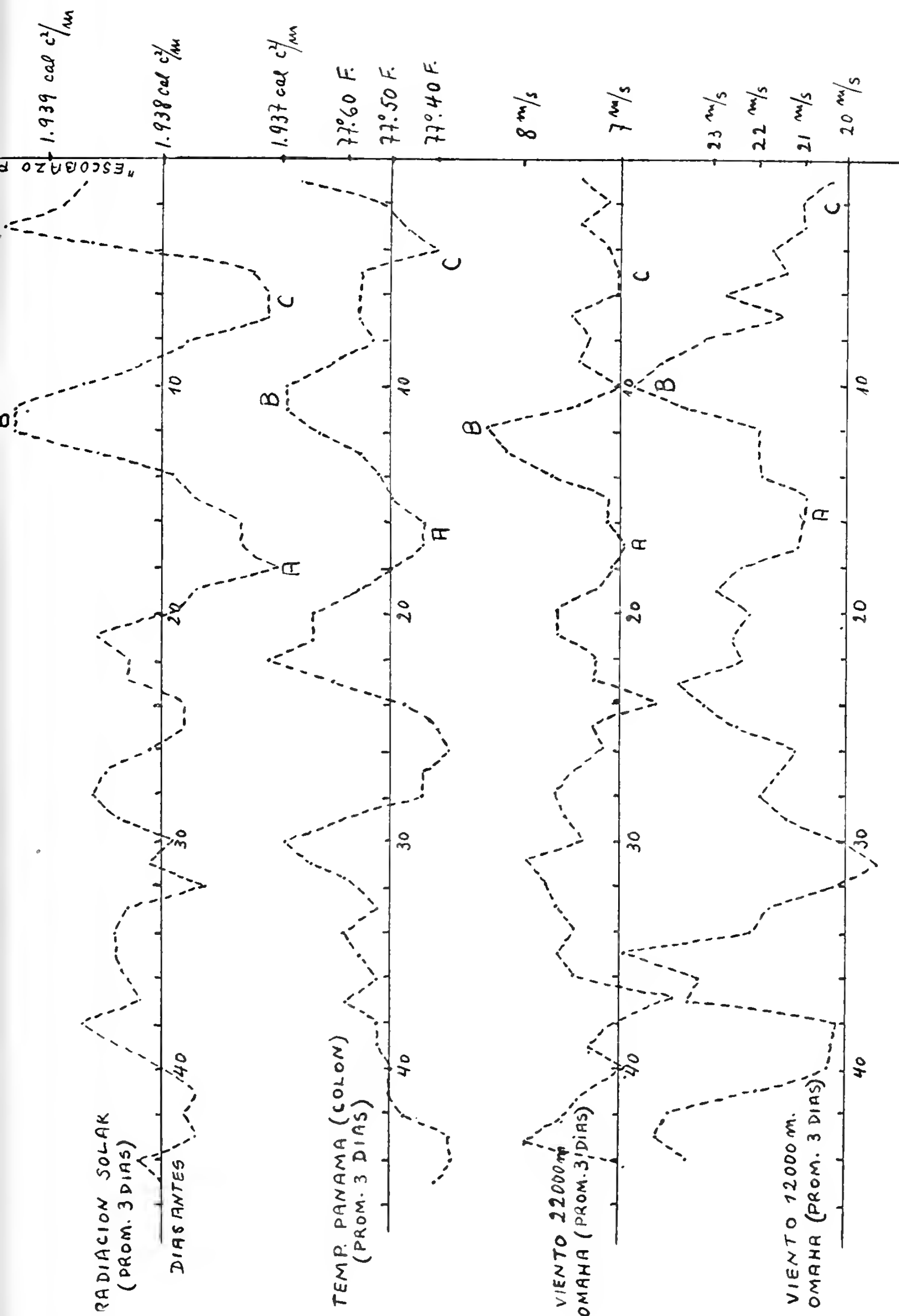

"ESCOBAZO"
1.939 cal c²/m
1.938 cal c²/m
1.937 cal c²/m
77°.60 F.
77°.50 F.
77°.40 F.
8 m/s
7 m/s
23 m/s
22 m/s
21 m/s
20 m/s
A
B
C
10
20
30
40
RADIACION SOLAR (PROM. 3 DIAS)
DIAS ANTES
TEMP. PANAMA (COLON) (PROM. 3 DIAS)
VIENTO 22000 m OMAHA (PROM. 3 DIAS)
VIENTO 12000 m. OMAHA (PROM. 3 DIAS)

Fig. 1

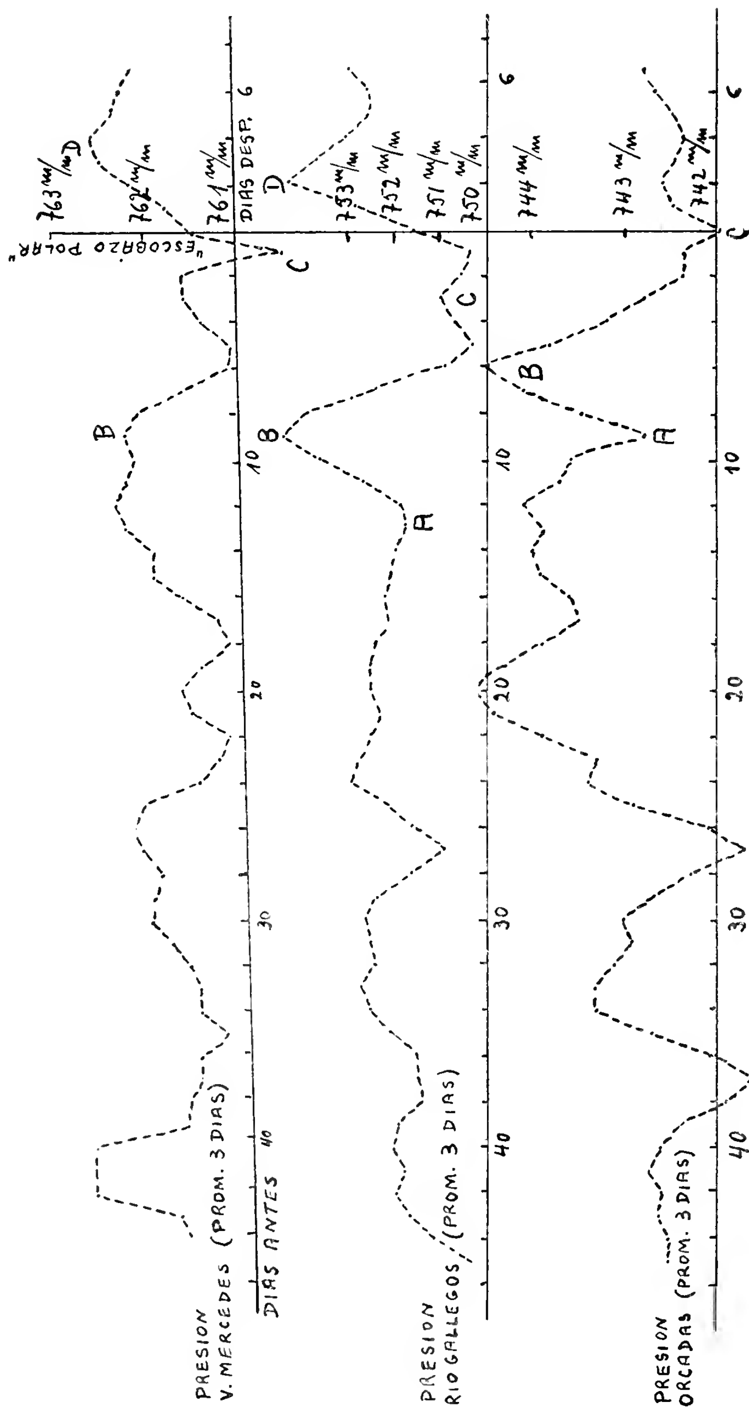

PRESION V. MERCEDES (PROM. 3 DIAS)
DIAS ANTES
DIAS DESP.
"ESCOBAZO POLAR"
763 m/m
762 m/m
761 m/m
753 m/m
752 m/m
751 m/m
750 m/m
744 m/m
743 m/m
742 m/m
PRESION RIO GALLEGOS (PROM. 3 DIAS)
PRESION ORCADAS (PROM. 3 DIAS)
A
B
C
D
10
20
30
40
6

Fig. 1 bis

A partir del día — 21, la radiación disminuye, alcanzando un mínimo el día — 18 (A); dicho mínimo ocasiona:

Día	Mínimo en:
—17 a —16	Temperat. en Paraná Lat. 10° N.
—17	Vel. del viento a 22000 mts. de altura (Omaha) Lat. 41° N.
—16 a —15	Vel. del viento a 12000 mts. de altura (Omaha)
—13	Presión en Río Gallegos. Lat. 52° S.
— 9	Presión en Orcadas. Lat. 61° S.

La onda de la presión en Villa Mercedes aparece perturbada entre los días — 18 y — 12, por el extendimiento de un alza barométrica desde el Atlántico, cosa que se hace visible, dibujando las cartas isobáricas consecutivas de la presión, tomando como origen la presión media tenida durante el período de tiempo que se empleó para el trazado de estas curvas; sobre esto volveremos más adelante.

Desde el día — 18 al — 12, la radiación crece y alcanza un máximo (B); la variación observada es:

$$0{,}0023 \text{ cal. } c^2/\text{min.}$$

lo que significa un aumento de 0.12 % —

Este máximo va seguido:

Día	Máximo en:
—12	Viento a 22000 mts. de altura en Omaha.
—11 a —10	Temperatura en Panamá.
—10	Viento a 12000 mts. de altura en Omaha.
— 9	Presión en V. Mercedes.
— 9	Presión en Río Gallegos.
— 6	Presión en Orcadas.

Luego el mínimo (c) del día — 7 a — 6:

Día	Mínimo en:
—5	Viento a 22000 mts. en Omaha.
—4	Temperatura en Panamá.
—1	Viento a 12000 mts. de altura en Omaha.
—5 y —1	Presión en V. Mercedes.
—6 y —1	Presión en Río Gallegos.
0 y +4	Presión en Orcadas.

Estos mínimos en la presión son originados por el pasaje del tren de ciclones polares por el sud de la Tierra de Fuego.

Finalmente tenemos el máximo (D) de radiación solar del día — 3, (en la curva de los valores sin suavizar aparece el día — 2, pero por la forma de la misma y al promediar valores de 3 días consecutivos, se desplaza el día — 3).

En forma análoga, los máximos de presión en V. Mercedes y en R. Gallegos, que siguen al « escobazo polar » ocurren, empleando los valores « naturales » el día 1 en ambas estaciones; mientras que el mínimo ocurre en los días 0 y —1.

De esto entonces se tiene:

Del máximo solar (D) al mínimo de presión (valores « naturales ») :

En R. Gallegos	1 día.
Al mínimo en V. Mercedes	2 días.
Al máximo en Río Gallegos	3 días.
Al máximo en V. Mercedes	3 días.

Resultados concordantes con los obtenidos por diversos observadores en los cálculos de correlación entre la radiación solar y la presión en la zona templada argentina ([1]).

En un trabajo nuestro anterior ([2]), señalamos ya, que los máximos de radiación solar van seguidos por máximos de la velocidad del viento en la base de la estratósfera, cosa que vemos aquí confirmada en la secuencia del máximo (B) de viento a 22.000 mts. y 12.000 mts. en Omaha.

Con el fin de tratar de investigar otras causas actuantes en el « escobazo » del aire polar, hemos suavizado los valores de las diversas variables según la fórmula (2).

Tomando en cuenta los valores así obtenidos de la presión, y considerando como origen para cada estación la presión media deducida para el período de tiempo en que se hicieron las observaciones, y trazando las cartas de isobaras, se encontró:

a) Una onda que se traslada de SW. a NE., produciendo máximos el día —33 en Orcadas, el — 32 en R. Gallegos, y el — 27 en V. Mercedes.

b) Una onda de rumbo WSW a ENE, que ocasiona máximos el día — 22 en R. Gallegos y el — 20 en Orcadas.

([1]) Ver mi trabajo: « Contribución al estudio de la circulación atmosférica », *Anales de la S. C. Argentina*, Mayo de 1938.

([2]) « Sobre la circulación atmosférica », *Anales de la S. C. Argentina*, E. V, T. CXIX, pág. 215 y siguientes.

c) Entre los días — 24 y — 4 la presión en el Antártico es superior a la normal.

La causa origen de estas ondas, no aperece bien determinada y necesitará un ulterior estudio.

En presencia de todos los hechos que hemos mencionado, parecería que las cosas ocurren según la siguiente hipótesis:

El mínimo (A) de radiación solar ocasiona un decrecimiento de la velocidad de la circulación atmosférica y por tanto un mínimo en la presión de las zonas templadas y polares (mínimos (A) en las curvas de presión de R. Gallegos y Orcadas), a esto sigue un aumento de la radiación, y correspondiente, un máximo térmico en Panamá, es decir un activamiento en las corrientes ascensionales de la zona tropical, y una mayor velocidad de traslado de la masa aérea hacia los polos, en el seno de la estratofera (máximo (B) de la velocidad del viento a 12.000 mts. y 22.000 mts. de altura); cosa que no se observa en forma neta en altitudes más bajas (p. ej. en el viento a 6.000 mts. en C. Redentor).

La alteración del movimiento de traslado de esa gran masa de aire en la altura, provoca los máximos (B) en la presión, esa elevación barométrica en los centros de alta presión oceánica (recordemos la onda perturbadora del Atlántico sobre la curva de la presión en Villa Mercedes), intensificará su actividad dinámica con lo que las masas aéreas superficiales más cálidas de la zona templada, se extenderán hacia el Sud, hacia las regiones frías.

Esa extensión, y el aumento de energía de la masa aérea polar, consecuencia de la mayor llegada de aire proveniente de la región tropical, vías altas capas de la Atmósfera, y el aire más caliente extendido hacia el Sur en las capas bajas, dará origen a la formación del tren de ciclones polares, cuyo pasaje se manifiesta como mínimos (C) de la presión, el movimiento de esas depresiones se verá favorecido, por el hecho de que el nuevo decrecimiento de la radiación solar (C) proveerá menos aire a los anticiclones oceánicos de latitud media, con lo que su energía será menor; y finalmente, la gran masa aérea polar, que sigue a retaguardia del tren de ciclones, se extenderá sobre el territorio argentino, elevando nuevamente la presión, unos 3 ó 4 días después del 2º máximo (D) de la radiación solar.

Esta hipótesis que acabamos de enunciar y que explica los resultados que obtuvimos en trabajos ya citados entre la radiación solar y la velocidad del viento en la base de la estratosfera, y la presión,

necesitará un número mayor de observaciones a fin de poder determinar su exactitud y verdad.

Trazando las cartas isobáricas correspondientes, con el fin de establecer las variaciones del campo barométrico que determinan los máximos (B) y (D), se puede observar que el máximo (B) aparece como un área de alta presión que se desplaza de NW a SE, pasando por sobre el Sud de Santa Cruz; seguido del área ciclónica que viene del W; mitnras que el máximo (D), tiene un rumboSW a NE, que pasa por el Norte de Santa Cruz.

El hecho de que el máximo (B) de velocidad de viento en la estratosfera haya sido observado en una estación de 41°N. (Omaha) nos sugiere la idea de una formación simétrica de los trenes de ciclones polares en los hemisferios Sud y Norte.

Buenos Aires, Abril 30 de 1939.

UNA NOTA SOBRE LA FORMACIÓN DEL SALITRE CHILENO

POR EL

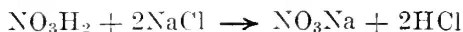
DR. W. KNOCHE

Hemos tratado ya anteriormente la formación del salitre por acción de ácidos nítricos atmosféricos sobre feldespatos (*).

Parece que existe otra posibilidad de la formación de esta sal en las regiones desérticas de la costa atacameña. En las regiones bastante secas al Oeste de las sierras costaneras existe, sea bajo la influencia del sol, es decir de la parte ultravioleta del espectro solar, o bajo descargas eléctricas silenciosas, la posibilidad de una disgregación del oxígeno normal (O_2) en su forma atómica, que así se combinaría directamente, o pasando por el ozono (O_3) con el N atmosférico. Se forman asociaciones nitrosas (N_2O, N_2O_3 etc.); éstas se encuentran además en la atmósfera de muchas partes de la tierra. El proceso posterior sería el siguiente: $N_2O_3 + O \rightarrow 2NO_2$.

Si entran las nieblas marítimas muy húmedas o camanchacas del Norte de Chile desde al mar al interior, debemos suponer la formación de ácidos nitrosos, por ejemplo: $NO_2 + H_2O = NO_3H_2$.

Característico para la costa chilena son las rompientes de gran poder, que pulverizan el agua hasta alturas bastantes grandes, así que partículas finísimas de sal o más bien de soluciones salinas pasan encima de la montaña costanera para entrar en combinación con el ácido nítrico según la fórmula siguiente:



$$NO_3H_2 + 2NaCl \rightarrow NO_3Na + 2HCl$$

Así tendríamos un proceso climático-químico puro para la formación del salitre natural.

(1) W. KNOCHE, *Zur Entstehung des Chile-Salpeters. Forschungen und Fortschritte* Nº 15, 1930.

Con la humedad de la camanchaca, el salitre es transportado como solución hacia la costra en la cuál penetra capilarmente. Para su existencia se necesita una región desértica sin precipitaciones y tal vez una morfología especial del terreno, como son las planicies que bajan desde la Puna hasta la costa del Pacífico pero con una valla formada por la baja cordillera costanera; al este de ella encontramos las pampas salitreras.

TARIFAS FERROVIARIAS DE UTILIDAD MÁXIMA

POR EL

ING. EMILIO REBUELTO

(*Continuación*)

V. — TARIFAS DE CLASE UNICA

Una empresa ferroviaria debe tener constantemente en servicio diversas clases de vehículos. Primero, por imponerlo así las disposiciones reglamentarias; segundo, por propia conveniencia de la empresa, que de tal manera puede aprovechar mejor el peso muerto del material rodante, o cobrar, gracias a ello, diferentes tarifas por el mismo servicio. Este último, es el caso particular de los coches de primera y segunda clase para el transporte de pasajeros.

Hay también otras razones, derivadas de la naturaleza especial de las cargas, que obligan a mantener en existencia vagones tanques, cañeros, de hacienda, frigoríficos, etc. Para ciertas mercaderías susceptibles de transportarse en unos o en otros, se dispone de tarifas distintas, según el vehículo que utilicen. Algo análogo sucede con la velocidad, (tren expreso, mixto, o de carga), cobrándose diversas tarifas, en forma más o menos encubierta. Por ejemplo, eliminando de los trenes rápidos la segunda clase; aplicando tarifas reducidas cuando el cargador admite un plazo de transporte superior al fijado por la ley, etc. En Europa, las tarifas de « Pequeña Velocidad » y « Gran Velocidad », permiten a la empresa cobrar distinto precio por el transporte de la misma carga a igual distancia, según sea la velocidad a que se efectúe el transporte.

Cuando el aprovechamiento de los vehículos (o del tren) es bueno, sin llegar al ideal máximo posible, no hay nada que observar; pero cuando es malo, por ejemplo, inferior al 50 %, es del caso preguntarse si sustituyendo dos vehículos (o dos trenes) que sirvan a dos clases distintas de tráfico, por uno solo, y las dos tarifas, por una sola, (que puede ser la menor de las dos anteriores o una in-

termedia), no se obtendría una ventaja efectiva, por la disminución en los gastos que acarrea el menor peso muerto movido, al efectuar el transporte del mismo peso útil.

Para fijar las ideas desde el principio, consideremos el caso de los pasajeros de primera y de segunda clase; lo común es que corran los coches respectivos con un aprovechamiento inferior al 30 %. Supongamos que hubiese igual número de unos que de otros; suprimiento una de las clases, llevaríamos a todos en la mitad del número de coches, y por lo tanto con un aprovechamiento del 60 % de los asientos y con la mitad de peso muerto. La disminución de los gastos directos será aproximadamente también un 50 % o algo menor, pero siempre superará a la experimentada por los importes, aunque se llevase a todos los pasajeros de primera con tarifa de segunda.

En efecto: tomando el caso más desfavorable de que ambos números de pasajeros fuesen iguales, y de que la tarifa de primera, t_1, fuese 50 % más elevada que la segunda, t_2, los importes con las dos tarifas, serían proporcionales a $t_1 + t_2$; la relación de ambos importes es:

$$\frac{2\,t_2}{t_1 + t_2} = \frac{2\,t_2}{1{,}5\,t_2 + t_2} = \frac{2}{2{,}5} = 0{,}80$$

o sea, una disminución de 20 % en las sumas cobradas, para una de 50 % en los gastos. Pero como los de primera son siempre menos que los de segunda, la disminución resulta todavía menor del 20 %, aunque la diferencia de las dos tarifas sea mayor que la supuesta y aunque los coches de primera sean más pesados que los de segunda.

Ejemplo: Un ferrocarril de trocha angosta tiene en servicio coches de primera con una tara de 34 ton. y 53 asientos; y de segunda, con 28 ton. de tara y 68 asientos; los asientos se ocupan en un 25%.

Las tarifas son 4,44 y 2,96 cts. m/n respectivamente por pas.-Km. El costo por ton.-Km. bruta es de 0,8 cts. m/n. El peso medio de un pasajero se supone en 70 Kg. Se quiere averiguar si conviene o no suprimir una clase y adoptar una tarifa única.

De acuerdo a los datos, los productos actuales son:

53 (0,25) (4,44) + 68 (0,25) (2,96) = 1,09 $ m/n por cada Km. recorrido por los dos coches.

Si se los lleva a todos los pasajeros con tarifa de segunda, y por lo tanto en un solo coche, se tiene:

[53 (0,25) + 68 (0,25)] 2,96 = 0,88 m/n ó 0,21 $ m/n de menos.

La relación de los dos importes es:

$$\frac{0,88}{1,09} = 0,81.$$

Quiere decirse que las entradas han experimentado una rebaja del 19 %. En cuanto a los gastos, si hemos suprimido el coche de segunda la economía ha sido de

$$28\ (0,008) = 0,224\ \$\ \text{m/n}.$$

Superior en más de un centavo por cada Kilómetro recorrido por los coches, a la disminución de importes. Si el eliminado fuera el de primera, resulta

$$34\ (0,008) = 0,272\ \$\ \text{m/n}.$$

con una economía superior a seis centavos. Para avaluar la disminución experimentada por los gastos, bastará relacionar los pesos muertos movidos. Con los dos coches se tienen 62 ton. de tara más 2,1 ton. de pasajeros. total 64 ton.; con la supresión del coche de segunda, se tiene

$$\frac{64 - 28}{64} = \frac{36}{64} = 0,56\ ; \qquad \text{economía del } 44\ \%$$

y con la del de primera

$$\frac{64 - 34}{64} = \frac{30}{64} = 0,47\ ; \qquad \text{economía del } 53\ \%$$

La tarifa única nos procura pues una merma de 19 % en los importes, pero se acompaña de porcentajes de economía muy superiores en los gastos.

Como se ve, no es indiferente suprimir la primera o la segunda. Para la empresa, convendría más hacerlo con la primera, pues para igual capacidad de pasajeros, los coches de segunda clase tienen menos peso muerto. Para los pasajeros en cambio, es más ventajoso que los suprimidos sean los coches de segunda y se viaje en los de primera con tarifa de segunda, con lo cual, los pasajeros de segunda resultan beneficiados en su confort y los de primera disfrutan de una rebaja de tarifas. Una solución intermedia, poniendo en servicio coches más lujosos que los actuales de segunda, y con mejor aprovechamiento del espacio, que los de primera, en los cuales se viajaría con una tarifa intermedia, puede dar la solución más favorable para ciertos casos.

El problema tiene aspectos muy distintos, debido a la multiplicidad de los factores que entran en juego, pero ninguno de ellos conduce a cuestiones de máximo. Quiere decirse, que no es posible determinar una tarifa que produzca una utilidad mayor que cual-

quier otra, ya que la investigación teórica debe limitarse aquí a señalar desde qué momento es más conveniente la tarifa de clase úniea. En cuanto al monto de ésta, constituye un probiema aparte, para cuya solución deben contemplarse las condiciones loeales, los horarios, el « standard » de vida de los pobladores de la región, su eapacidad adquisitiva de pasajes, la necesidad de viajar que tengan, etc., tal como se hace generalmente para estudiar la posibilidad de ventas en un mercado cualquiera.

Pero en principio es aconsejable no introducir ningún aumento de tarifas, para no provocar disminuciones de tráfico y por eso parece más aconsejable adoptar lisa y llanamente la tarifa de segunda.

Llamando N_1 y N_2 al número de pasajeros (o de pas.-Km.) de primera y segunda clase, transportados a las tarifas $t_1 - t_2$, al cobrarles a todos la tarifa t_2, perdemos la diferencia $t_1 - t_2$ sobre los pasajeros de primera, que transportamos ahora con tarifa de segunda o sea, en total, $N_1 (t_1 - t_2)$. Si llamamos P al peso muerto en toneladas (o en ton.-Km.) y g al costo de una ton.-Km. de peso bruto, tendremos una economía de Pg. Para que la supresión de una clase sea conveniente se necesitará que la economía hecha supere al monto de la menor percepción, o sea

$$N_1 (t_1 - t_2) < Pg$$

$$\therefore \quad N_1 < \frac{Pg}{t_1 - t_2}$$

expresión que nos indica cual es el valor límite de los pasajeros de primera que deben transportarse para que convenga el mantenimiento o la supresión de dicha clase, y la influencia que en ello tienen el peso P dejado de mover, el gasto g y las tarifas existentes.

Por de pronto, se evidencia que cuando en un trayecto determinado, empiece a disminuir N_1, debe vigilarse esta merma y establecer el límite de ella, más abajo del cual, resulta antieconómica mantener la primera clase.

En el conjunto de los ferrocarriles argentinos, la disminución está ya bien acentuada.

No sólo baja el número, sino también su proporción respecto al total de primera y segunda, acusándose así una merma de más importancia en los pasajeros de primera clase que en los de segunda. Si esto es así sobre el conjunto, ha de serlo, con mayor razón en ciertos ferrocarriles, o en algunos de sus tramos o ramales, en los que se impondría como medida económica, la inmediata supresión.

PASAJEROS TRANSPORTADOS

Años	De 1ª clase	% del total
1930	77.055.600	45,31
1931	72.338.385	45,05
1932	65.974.167	44,21
1933	61.383.092	43,86
1934	59.619.254	43,04
1935	57.781.116	42,43
1936	57.982.000	41,62
1937	63.939.000	41,76

Contra lo que pudiera creerse, las mayores disminuciones las han experimentado los ferrocarriles en sus secciones generales, de largos recorridos, y no en las secciones urbanas alrededor de Buenos Aires, donde sin embargo, la opinión pública se muestra impresionada por la competencia de ómnibus y automotores. A este respecto son muy ilustrativas las cifras siguientes:

PASAJEROS DE PRIMERA CLASE EN LA SECCIÓN « BUENOS AIRES, LOCAL »
(en millares)

Ejercicio	Sud	Oeste	Central Argentino
1926-27	23.839	9.996	19.869
1927-28	24.621	10.809	20.653
1928-29	25.597	11.678	21.471
1929-30	26.051	14.140	21.698
1930-31	25.448	13.954	21.451
1931-32	23.544	12.834	19.763
1932-33	22.289	11.811	17.852
1933-34	21.369	11.044	16.662
1934-35	20.992	10.782	17.003
1935-36	19.262	10.212	17.135
1936-37	20.353	10.637	18.924
Disminución entre 1926-27 y 1936-37:	14,6 %	—	4,8 %
Aumento, idem:	—	6,41 %	—

Más lógico que calcular la disminución en una década, sería tomarla con rspecto al año máximo de la década, que es el 1929-30.

Entonces se tiene:

Disminución:	en el F. C. Sud	21,91 %
	en el F. C. Oeste	25,02 %
	en el F. C. C. Argentino	12,80 %

En el F. C. Buenos Aires al Pacífico, la intensidad del tráfico urbano es mucho menor y de ahí que una misma disminución en valor absoluto, origine un alto porcentaje. En 1929-30 transportó 6.814.000 pasajeros, y en 1936-37 solamente 4.676.000; el porciento de la disminución alcanza a 31,44.

Por altas que parezcan estas cifras son mayores aún las obtenidas examinando lo acontecido en el resto de las líneas, excluída la sección « Buenos Aires local ».

Pasajeros de primera clase en las líneas generales
(en millares)

Ejercicio	Sud	Oeste	C.A rg.	B.A. al Pac.
1926-27	1.107	863	2.267	681
1927-28	1.021	867	2.259	646
1928-29	1.025	921	2.371	604
1929-30	994	931	2.257	659
1930-31	938	877	2.090	540
1931-32	820	711	1.763	401
1932-33	763	583	1.595	314
1933-34	755	545	1.375	270
1934-35	821	594	1.297	258
1935-36	814	530	1.190	223
1936-37	935	574	1.039	226
Disminución entre 1926-27 y 1936-37:				
	15,63 %	33,48 %	54,09 %	66,91 %
Disminución con respecto al año máximo:				
	15,63 %	38,34 %	56,20 %	66,91 %

Exceptuando el F. C. Sud, las otras tres empresas de trocha ancha, muestran disminuciones en los pasajeros de primera clase que superan en mucho las registradas en los tráficos urbanos y suburbanos. Este resultado evidencia un funcionamieto antieconómico, pues las estadísticas demuestran también que no ha disminuído el recorrido medio de un pasajero, de lo cual se infiere que los coches semi-vacíos deben seguir recorriendo las mismas largas distancias que antes, originando así los mismos gastos, o muy poco menos, con ingresos fuertemente disminuídos.

Si la adopción de una clase única, se impone en los trayectos cortos, por el uso de coches automotores, se impone también, por otras razones en las líneas generales. Una de estas razones es el mal aprovechamiento que hacen los pasajeros ferroviarios, de la capacidad de asientos puestos a su disposición. La estadística oficial, da para el conjunto de los ferrocarriles argentinos:

Relación entre los asientos ocupados y los disponibles

1930	23,42 %	1933	22,01 %
1931	22,25 »	1934	22,06 »
1932	22,29 »	1935	21,85 »

En 1925, había llegado a 26,20 %; aproximadamente solo una cuarta parte de los asientos era ocupada; pero ahora se está muy próximo a la quinta parte.

Y si esta baja proporción es la que resulta como término medio del conjunto, teniendo en cuenta que en los servicios urbanos el aprovechamiento es mayor, se deduce que para los transportes de largo recorrido debe ser aun mucho más desfavorable. No dispongo de estadísticas suficientemente detalladas para calcular el aprovechamiento de los asientos de primera y segunda clase, subdivididos cada uno en servicios urbanos y de largo recorrido, pero es evidente que en base a ellas, se podría llegar a conclusiones definitivas. Por de pronto, en los ferrocarriles con poca intensidad de servicios urbanos, el aprovechamiento medio es inferior al término medio general: la Estadística de 1935, ofrece estas cifras:

Relación entre los asientos ocupados y los disponibles en 1935

Cía. General	16,54 %	Central Córdoba	14,45 %
Prov. de Santa Fe	16,47 »	Puerto Deseado	14,24 »
Bs. As. al Pacífico	15,50 »	Del Este	14,04 »
Central del Chubut	15,30 »	Ros. a Pto. Belgrano	13,04 »
Entre Ríos	14,76 »	Bahía Bl. y N. O.	9,96 »

Como se ve, existen líneas en que la utilización de los asientos no llega al 10 %; y como es de suponer que los de segunda clase aprovechan más que los de primera la capacidad de los vehículos, se puede asegurar que en la República Argentina se están corriendo

ahora muchos coches de primera clase con un aprovechamiento inferior al 10 %.

Una segunda razón es, que la menor percepción al transportar a los pasajeros de primera al precio de segunda clase, estaba expresada por el producto N_1 $(t_1 - t_2)$, el cual será tanto menor cuanto menor sea N_1; ya vimos que N_1 disminuye en los últimos años, lo que es favorable para decidir la supresión de la tarifa de primera clase. Además, la proporción de los de primera sobre el total, que aparece alta en el conjunto, — más del 40 % — es tan reducida en algunas líneas, que la supresión no tendría en ellas ningún efecto sensible de disminución de productos. En efecto:

PROPORCIÓN DE PASAJEROS DE PRIMERA CLASE SOBRE EL TOTAL, EN 1935

Nord. Este Arg.	28,35 %	Cía. General	17,72 %
Central de Bs. As.	24,74 »	Central de Córdoba ...	17,65 »
Entre Ríos	23,19 »	Bahía Blanca y N. A...	11,76 »
C. Norte Arg.	22,83 »	Del Este	10,80 »
Prov. de Santa Fe	17,88 »	Rosario a Pto. Belgrano	8,10 »

El tráfico de pasajeros, en determinadas líneas, se perfila pues, como un tráfico de muy débil intensidad, sobre todo en los de primera clase, y que utiliza muy mal la capacidad de los coches empleados en transportarlo. La reunión de las dos clases en una sola traería indiscutibles ventajas.

Y una tercera razón es que la diferencia $t_1 - t_2$, que es el otro factor del producto N_1 $(t_1 - t_2)$ tiende también a disminuir, y en consecuencia, la merma de productos provocada por el establecimiento de la clase única, sería muy reducida. En el interesante estudio del señor E. Hammar, titulado *The adoption of single class for passenger services in the Argentina,* leído en la sesión del 24 de junio de 1938 en el *Institute of transport - Argentine und River Plate Centre*, se dan entre otros, algunos datos sobre el número de pasajeros de primera y segunda clase, de sus importes totales y del importe medio por pasajero, — que directamente mide la tarifa— para los servicios locales alrededor de Buenos Aires, en los cuatro ferrocarriles: Sud, Oeste, Central Argentino y Buenos Aires al Pacífico. Destacaremos únicamente las cifras relativas a este último.

No deben extrañar las bajas percepciones unitarias por pasajero, pues están influenciadas por los abonos computados hasta 1929-30 como 60 viajes por mes para el boleto de abono común, 30 viajes

para el de mujeres y estudiantes y 24 viajes para los menores de edad.

F. C. BUENOS AIRES AL PACÍFICO

Años financieros	Producto medio de un pasajero de 1ª clase	de 2ª clase	Diferencia en centavos
	en $ m/n		
1926-27	0,369	0,220	14,9
1927-28	0,361	0,214	14,7
1928-29	0,362	0,216	14,6
1929-30	0,233	0,190	4,3
1930-31	0,227	0,190	3,7
1931-32	0,224	0,194	3,0
1932-33	0,221	0,197	2,4
1933-34	0,213	0,192	2,1
1934-35	0,214	0,196	1,8
1935-36	0,200	0,195	0,5
1936-37	0,203	0,184	1,9

Después de 1930 se han emputado todos como 70 viajes lo que explica la brusca disminución que a partir de ese año se presenta. Pero el hecho más saliente evidenciado por las cifras del cuadro es la disminución de la diferencia entre las dos tarifas, hasta el extremo de confundirse casi en una, debido principalmente a la rebaja efectuada en las de primera clase (de 0.369 a 0.203, la disminución es de 0,166), mientras en las de segunda clase no llegó más que a 0,036. Con todos estos antecedentes parece bien demostrado que el número actual de pasajeros de primera, no puede justificar el mantenimiento de las dos clases.

Se puede calcular el incremento de pasajeros necesario para compensar la menor percepción a que conduce la tarifa única. Llamando ΔN a este incremento, se tiene que

$$\Delta N \,.\, t_2 = N_1 (t_1 - t_2)$$

$$\Delta N = \frac{t_1 - t_2}{t_2} N_1$$

Para el año financiero 1936-37, en el F. C. Buenos Aires al Pacífico, resulta

$$\Delta N = \frac{0{,}203 - 0{,}184}{0{,}184} N_1 = \frac{0{,}019}{0{,}184} = 0{,}103\, N_1$$

Bastaría pues un 10,3 % de aumento para que la empresa siguiera percibiendo los mismos importes. En cuanto a los gastos, habrán disminuído en mayor proporción, y por lo tanto la utilidad será ma-

yor. Hasta puede suceder que sin llegar a producirse el aumento ΔN, y *aun disminuyendo los pasajeros, la ganancia aumente.* Este aspecto del problema puede estudiarse con las siguientes fórmulas:

La utilidad dejada por N_1 pas.-Km. de primera clase transportadosa la tarifa t_1, y que obligan a mover un peso muerto P_1 con un gasto g, por ton.-Km. de peso bruto; más N_2 pas.-Km. de segunda clase a la tarifa t_2, con un peso muerto P_2 y el mismo gasto g, es, con la hipótesis de que un pasajero pesa 70 Kg (o 0,07 ton.).

$$U = N_1\ t_1 + N_2\ t_2 - [P_1 + P_2 + 0{,}07\ (N_1 + N_2)]\ g$$

Si suprimimos los vehículos de segunda clase, y llevamos a todos los pasajeros en coches de primera a la tarifa de segunda, y suponemos además que la rebaja así introducida nos procura un aumento a sobre el total de pasajeros, la nueva utilidad será

$$U_0 = (N_1 + N_2)\ (1 + a)\ t_2 - [P_1 + 0{,}07\ (N_1 + N_2)\ (1 + a)]g$$

Para que la modificación convenga, será necesario que

$$U_0 > U \qquad \therefore \qquad U_0 - U > 0,$$

lo que conduce a

$$P_2\ g - N_1\ (t_1 - t_2) + (N_1 + N_2)\ (t_2 - 0{,}07\ g)\ a > 0$$

$$\therefore \qquad a > \frac{N_1\,(t_1 - t_2) - P_2\,g}{(N_1 + N_2)\,(t_2 - 0{,}07\,g)}$$

expresión que muestra la posibilidad de que a tenga un signo negativo, y por lo tanto, que represente una *disminución* en vez de un aumento, a pesar de lo cual, se obtenga una mayor utilidad.

Con los precios corrientes de las tarifas de segunda clase, la diferencia $t_2 - 0{,}07\ g$, será siempre positiva, pero el numerador,

$$N_1\ (t_1 - t_2) - P_2\ g$$

puede ser negativo, cuando N_1 tiene un valor reducido, coincidiendo con un alto valor de P_2.

Ejemplo. — Un ferrocarril hace en un ramal de 40 Km. un servicio con un coche de primera y otro de segunda, cuyos pesos muertos son 24 y 26 toneladas respectivamente. Las tarifas son 0,065 y 0,045 $ m/n por pas.-Km. El gasto por ton.-Km. de peso bruso es de 0,02 $ m/n. Se hacen 700 corridas

de tren al año. El tráfico es de 280.000 pas.-Km. de primera y 350.000 de segunda.

Se proyecta suprimir la corrida del coche de segunda y la tarifa de primera, estableciendo una clase única con la tarifa de segunda, para lo cual se desea calcular previamente la influencia que tales modificaciones tendrán en los productos, gastos y utilidades. Caso de que éstas mermen, calcular el aumento de tráfico necesario para compensar la disminución.

Los productos son:

$$N_1\, t_1 + N_2\, t_2 = 280.000\ (0{,}065) + 350.000\ (0{,}045) = 33.950\ \$\ \text{m/n}.$$

y después de suprimida la t_1, *serán*

$$(N_1 + N_2)\, t_2 = 630.000\ (0{,}045) = 28.350\ \$\ \text{m/n}$$

luego los productos van a disminuir en 5.600 $ m/n.

Para avaluar los gastos, consideremos que el peso total de los dos coches es de 54 ton. que han efectuado en el año 700 corridas de 40 Km. cada una, lo que hace un total de 1.512.000 ton.-Km. Habrá que agregar los 630.000 pas.-Km equivalentes a 44.100 ton.-Km. lo que hace un total de 1.556.100 ton.-Km. que a 0,02 $ m/n la ton.-Km. representan 31.122 $ m/n. de gastos, contra 33.950 $ m/n de productos. Las utilidades son 2.828 $ m/n.

La supresión del coche de segunda, representará una economía de

$$P_2\, g = 26\ (40)\ (700)\ (0{,}02) = 14.560\ \$\ \text{m/n}.$$

lo cual reducirá los gastos a

$$31.122 - 14.560 = 15.562\ \$\ \text{m/n}.$$

y como los productos se habían reducido a su vez a 28.350 $ m/n, las utilidades van a ser 11.788 $ m/n en vez de los 2.828 $ m/n que se obtienen haciendo correr los dos coches. Como se ve, la ventaja conseguida es tan considerable, que no hace falta preveer ningún aumento de tráfico para compensar los 5.600 $ m/n de disminución en los productos: eso y mucho más se cubre con la economía introducida en los gastos.

El signo de a, debe resultar negativo; en efecto:

$$N_1\ (t_1 - t_2) - P_2\, g = 280.000\ (0{,}02) - 14.560 = -8.960$$

Avanzando un poco más en el cálculo, se puede investigar el valor numérico de a:

$$a = \frac{N_1\,(t_1 - t_2) - P_2\, g}{(N_1 + N_2)\,(t_2 - 0{,}07\, g)} = \frac{-8.960}{630.000\ (0{,}045 - 0{,}0014)}$$

$$= -\frac{8.960}{27.468} = -0{,}326$$

Quiere decirse que aun con una disminución de 32 % en el tráfico las utilidades iban a conservar el monto primitivo; y para disminuciones menores del

2 %, las utilidades serían todavía mayores que las dejadas cuando corrían los dos coches y se cobraban las dos tarifas.

Pero el problema estudiado a fondo, es algo más complicado: por de pronto, el gasto por ton.-Km. del material de segunda clase, no es el mismo que el de primera, pues la conservación de ambos difiere mucho, y por lo tanto, en vez de un único valor de g, habría que considerar dos valores, g_1 y g_2. Además, el uso de los vehículos de primera para llevar los pasajeros comunmente acostumbrados a viajar en los de segunda, ofrece ciertos inconvenientes en la práctica, que las empresas ferroviarias conocen muy bien, y que les han impedido adoptar estas « clases únicas » en determinados tráficos urbanos. Por último, el material de primera aprovecha poco el peso muerto con relación al número de pasajeros transportados, y si bien el público iba a ocupar en mayor porcentaje los asientos disponibles, la capacidad útil por eje, del material en servicio iba a disminuir, lo que en principio, no es aconsejable. Se impone pues, la adopción de nuevos vehículos, con más capacidad de asientos que los de primera actuales y más comodidad que los de segunda, cuyo peso sería P_3, correspondiendo a un gasto g_3, distinto de los dos anteriores, por ser diferente el material. La nueva tarifa a aplicar para la clase única, no debería ser tampoco ni la t_1 ni la t_2, sino una intermedia, t_3, la cual es lógico que produzca una disminución d sobre N_2, (pues $t_3 > t_2$, conjuntamente con un aumento a sobre N_1. A la consideración de todos estos factores deberá agregarse aún, la proveniente del mayor capital incorporado a la explotación con los nuevos vehículos, o los gastos de transformación del viejo material, etc. Las fórmulas respectivas no son difíciles de establecer, aunque sean algo más complicadas que las anteriores.

Un problema análogo al de la « clase única », es el del « tren único ». En vez de correr trenes de pasajeros y de carga, ambos mal aprovechados, pueden implantarse trenes mixtos, que sustituyen a ambos con evidentes ventajas para la empresa y también para el público, pues la velocidad del tren mixto es superior a la del de carga. Y entre dos trenes, uno « expreso » de pasajeros y otro « mixto », de menor velocidad, puede estudiarse igualmente la concentración en uno solo, que puede ser expreso, pero con la tarifa más reducida, propia del mixto. Depende, del aprovechamiento propio de ambos trenes, el que puedan obtenerse mayores utilidades, haciendo correr un tren único.

Para tales investigaciones, debe conocerse el gasto directo de un

tren-Km., tanto de pasajeros, como de carga y mixtos, en forma explícita, para tener en cuenta la composición de cada convoy, o sea, el número de ejes y el peso total del mismo. No creo que los ferrocarriles particulares dispongan todavía de estos análisis, a pesar de que cada día les van a ser más imprescindibles.

La Administración General de los Ferrocarriles del Estado, donde recientemente, bajo la dirección del ingeniero Pablo Nogués, se han realizado estudios económicos de mucho interés, tanto desde el punto de vista teórico como del práctico, ha determinado una expresión analítica de tipo lineal

$$G = A + Bn + CP$$

para calcular el gasto directo de un tren-Km. de n ejes y un peso bruto total P. Acerca de esta fórmula se dan abundantes explicaciones en las *Memorias del Ministerio de Obras Públicas*, Anexo Ferrocarriles del Estado, relativas a los últimos años. Ver en particular, la de 1937, pág. 951, donde figuran las siguientes fórmulas:

Costo directo de un tren-kilómetro en el Central Norte Argentino, 1937
en centavos moneda nacional

Pasajeros: $G = 124{,}013 + 1{,}197\ n + 0{,}22933\ P$

Carga: $G = 124{,}013 + 0{,}399\ m + 0{,}11467\ Q$

Mixtos: $G = 124{,}013 + 1{,}197\ n + 0{,}399\ m + 0{,}22933\ R$

Siendo n, el número de ejes de vehículos de pasajeros,
m, el número de ejes de vagones de carga,
P, el peso total del tren de pasajeros en ton.
Q, el peso total del tren de carga en ton.
R, el peso total del tren mixto en ton.

Para simplificar la aplicación de estas fórmulas a algunos casos prácticos, supondremos trenes de pasajeros compuestos de coches de 4 ejes con 25 ton. de peso, y capacidad para 50 pasajeros; remolcados por locomotoras de 60 ton.; con ténder de 30 ton. y furgón de cola de 15 ton. En estas condiciones, el peso muerto de un tren vacío compuesto de V vehículos, será

$$P_v = 60 + 30 + 15 + 25\ V = 105 + 25\ V.$$

Si hay 50 asientos por vehículo, a 70 Kg. por pasajero, serían 3,5 ton., y si el aprovechamiento de los asientos es α, el peso útil del tren será $3{,}5\ \alpha V$; y el peso bruto total

$$P = 105 + 25\ V + 3{,}5\ \alpha\ V$$

y como se trata de vehículos de 4 ejes, $n = 4\ V$, con lo cual, sustituyendo estos valores, en la fórmula, resulta:

$$G = 124{,}013 + 1{,}197\ (4\ V) + 0{,}22933\ (105 + 25\ V + 3{,}5\ \alpha\ V)$$
$$= 148{,}092 + 10{,}521\ V + 0{,}803\ \alpha\ V$$

Si llamamos t la tarifa cobrada por pas.-Km. los productos serán $50\ \alpha V t$; y la utilidad dejada por el tren en un Km. de su recorrido será

$$U_{pas} = (50\,t - 8{,}026)\ \alpha\ V - 148{,}092 - 10{,}521\ V$$

Para los trenes de carga, supondremos V_1 vagones de 4 ejes, con 12 ton. de tara y 30 ton. de capacidad; remolcados por locomotoras de 80 ton., con tender de 35 ton. y furgón de cola de 20 ton. Si el aprovechamiento de la capacidad es β, tendremos:

$$Q = 80 + 35 + 20 + 12\ V_1 + 30\ \beta\ V_1$$
$$= 135 + 12\ V_1 + 30\ \beta\ V_1$$
$$G = 124{,}013 + 0{,}397\ (4\ V_1) + 0{,}11467\ (135 + 12\ V_1 + 30\ \beta\ V_1)$$
$$= 139{,}493 + 2{,}972\ V_1 + 3{,}44\ \beta\ V_1$$

Tomando una tarifa media t_1 para la carga de este tren, los importes que nos procurará $30\ \beta\ V_1\ t_1$ y por lo tanto, la utilidad resultante es

$$U_{carga} = (30\,t_1 - 3{,}44)\ \beta\ V_1 - 139{,}493 - 2{,}972\ V_1$$

Finalmente, para un tren mixto, formado con los V vehículos de pasajeros más los V_1 de carga de los dos trenes analizados antes, remolcados por la locomotora del tren de carga, se tendrá:

$$R = 135 + 25\ V + 12\ V_1 + 3{,}5\ \alpha\ V + 30\ \beta\ V_1$$

$$\therefore$$

$$G_{mixto} = 124{,}013 + 1{,}197\ (4\ V) + 0{,}399\ (4\ V_1) +$$
$$+ 0{,}22933\ (135 + 25\ V + 12\ V_1 + 3{,}5\ \alpha\ V + 30\ \beta\ V_1)$$
$$= 154{,}972 + 10{,}521\ V + 4{,}348\ V_1 + 0{,}803\ \alpha\ V + 6{,}879\ \beta\ V_1$$

tomaremos este gasto con el originado por la corrida aislada del tren de pasajeros y del de carga, que dan, por suma

$$G_{pas} + G_{carga} = 287,585 + 10,521 V + 2,972 V_1 + 0,803 \alpha V + 3,44 \beta V_1$$

Tendremos así para expresión de la diferencia entre los gastos en ambos casos, o economía producida por el tren mixto,

$$\Delta G = 132,613 - 1,376 V_1 - 3,439 \beta V_1$$

Los términos negativos resultan de la mayor velocidad a que se supone transportada la carga contenida en los vehículos V_1 cuando éstos se llevan a la velocidad del tren mixto, superior a la del tren de carga, razón por la cual se origina un mayor gasto, que, evidentemente, puede llegar hasta no hacer aconsejable la solución de un tren único.

En cuanto a los productos, es lógico suponer que si el tren de pasajeros era expreso, a mayor velocidad y con menos puntos de parada que el mixto, la tarifa media de los pasajeros en él, puede haber sido superior a la del tren mixto, (por ejemplo, por no llevar incluídos coches de segunda), en cuyo caso, para el tren mixto hay que suponer otra inferior; entonces los productos de este tren, serían, respecto a pasajeros, $3,5\ t_2\ \alpha V$, siendo $t_2 < t$, y quedando los mismos para las cargas; en resumen, los productos habrán mermado en

$$3,5\ (t - t_2)\ \alpha V$$

valor que debe ser inferior a la economía obtenida en los gastos: luego

$$132,613 - 1,376 V_1 - 3,439 \beta V_1 > 3,5\ (t_1 - t_2)\ \alpha V$$

$\therefore$

$$1,376 V_1 + 3,439 \beta V_1 + 3,5\ (t_1 - t_2)\ \alpha V < 132,613$$

expresión final que nos permite estudiar la influencia relativa de algunos factos cuya presencia en estos problemas no siempre se tiene en debida cuenta.

Más interesante es el caso de sustituir un tren de pasajeros mas un tren mixto, ambos mal aprovechados, con un nuevo tren mixto, de otra composición y mejor cargado. El número de vehículos es entonces variable, lo mismo que los aprovechamientos; pero el aná-

lisis desarrollado en las líneas anteriores, permitirá fácilmente al lector plantear los problemas respectivos y encontrar su solución.

Un problema, en cierto modo inverso del que dejamos expuesto, es el de buscar cuándo *un* tren pesado y mal cargado, puede sustituirse por *dos* o más trenes de menor peso y mayor carga útil. A priori, la suma de los gastos de dos o más trenes, es superior a los del tren único, pero las locomotoras pueden ser menos pesadas y siendo también más liviano todo el convoy, la tarifa individual por pasajero puede ser rebajada, lo que unido al mayor número de trenes, que implica una mejora de horario, es susceptible de provocar un aumento de tráfico que conduzca finalmente a mayores utilidades. La sustitución de los largos trenes a vapor por varios coches automotores, es un ejemplo de hasta dónde puede llegarse en el empleo de un tren de tipo único, formado por un coche único con tarifa única.

(*Continuará*)

BIBLIOGRAFIA

DE LIBROS, FOLLETOS Y REVISTAS, RECIBIDOS EN LA SOCIEDAD CIENTÍFICA ARGENTINA

POR C. C. D.

TIMOSHENKO (S.). *Théorie des Vibrations* (versión francesa por A. de Riva-Berni). Un tomo (6 × 25), con 142 páginas conteniendo 229 figuras en el texto. Ch. Béranger. París, 1939, 250 francos.

El autor es profesor de mecánica teórica y aplicada en la Stanford University de California. La versión francesa actual es de la 2ª edición inglesa.

Después de tres prefacios: uno de M. F. Campus, profesor de la Universidad de Lieja, y dos del autor (referentes a la 1ª y a la 2ª edición), se desarrolla el tema de seis capítulos y un apéndice que estudian las vibraciones armónicas de un sistema de un grado de libertad, las vibraciones de los sistemas de características no lineales o que poseen varios grados de libertad; las de torsión, y las laterales de los árboles, de los cuerpos elásticos. El apéndice se refiere a los instrumentos para medir las vibraciones.

La primera edición de esta obra es bien conocida por los especialistas; esta segunda trae varias reformas llamadas a poner la obra al día y también hacerla más cómoda para la enseñanza. Trae varias agregados; por ejemplo, un estudio de las vibraciones forzadas, con amortiguaciones; vibraciones auto excitatrices; estudio general de los sistemas con amortiguamiento viscoso; movimiento en torbellino de los árboles, motivados por histéresis, etc.

BIGGERI (CARLOS). *Sobre las integrales determinantes ordinarias y generalizadas*. Un folleto de 86 páginas (15½ × 22½). Córdoba. Imprenta de la Universidad, 1939.

El doctor Carlos Biggeri es una de las esperanzas de la Ciencia Matemática argentina. No hace mucho fué becado por la Comisión Nacional de Cultura para seguir en París cursos dictados por grandes profesores.

Acaba de publicar un estudio sobre las integrales ordinarias y generalizadas del que damos a continuación un resumen. El autor llama *integral determinante generalizada a la del tipo*

$$\int_0^{\infty} a(t) \, . \, e^{-\lambda(t) \, . \, z} \, . \, dt$$

donde $\lambda(t)$ es una función real de la variable real t, creciente (no necesariamente monótona) y cuyo límite, para $t \rightarrow \infty$, es $+\infty$. Si $\lambda(t) \equiv t$ se obtienen las integrales determinantes ordinarias (Laplace). Esta integral generalizada se destaca, por su importancia, entre los infinitos algoritmos para engendrar funciones analíticas, al lado de las series potenciales y de las series de Dirichlet.

No siempre una integral determinante generalizada se puede reducir a una ordinaria. Por ej. ello ocurre si $y = \lambda(t)$ representa, en coordenadas cartesianas, una curva que tenga, entre otros arcos, infinitos segmentos paralelos al eje real t.

Aun cuando el autor adopta como concepto de integral el de Cauchy, todos los teoremas que demuestra en esa monografía se verifican para las integrales Laplace-Stieltjes, cuyo tipo es

$$\int_0^\infty e^{-tz} . d\varphi(t)$$

siendo $\varphi(t)$ una función real de variable acotada en todo intervalo finito del semieje real y positivo t.

En una *Introducción,* el autor precisa, en detalle, la posición y relaciones mutuas de los teoremas que demuestra en su trabajo; introduce las nociones de abscisas de convergencia uniforme y de holomorfismo de una integral determinante. Además trae un teorema referente al comportaminto de la función analítica definida por una integral determinante en las proximidades de su recta de convergencia uniforme. Este teorema es de la naturaleza del primer teorema de Picard sobre las funciones analíticas uniformes con punto singular esencial aislado. El doctor Biggeri indica varios casos en que las abscisas de convergencia simple y de holomorfismo coinciden — casos que se refieren al comportamiento de la función generatriz.

Señala también una condición no necesaria pero sí suficiente para que se verifique la coincidencia de estas dos últimas abscisas. A pesar de que el autor no hace en este trabajo el estudio sistemático de las singularidades de las funciones analíticas definidas por integrales determinantes, indica las relaciones existentes entre los teoremas demostrados en él y la "teoría de las singularidades". Y así, entre otras cosas, explica cuál es la *razón funcional* para que el punto real de la recta de convergencia simple de una integral determinante, cuya generatriz es real y no negativa, sea singular (teorema de Landau).

Después de la referida *Introducción,* en la primera de las cuatro partes que componen el estudio del doctor Biggeri, éste demuestra varias fórmulas (universales) para el cálculo de las abscisas de convergencia simple y absoluta de toda integral determinante generalizada; y da varios criterios suficientes unos, pero no necesarios, otros necesarios y suficientes, para reconocer cuando se verifica la igualdad de dichas abscisas, criterio que son interesantes en la *Teoría de las singularidades* ya que a cada uno de ellos corresponde otro criterio para reconocer la singularidad de un punto perteneciente a la recta de convergencia simple.

Varias fórmulas para el cálculo de la abscisa de convergencia uniforme de toda integral determinante generalizada, de las que cuatro son generales y otra supone, esencialmente, que la abscisa sea positiva, son dadas en la segunda de las partes que componen el trabajo; en ella se plantea, también, entre otros, el siguiente problema: ¿cómo se obtienen criterios aptos para reconocer la igualdad de las abscisas de convergencia uniforme y simple y la igualdad de las abscisas de convergencia uniforme y absoluta?

En la "tercera" parte se demuestran varios teoremas relativos a los ceros de las funciones analíticas definidas por integrales drterminantes. Finalmente en la última parte del trabajo, el doctor Biggeri demuestra directamente un teorema sobre los puntos singulares de las funciones definidas por integrales del tipo indicado más arriba, análogo al de Fekete perteneciente a la teoría de las series de Dirichlet. Ya en un trabajo anterior, el autor había indicado un criterio necesario y suficiente para reconocer la regularidad o singularidad de un punto periférico, con el cual se demuestran brevemente varios teoremas nuevos y se simplifican las demostraciones de otros conocidos; la demostración del teorema traído en esta última parte del trabajo, permite ver, por comparación, la ventaja que, desde el punto de vista de la síntesis, reporta tal criterio.

El trabajo termina planteando varias generalizaciones de los resultados obtenidos.

Es satisfactorio, comprobar estos progresos de los estudios matemáticos entre nosotros.

BIBLIOGRAFIA

DE LIBROS, FOLLETOS Y REVISTAS, RECIBIDOS EN LA ACADEMIA N. DE C. E., F Y N.

POR C. C. D.

Actualités Scientifiques et Industrielles. Folletos (16 1/2 cm. × 25 cm), editados por Hermann & Cía., París. Número de páginas y precios variables. Se detallan a continuación los últimos recibidos, siguiendo la numeración consecutiva.

Nº 633. — LEGENDRE (RENÉ). *Le Poisson.* 48 páginas con algunas figuras. 1938. 10 francos.

Fascículo XIV de la serie « Nutrition », dirigida por Emilio F. Terroine. El autor es director del Laboratorio de Fisiología comparada, etc.

Trata de las estadísticas de las pescas marítimas; la composición, valor alimenticio de los peces.

Una buena bibliografía termina el trabajo.

Nº 639. — LOOSLI-USTERI (M.). *Le Diagnostic Individuel chez l'enfant au moyen du Test de Rorschach.* 94 páginas. 1938. 20 francos.

Fascículo III de la serie « Psycho-Biologie de l'enfant », dirigida por Henri Wallon, profesor en el Collège de France; el autor es encargado de cursos en el Instituto J. J. Rousseau de Ginebra.

Después de una Introducción explicativa y de una exposición sobre el referido « test », expone los resultados de su aplicación; un estudio estadístico de los mismos; la constancia de dichos resultados y su interpretación.

Las conclusiones son de que el « test » en cuestión puede utilizarse con niños de por lo menos 9 años de edad; que él ilustra respecto de la inteligencia y afectividad del sujeto; que proporciona señalados servicios en el diagnóstico afectivo (dominio en el que la experimentación es particularmente delicada). Pero eso bajo ciertas condiciones.

Nº 651. — ROSTAND (JEAN). *La Parthénogenèse des vertébrés.* 62 páginas; 18 francos.

Fascículo I de la serie « Biologie et Reproduction », dirigida por el autor.

Después de recordar la definición y caracteres de la partenogénesis natural y artificial, el autor resume lo esencial de los conocimientos

adquiridos hasta el presente, relativamente a esa función, en la rama de los vertebrados, empezando por los batracios; sigue luego por los peces, y después por los pájaros y mamíferos. La bibliografía es abundante.

Nº 653. — FLEURY (PIERRE). *Lecons de Métrologie.* Mesure des Temps, Vitesses, *Débits.* 112 páginas con 93 figuras y láminas; 30 francos. 1938.

Es el tomo III de estas lecciones. Trata los relojes mecánicos y eléctricos, cronógrafos, taquímetros, acelerómetros, estrobocopios, anemómetros e hidrómetros.

Inicia un capítulo relativo a los principios de la medida del tiempo.

Estas lecciones comportan 7 fascículos: los dos que preceden al actual, se referían a generalidades sobre las medidas (fasc. I) y las medidas geométricas (fasc. II).

Nº 654. — MATRICON (M.). — *Application de la Méthode du Champ self-consistent aux Noyaux atomiques.* 90 páginas; 25 francos; 1938.

Es el fascículo XXIII de la serie « Physique Théorique », dirigida por L. de Broglie.

El autor es ingeniero de la Cia. General de Radiología, y, a la vez, doctor en ciencias.

En la Introducción, hace presente que si bien todos los autores han deseado estudiar los núcleos atómicos conteniendo más de cuatro partículas, utilizando un método de más precisión que el estadístico, se valieron del campo self-consistente. Señala la forma deficiente con que emplearon ese método; por eso considera necesario previamente rever sistemáticamente toda la teoría aplicándola a un conjunto constituído por dos especies de partículas distintas, entre las que obran fuerzas de intercambio, en diversas maneras.

Primero hace un estudio analítico del método del campo self-consistente. Luego, se ocupa de la integración de las ecuaciones de dicho campo y trae una aplicación numérica al núcleo de helio.

Cierra el folleto la bibliografía del tema.

Nº 655. — LEIGHTON (PHILIP A.). *The Determination of the Mechanism of Photochemical Reactions.* 75 páginas con algunas figuras; 18 francos; 1938.

Constituye el fascículo II de la serie « Photochimie », dirigida por W. Albert Noyes, Jr., doctor en ciencias y profesor de Química-física en la Universidad de Rochester, N. York. El autor Leighton es profesor de Química en « Stanford University », California, U. S. A.

Consta este folleto de una Introducción explicativa de su objeto, seguida de cinco capítulos, de unas conclusiones y de una bibliografía, el todo escrito en idioma inglés. Los tres últimos de esos capítulos ilustran respecto del alcance y de las limitaciones del método usado para la determinación del mecanismo de las reacciones fotoquímicas y recalca todo lo que aun queda por hacer, tanto teórica como prácticamente.

Nº 656. — ROLLEFSON (GERHAND K.). *The Photochemistry of the Halogens.* 56 páginas; 20 francos; 1938.

Es el fascículo IV de la serie recién referida. El autor es profesor adjunto de química, en la Universidad de California Berkeley, California.

El contenido del folleto trata, sucesivamente, de la naturaleza de los procesos primarios; reacciones con hidrógeno; reacciones que importan protóxido de carbono; y reacciones de substitución, de adición, etc. de halógenos.

También este fascículo está escrito en inglés y trae la correspondiente bibliografía.

Nº 658. — BREMER (FREDERIC). *L'Activité Electrique de l'Ecorce cérébrale.* 48 páginas, con varias figuras y 14 láminas fuera de texto; 15 francos; 1938.

Es el fascículo 3 de la « Biblioteca de la Sociedad Filomática de París ». El autor es profesor en la Universidad de Bruselas.

En una introducción se exponen los antecedentes de esos estudios sobre la actividad eléctrica de la corteza cerebral. Se indica después el método seguido y los datos anatómicos. Otro capítulo se ocupa del reposo y los grados de actividad de la corteza, exponiendo las observaciones hechas en el hombre y en el animal. Y así se tratan después la naturaleza de las ondas eléctricas corticales, la actividad sensorial y la actividad motriz de la corteza. Finalmente se encara lo relativo a la epilepsia, al sueño y narcosis.

Después de todo esto el autor da las conclusiones de su trabajo; considera que la exploración metódica de las actividades eléctricas de la corteza cerebral, dará a la fisiología una revelación comparable a la que le dió la introducción de los métodos histológicos de impregnación fibrilar.

Acompaña una nutrida bibliografía.

Nos. 662 y 702. — KAHANE (ERNEST) y LÉVY (JEANNE). *Choline-Neurine. Acétylcholine.* Dos folletos de 62 páginas cada uno; precio 15 francos cada uno; 1938.

Constituyen los fascículos I y II de « Biochimie de la choline et de ses dérivés ».

Esta publicación tiene por objeto esencial la descripción de la colina, y comporta un estudio químico y fisiológico detallado así como los métodos de extracción, de caracterización y de dosaje químico y farmacológico. El fascículo Nº 662, después de una Introducción, habla de la química de la colina, de sus sales y de su fisiología; luego se ocupa del histórico, preparación, propiedades, sales, reacciones y propiedades fisiológicas y farmacológicas de la neurina. Al final una copiosa bibliografía.

El fascículo Nº 702 trata la química de la acetilcolina; la estudia como constituyente normal del organismo y expone el papel que desempeña del punto de vista fisiológico.

También acompaña una bibliografía del tema, que ocupa 17 páginas.

N° 663. — SPINDLER (HENRY). *Les Nombres Structuraux en chimie.* 32 páginas; 1938; 10 francos.

El autor procura estudiar las propiedades físico-químicas de la materia con la introducción de los « números estructurales », noción ligada a la estructura o edificios moleculares según la disposición y número de los átomos constituyentes.

N° 707. — JOUNIAUX (A.). *Les origines francaises de la Chimie Analytique.* Fascículo VI de la serie « Exposés de Chimie Analytique », dirigida por el autor, profesor de la Facultad de Ciencias de Lila. 60 páginas; 1938; 15 francos.

El autor se propone poner en evidencia que las disciplinas de Análisis Químico han sido creadas, imaginadas e inauguradas por sabios franceses. Así la gravimetría ha salido de Lavoisier y de Proust. Gay Lussac ha creado el Análisis volumétrico; a ese nombre cabe agregar los de Margueritte y de Du Pasquier. En el dominio de los métodos físicos, a Baumé se debe la utilización de las medidas de densidad para la determinación de la concentración de las soluciones alcalinas.

N° 721, 722, 723. — *Reunion Intérnationale de Physique-Chimie-Biologie.* Congres du Palais de la Découverte. París, octubre 1937. Química General, Química Mineral, Química Orgánica.

El primer folleto (N° 721) trae relaciones de W. HENRI sobre *La Predisociacion*; de W. ALBERTO NOYES (I.) sobre los *procesos primarios en las reacciones fotoquímicas*, y su discusión; de F. LONDON sobre la *teoría de valencia en mecánica cuántica*; *supraconductibilidad en las combinaciones aromáticas.*

Total, 32 páginas; precio 10 francos; París, 1938.

El fascículo 722 trae las siguientes comunicaciones: VAN ARKEL, *La preparación de los metales puros*; U. R. EVANS, *Estado de superficie de corrosión*; W. L. BRAGG, *La clasificación de los silicatos y alúminosilicatos naturales*; N. PARRAVANO, *Génesis y propiedades de los óxidos.*

Total, 72 páginas; precio 20 francos.

El fascículo 723, trae trabajos de: J. B. BONINO, *Los espectros de Raman en química orgánica*; KURT H. MEYER, *Estado actual de nuestros conocimientos de la constitución, del modelo cristalográfico y de la textura de la celulosa*; L. RUZICKA, *Sobre la arquitectura de las politerpenas.*

Total, 56 páginas; precio 17 francos.

Index Generalis: 1939. Anuario General de las Universidades, Escuelas Superiores, Academias, Archivos, Bibliotecas, Institutos Científicos. Jardines Botánicos y Zoológicos, Museos, Observatorios, Sociedades Culturales, dirigido por S. de Montessus de Ballore. Masson & Cie. París, 1939. 2830 páginas (12 × 18).

Esta edición del conocido Anuario trae tablas que facilitan su empleo: Una lista de los premios Nobel, otra de los doctores *honoris causa.* otra de intercambios intelectuales; de los principales editores del mundo:

Una tabla alfabética del personal sabio o enseñante (unas 15000 referencias); una tabla geográfica, por países, de las ciudades donde existen Instituciones Científicas; otra tabla geográfica alfabética que indica para cada ciudad todos los establecimientos científicos, y, para los Estados Unidos de Norte América, todos los establecimientos cuyo nombre difiere del de la ciudad.

Además, una tabla general de las materias, y un Suplemento.

La parte relativa a la Argentina ha sido puesta al día.

Un prefacio firmado por A. Lacroix, secretario perpetuo de la Academia de Ciencias del Instituto de Francia, hace constar las mejoras realizadas en la presente edición y, entre otras, señala las informaciones relativas a la U. R. S. S.

SOCIOS ACTIVOS

Abrines, Héctor Aníbal
Aguilar, Félix
Albizzati, Carlos M.
Alessi, Juan M.
Alvarez, Raúl J.
Alvarez de Toledo, Belisario
Allende Lezama, Luciano P.
Anastasi, Camilo
Anchorena, Juan E.
André, Enrique de
Andrioletti, Juan Luis
Añón Suárez, Vicente
Aparicio, Francisco de
Aráoz Alfaro, Gregorio
Arce, Manuel J.
Armani, Aquiles
Arnaudo, Silvio J.
Avila Méndez, Delfín
Bado, Atilio A.
Bachmann, Ernesto
Baglietto, Eduardo E.
Balbiani, Atilio
Baliani, Luis M.
Bancalari, Agustín
Bandoni, Alfredo J.
Barabino Amadeo, S.
Bargna, Juan L.
Barilari, Mariano J.
Barral Souto, José
Barrancos, Leónidas A.
Becke, Alejandro von der
Berrino, Juan B.
Bertino, José Carlos
Besio Moreno, Nicolás
Bianchi Lischetti, A.
Biggeri, Carlos
Blaquier, Juan
Boaglio, Santiago
Bolognini, Héctor
Bonanni, Cayetano A.
Bontempi, Luis
Bordas, Alejandro F.
Bordenave, Pablo E.
Borzacov, Vladimir
Borruat, Luis A.
Borzi, Ana María
Bosch, Gonzalo
Bosisio, Anecto J.
Bottaro, Juan C.
Bozzini, Luis (h.)
Briano, Juan A.
Buich, Raúl
Bunge, Juan C.
Buontempo, Guillermo
Burkart, Arturo
Busso, Eduardo B.
Butty, Enrique
Buzzo, Alfredo
Caillet Bois, Teodoro
Calandra, Raúl E.
Canale, Humberto
Canal Feijoo, Bernardo
Capelli, Pedro F.
Carabelli, Juan José
Carbia, Rómulo D.
Carbone, Esteban
Carbonell, José J.
Cárcova, Enrique de la
Carelli, Antonio
Carelli, Humberto H.
Caride Massini, Pedro
Carman, Ernesto
Carrea, Juan Ubaldo
Casacuberta, Antonio
Castellanos, Alberto
Castello, Manuel F.
Castiñeiras, Julio R.
Ceppi, Héctor
Cernuschi, Félix
Clos, Enrique C.
Cock, Guillermo E.
Coni Bazán, F. A.
Curti, Orlando P.
Curutchet, Luis
Chanourdic, Enrique
Chizzini Melo, Aníbal F.
D'Ascoli, Lucio
Dassen, Claro C.
Dasso, Héctor
Dasso, Ricardo L.
De Cesare, Elías A.
De Fina, Armando L.
De la Iní, Juan E.
Dellepiane, Luis J.
Dennler, Jorge
Deulofeu, Venancio
Díaz, Emilio C.
Dieulefait, Carlos E.
Doello-Jurado, Martín
Dobranich, Jorge W.
Domínguez, Juan A.
Dubecq, Raúl E.
Dueñas, José
Duhau, Luis
Dupont, Enrique
Durañona y Vedia, A.
Durrieu, Mauricio
Escudero, Antonio
Escudero, Pedro
Faré, Santo S.
Fernández, Alberto J.
Fernández Díaz, A.
Fernández Long, S.
Figini, Angel
Figuerero, Hernando W.
Fischer, Gustavo Juan
Flores, Emilio M.
Floriani, Luis
Florit Carlos J.
Fossa Mancini, E.
Franceschi, Alfredo
Fürnkorn, Divico A.
Gadda, Carlos Manuel
Galmarini, Alfredo G.
Gando, Alfredo R.
Gandolfi Herrero, Augusto
Gandolfo, José S.
Gascón, Alberto
Gaspar, Fernando L.
Géneau, Carlos E.
Gerardi, Donato
Ghigliazza, Sebastián
Giagnoni, Bartolomé E.
Giannone, José
Gradín, Carlos
Grieben, Arturo
Gutiérrez, Ricardo J.
Haussler, Emilio
Herbin, Luis A.
Hermitte, Enrique
Herrera Vegas, M.
Herzer, Bernardo
Hickethier, Carlos F.
Hofmann, Herbert
Houssay, Bernardo A.
Hoyo, Arturo
Igartúa, Luis María
Irigoyen, Luis H.
Isetta, José
Ivanissevich, Ludovico
Jorge, José M.
Jakob, Cristofredo
Kervor, Juan B.
King, Diarmid O.
Kinkelin Pelletán, J. C. de
Knoche, Walter
Kraglievich, Nicolás T.
Krapf, Eduardo
Labarthe, Julio
Lagunas, Simón
La Menza, Francisco
Laporte, Luis B.
Larco, Esteban
Lasso, Alfredo L.
Latzina, Eduardo
Lignières, Roberto
Lizer y Trelles, C. A.
Lombardi, Alberto
Loudet, Osvaldo
Loyarte, Ramón G.
Lugones, Arturo M.
Llauró, José
Mac Donagh, E. J.
Magnin, Félix J.
Magnin, Jorge
Mainini, Carlos
Mallol, Emilio
Mamberto, Benito
Marcó del Pont, E.
Marchionatto, Juan B.
Martignone, Eduardo
Marotta, F. Pedro
Marotta, R. Armando
Mata, Leopoldo
Méndez, Julio
Meoli, Gabriel
Meoli, Humberto
Mercau, Agustín
Meriggi, Juan C.
Mermoz, Francisco A.
Molfino, José F.
Molina Carranza, L.
Molle, Clotilde C.
Montes, Vicente E.
Moragues Bernat, Jaime
Moreno, Evaristo V.
Nágera, Juan José
Natale, Alfredo
Natale, Ernesto
Negrete, Lucía
Negri, Mario L.
Nielsen, Juan
Novelli, Armando
Ogloblin, Alejandro
Oliveri, Alfredo E.
Ortega Belgrano, Raúl
Ortiz, Aníbal A.
Ortiz de Rosas, Jorge
Otamendi, Gustavo
Ottonello, Héctor
Páez, José María
Page, Franklin Nelson
Paitoví, y Oliveras, A.
Parodi, Edmundo
Parodi, Lorenzo R.
Parodi, Rodolfo
Pasman, Rodolfo E.
Pastore, Franco
Paz Anchorena, José M.
Pérez Hernández, A.
Perrone, Cayetano
Pestalardo, Agustín
Pini, Aldo S.
Platz, Hubert
Podestá, Juan Carlos
Posadas, Carlos
Quinos, José Luis
Quinterno, Bruno F.
Quiroga, Pedro R.
Raimondi, Alejandro
Raffo, Bartolomé M.
Ramaccioni, Danilo
Ramallo, Carlos M.
Ratto, Héctor R.
Rebuelto, Antonio
Rebuelto, Emilio
Reece, William Asher
Repetto, Blas Angel
Repossini, José
Ringuelet, Emilio J.
Rissotto, Atilio A.
Robles, Angel A.
Rodríguez Aravena, S.

Rodríguez, Germinal
Rodríguez, Miguel
Roffo, Angel H.
Roffo, Juan
Roldán, Raimundo
Romero Brest, Enrique
Rokotnitz, Otto
Rospide, Juan
Rossell Soler, Pedro
Ruata, Luis E.
Ruíz Moreno, Isidoro
Ruiz Moreno, Adrián
Rumi, Tomás J.
Sabaria, Enrique
Salomón, Hugo
Sánchez, José Ricardo
Sánchez, Gregorio L.
Sánchez Díaz, Abel
Sánchez Sorondo, M. G.
Sanromán, Iberio
Santángelo, Rodolfo
Sarhy, Juan F.
Sarrabayrouse, Eugenio
Savon, Marcos A.
Schnack, Benno J.
Schulz, Guillermo
Selva, Domingo
Selzer, Samuel
Sesma,, Angel
Sheahan, Juan F.
Silva, Leónidas L.
Simonoff, Miguel
Simons, Hellmut
Siri, Luis
Sobral, Arturo
Solari, Emilio F.
Solari, Miguel A.
Sordelli, Alfredo
Soler, Frank L.
Spinetto, David J.
Spota, Víctor J.
Storni, Segundo R.
Taiana, Alberto F.
Taiana, Jorge
Tarragona, José
Tello, Eugenio
Torre Bertucci, Pedro
Torello, Pablo
Tossini, Luis
Trelles, Rogelio A.
Trucco, Sixto E.
Valeiras, Antonio
Valentini, Argentino
Valentinuzzi, Máximo
Vallebella, Colón B.
Vanossi, Reinaldo
Varela Gil, José
Vecchi, Arístides de
Vela Huergo, Julio
Verdaguer, Juan
Veyga, Francisco de
Vidal, Eduardo
Vignati, Milciades A.
Villalobos D., C.
Vignaux, Juan C.
Vinardell, Alberto
Volpatti, Eduardo
Wainer, Jacobo
Wauters, Carlos
Wernicke, Raúl
White, Guillermo J.
Williams, Adolfo T.
Zamboni, Agustín
Zappi, Enrique V.
Zavalla, Carlos M.
Zuloaga, Angel M.

SOCIOS ADHERENTES

Bazzanella, José
Cotlar, Mischa
Devoto, Carlos Alberto
Ferramola, Raúl
Folcini, Martín L. G.
García, Eduardo D.
Goyena, Ricardo J.
Gorchs, Agustín C.
Laclau, Juan Pedro
Magne de la Croix, P. A.
Mailhos, Luis E.
Milesi, Emilio Angel
Quevedo Capdevila, Eduardo A.
Recoder, Roberto F.
Repetto, Cayetano
Rusconi, Carlos
Sadosky, Manuel
Somonte, Eduardo
Vistalli, Alina M.
Wechsler, Wolf

CASAS ADHERENTES

Angel Estrada y Cía.
Benvenuto y Cía.
Lutz, Ferrando y Cía.
Hijos de Atilio Massone
Otto Hess, S. A.
T. Gr. "Tomás Palumbo"
Jacobo Peuser, S. A. Ltda.

SOCIO VITALICIO

Huergo, Eduardo María

MIEMBROS PROTECTORES DE LA ORGANIZACION DIDACTICA DE BUENOS AIRES

Anchorena, Juan E.
Besio Moreno, Nicolás
Tornquist, E. y Cía. (Lda.)

SECCION CORDOBA

COMISION DIRECTIVA

Presidente, Dr. Juan Olsacher; Vice-presidente, Dr. Miguel Fernández; Vice-presidente, Ing. Daniel A. García; Secretario de actas, Dr. Guillermo V. Stuckert; Secretario de correspondencia, Prof. Tulio Mácola; Tesorero, Sr. Bernardo Pilotto; Pro-tesorero, Dr. Carlos C. Hosseus; Vocales: Ing. Clodoveo Pascualini; Ing. Jorge E. Bobone; Ing. Luis Chechi; Ing. Ambrosio L. Taravella; Dr. Federico Padula; Dr. José Carlomagno; Dr. Meade L. Zimmer; Sr. Enrique Sparn.

SOCIOS ACTIVOS

Aguiar, Henoch D.
Bobone, Jorge E.
Brandan, Ramón A.
Broglia, Alberto A.
Buteler, Jesús E.
Camilloni, Carlos
Carlomagno, José
Chaudet, Enrique
Checchi, Luis
Deheza, Eduardo
Esteban, Fernando
Fernández, Miguel
Fontana, Lorenzo F.
García, Daniel
Godoy, Salvador A.
Gordillo, Pedro N.
Hosseus, Carlos Curt
Larrauri, Agustín C.
Mácola, Berardo A.
Mácola, Tulio
Mirizzi, Pablo Luis
Ninci, Raúl T.
Olaf Lützow, Holm
Olsacher, Juan
Padula, Federico
Pasqualini, Clodoveo
Peláez J. Gambastiani de

Pilotto, Bernardo
Poncs Laforgus, Carlos
Rothlin, Edwin
Schmiedecke, Augusto
Sparn, Enrique
Stuckert, Guillermo V.
Taravella, Ambrosio L.
Trebino, Natalio
Urciolo, Victorio
Vercello, Carlos
Yadarola, Mauricio L.
Zimmer, Mesde L.

SECCION SANTA FE

COMISION DIRECTIVA

Presidente, Dr. Gustavo A. Fester; Vice-presidente, Dr. José Piazza; Secretario de correspondencia, Ing. Quím. Francisco A. Bertuzzi; Secretario de actas, Ing. Quím. José Cruellas; Tesorero, Ing. Quím. Enrique Virasoro; Vocal 1º, Ing. José Babini; Vocal 2º, Prof. Rolando Hereñú; Vocal suplente 1º, Prof. Julio Salaber; Vocal suplente 2, Ing. Quím. Guillermo Berraz; Encargado de Biblioteca y Canje, Ing. Quím. Rodolfo Rouzaut; Encargado de Publicaciones, Ing. José Babini.

SOCIOS ACTIVOS

Anadón, Leónidas
Ariotti, Juan Carlos
Babini, José
Berraz, Guillermo
Bertuzzi, Francisco A.
Bossi, Celestino
Cerana, Miguel
Claus, Guillermo
Cohan, Marcos
Courault, Pablo
Crouzeilles, A. L. de
Cruellas, José
Christen, Carlos
Christen, Rodolfo G.
Damianovich, Horacio
Falco, Federico
Fester, Gustavo A.
Frenguelli, Joaquín
Gollán, Josué (h.)
Hereñú, Rolando
Hotschewer, Curto
Juliá, Tolrá Antonio
Kleei, Gregorio
Lachaga, Dámaso A.
Mai, Carlos
Mántaras, Fernando
Marelli, Hipólito
Martino, Antonio E.
Montpellier, Luis Marcos
Mounier, Celestino
Muzzio, Enrique
Nigro, Angel
Niklison, Carlos A.
Oliva, José
Peresutti, Luis
Piazza, José
Piñero, Rodolfo
Pozzo, Hiram J.
Ragonese, Arturo E.
Reinares, Sergio
Rouzaut, Rodolfo
Salaber, Julio
Salgado, José
Santini, Bruno L. P.
Schivazappa, Mario
Simonutti, Atilio A.
Tissembaum, Mariano
Urondo, Francisco E.
Virasoro, Enrique

SECCION MENDOZA

COMISION DIRECTIVA

Presidente, Dr. Juan B. Lara; Vice-presidente, Ing. Agr. José Raúl Ponce; Secretario, Ing. Agr. Julio Tolosa (h); Tesorero, Ing. Cayetano C. Piccione; Bibliotecario, Sr. Adrián Ruiz Leal; Vocales: Dr. Eduardo Carette; Dr. Mario Bidone; Ing. Alfredo Rosenthal; Sr. Manuel Tellechea; Ing. Agr. Rafael E. Pontis.

SOCIOS ACTIVOS

Ahumada, Ciro
Anzorena, Jacinto
Ayala Castagnino, G.
Basso, Germinal
Benegas, Raúl
Bidone, Mario
Borsani, Carlos Pablo
Burgoa, Pedro A.
Carette, Eduardo
Castillo, José
Crocs, Francisco M.
Espinosa, Norberto A.
Flor Alvarado, José M.
Galeano, Edgardo
García, José Federico
Godoy Vergelin, G.
Gomensoro, José N.
Granzella, Sinibaldo
Guevara, José R.
Jofré, Alberto L.
Lara, Juan B.
Lucero, Braulio G.
Lugones, Manuel G.
Magistretti, Guillermo
Maveroff, Aquiles
Mayorga, Santiago C.
Navarro Correas, José A.
Paganotto, Juan P.
Pelaia, Dante
Piccione, Cayetano C.
Ponce, José Raúl
Pontis, Rafael E.
Richard, Alfonso E.
Rosales, Ranulfo S.
Rosenthal, Alfredo
Ruiz, Aníbal
Ruiz Leal, Adrián
Sáez Medina, Miguel
San Martín, José Benito de
Serra, Luis Angel
Silvestre, Tomás
Stura, Angel C.
Tellechea, Manuel
Tolosa, Julio (h)
Toso, Juan F.

SECCION LA PLATA

COMISION DIRECTIVA

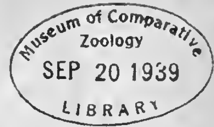
Presidente, Dr. Carlos A. Sagastume; Secretaria, Dra. Juana Cortelezzi; Tesorero, Dr. Carlos T. Teobaldo; Vocales: Ingº Juan Sabato, Ingº Manuel Ucha, Dr. Pedro G. Paternosto, Dr. Alberto E. Sagastume Berra.

SOCIOS ACTIVOS

Alsina Fuertes, Fidel
Amarante, Pedro C.
Angil, Jerónimo
Arroyo Basaldúa, Víctor M.
Basualdo, Washington S.
Bauer, Conrado
Bonet, Luis A.
Brau, Eduardo F.
Canals Frau, Salvador
Cortelezzi, Juana
Crespi Gherzi, Rodolfo A.
Christmann, Federico E.
Daló, Héctor R.
Ferrari, Obdulio J. F.
Gascón, Jorge
Gershánik, Simón
Giovambattista, Humberto
Grisi, Adolfo P.
Loedel Palumbo, Enrique
Mc Loughlin, Rogelio P.
Magliano, Hilario
Marmonti, Angel
Massimino, Blas
Méndez, José D.
Micheletti, Luis A.
Nico, Raúl
Oliva, Virgilio
Paternosto, Pedro G.
Pera, Tomás Carlos
Piatzceck, Ricardo P.
Rodríguez, Marcelo R. N.
Sabato, Juan
Sáez, Francisco A.
Sagastume Berra, A. E.
Sagastume, Carlos A.
Scheggia, Eduardo R.
Teobaldo, Carlos
Toranzos, Fausto L.
Trejo, César A.
Ucha Udabe, Manuel
Vucetich, Danilo C.
Wilkens, Alejandro

SOCIOS CORRESPONDIENTES

Aguilar y Santillán, R.	México
Alvarez, Antenor	Sgo. del Estero
Amaral, Afranio de	San Pablo (Br.)
Avendaño, Leónidas	Lima
Bachmann, Carlos J.	Lima
Bodenbender, Guillermo	Córdoba
Bolívar, Ignacio	Madrid
Bonarelli, Guido	Gubbio (It.)
Borel, Emile	París
Bragg, William Henry	Londres
Bruch, Carlos	Olivos (B. A.)
Cabrera, Blás	Madrid
Campos Porto, Pablo	Río de Janeiro
Carabajal, Melitón M.	Lima
Darmois, Eugenio	Nancy (Fr.)
Darmois, Georges	París
Dávila, Rubén	Santiago (Ch.)
Escomel Edmundo	Arequipa (P.)
Fiebrig, Carlos	Munich (Al.)
Fontecilla Larrain, Arturo	Santiago (Ch.)
Fort, Michel	Lima
González del Riego, Felipe	Lima
Greve, Germán	Santiago (Ch.)
Guinier, Philibert	Nancy (Fr.)
Hadamard, Jacques	París
Hauman, Luciano	Bruselas
Hernández, Juvenal	Santiago (Ch.)
Híjar y Haro, Luis	México
Janet, Pierre	París
Jiménez de Asúa, Luis	Madrid
Keiper, Guillermo	Berlín
Lahille, Fernando	Tarn (Fr.)
Langevin, Paul	París
Levi Civita, Tullo	Roma
Lobo, Bruno	Río de Janeiro
Mardones, Francisco	Santiago (Ch.)
Molina, Enrique	Concepc. (Ch.)
Monjaráz, Jesús E.	México
Moretti, Gaetano	Milán
Oliver Schneider, Carlos	Santiago (Ch.)
Pereira d'Andrade, Lencastre	Nova Goa (I. P.)
Perrin, Tomás G.	México
Perrine, Carlos D.	Córdoba
Pi y Suñer, Augusto	Barcelona
Porter, Carlos E.	Santiago (Ch.)
Reyes Cox, Eduardo	Santiago (Ch.)
Rowe, Leo S.	New York
Shepperd, William R.	Wáshington
Tello, Julio C.	Lima
Valle, Rafael H.	México
Vélez, Daniel M.	México
Villarán, Manuel V.	Lima
Vitoria, Eduardo	Barcelona
Volterra, Vito	Roma



ANALES
DE LA
SOCIEDAD CIENTIFICA ARGENTINA

ADOPTADOS PARA SUS PUBLICACIONES POR LA

ACADEMIA NACIONAL DE CIENCIAS EXACTAS, FISICAS Y NATURALES

DIRECTOR: EMILIO REBUELTO

JUNIO 1939 — ENTREGA VI — TOMO CXXVII

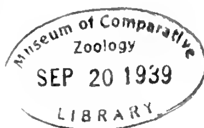
SUMARIO

BUENOS AIRES
CALLE SANTA FE 1145

1939

ADVERTENCIA. — Los colaboradores de los Anales son personalmente responsables de la tesis sustentada en sus escritos. Tienen derecho a la corrección de dos pruebas. Los que deseen tirada aparte de 50 ejemplares de sus artículos, deben solicitarla por escrito. Los manuscritos, correspondencia, etc. se enviarán a la sede social, Santa Fe 1145.

Impreso en los Talleres Gráficos "TOMAS PALUMBO" - La Madrid 321-325 - Buenos Aires



SECCIÓN OFICIAL

DE LA

SOCIEDAD CIENTÍFICA ARGENTINA

SECCIÓN "SANTA FÉ"

Asamblea ordinaria del 29 de Abril de 1939

VISITA A LA DESTILERÍA SAN LORENZO DE Y. P. F.

El 29 de Abril de 1939, bajo la presidencia del Dr. Gustavo A. Fester, se realizó la Asamblea anual ordinaria de la Sociedad Científica Argentina (Sección « Santa Fe») en la que se leyó y aprobó la memoria de la presidencia así como los balances de tesorería correspondientes al período 1938-1939, procediéndose luego a la elección de las autoridodes de la Sección para el período 1939-1940.

Ese mismo día se realizó una visita a la Destilería San Lorenzo de los Yacimientos Petrolíferos Fiscales, situada en las inmediaciones de la localidad del mismo nombre, a la que concurrió un numeroso grupo de socios de la Sección y un grupo de estudiantes de la Facultad de Química Industrial y Agrícola de Santa Fe, invitados especialmente.

La planta visitada constituye un tipo nuevo para el país pues consta de una instalación combinada de topping y cracking de flujo continuo, sin interrupción desde el aceite crudo hasta los productos finales: gasolina, nafta, kerosene, agricol, gasoil y fueloil.

Al principio se somete el crudo al topping, que utiliza una caldera tubular en lugar de la usual batería de cilindros; y las partes pesadas, gasoil y « crudo reducido » se craquean en instalaciones con torres combinadas de expulsión y burbujeo. Los polimerizados, gasoil, de las fases anteriores se craquean igualmente, y al final en fase de vapor. Es también una novedad la instalación para el aprovechamiento de los gases (exceptuando gasolina y supergás) que

se polimerizan térmicamente y que dan una nueva porción de nafta. La planta prevé la elaboración de supergás que se comenzará dentro de poco tiempo.

Los visitantes fueron acompañados y amablemente atendidos por el Sr. Administrador Ing. Julio V. Canessa y los Ings. Bartolomé Bruera y Rómulo Demattei, retirándose muy agradecidos por las finas atenciones recibidas.

INFORME DE LA PRESIDENCIA LEÍDO EN LA ASAMBLEA ORDINARIA, DEL DÍA 29 DE ABRIL DE 1939

Estimados Consocios:

Dando cumplimiento a lo dispuesto por el inc. *h*) del Art. 19 de nuestros Estatutos, elevo a vuestra consideración, un informe sobre la labor realizada, durante el período 1938-1939, y que termina en la fecha.

Comunicaciones científicas

Se realizaron durante este último período, dos sesiones de comunicaciones científicas, donde se presentaron los siguientes trabajos:

Sesión del 21 de Junio:

J. Gollán - O. Mallea. — Determinación de la capacidad de adsorción y bases intercambiables en los suelos.

J. Gollán - V. Nicollier. — Límite líquido en suelos.

G. Kleer. — Algunas rocas de Tierra del Fuego.

G. A. Fester. — La Cordillera Darwin.

J. Cruellas - R. Valetto. — Dosaje del Manganeso con la formaldoxima.

Sesión del día 4 de noviembre de 1938:

J. Babini. — Sobre un tipo de ecuaciones diferenciales lineales.

H. Damianovich. — ¿Puede obtenerse helio molecular a partir de compuestos helio-metal?

J. Gollán - M. Codoni. — Control del análisis mecánico en suelos.

G. A. Fester. — Las materias tanantes del quebracho colorado.

Estas comunicaciones tuvieron lugar en el Museo Tecnológico de la Facultad de Química Industrial y Agrícola, gentilmente cedido por el señor Decano.

Conferencias

En esta actividad, la Sociedad contó con la valiosa colaboración de estudiosos conocidos en el país y extranjero, que versaron sobre temas de singular interés, y que fueron escuchados por numeroso y atento auditorio. Las conferencias, cuyos temas se exponen más abajo, fueron ilustradas con trabajos personales y acompañadas de proyecciones luminosas.

El Dr. Joaquín Frenguelli, disertó el 1º de Julio de 1938 sobre « Qué son y para qué sirven las Diatomeas ».

El 8 de Octubre, habló el Dr. Alfredo Castellanos sobre « El subsuelo de Rosario », y el 14 del mismo mes el Dr. Ricardo A. Gaibrois sobre « Algunos aspectos modernos de la Ingeniería Sanitaria ». La Sociedad lamenta el fallecimiento de este distinguido profesional y hombre estudioso, acaecido en diciembre del mismo año, y oportunamente hizo llegar a sus familiares sus sentimientos.

Biblioteca

Como en años anteriores, la biblioteca ha ido engrosando sus estantes, con los *Anales*, publicaciones por canje, donaciones, y compras; en este último caso limitadas solo a completar la obra « Comptes rendues hebdomadaire des seances de l'Academie des Seiences », por razones pecuniarias.

A la « Nómina de publicaciones existentes en la biblioteca de la Sociedad Científica Argentina, Sección Santa Fé, de 1935 », debemos agregar dos suplementos, compilados por el Ing. Quím. Rodolfo Rouzaut, que tiene a su cargo la sección Biblioteca y Canje, completamente al día, lo que es oportuno destacar. Estos Suplementos Nos. 1 y 2 de fechas Abril de 1937 y Febrero de 1939, ya impresos, se distribuirán en la semana próxima.

Tesorería

Tesorería a cargo del Ing. Quím. Enrique Virasoro, presenta un balance, cuyo detalle se agrega a este informe, y que acusa una entrada bruta de $ 1505.78 (incluso el saldo del ejercicio anterior de $ 283.78) y una salida por $ 1417.45. Vale decir que hay un saldo favorable en los dos últimos años de $ 88.33, depositado en efectivo en Tesorería. Conviene recordar, al tener en cuenta lo exiguo de estos saldos, que esta Sociedad gira a la Central 1.50 $ por cada

socio activo; quedando a favor nuestro solamente $ 0.50; aporte que la experiencia ha demostrado ser muy bajo e insuficiente para el desenvolvimiento de la Sociedad, pues aparte de los gastos de secretaría, debe tenerse presente la necesidad de adquirir revistas, ciertas publicaciones, etc.; proveer la encuadernación de las existentes, etc. Con el fin de subsanar este inconveniente, propondría a los señores consocios convenir con la Central, que a partir del próximo ejercicio se contribuya solo con el 50 % de las entradas por concepto de cuotas y en caso afirmativo, encomendar a las nuevas autoridades las gestiones del caso.

Nuevos socios

Actualmente cuenta la Sociedad con 1 socio honorario: el Dr. Juaquín Frenguelli, y 48 socios activos, habiendo renunciado durante el período 4 socios.

Lamenta sinceramente la Sociedad, el fallecimiento de dos distinguidos consocios: el del Ing. Hugo José Guinle, acaecido en Diciembre de 1938, y el del Dr. Angel Caballero Martín, cuyo deceso se produjo en Febrero del año en curso. En homenaje a ellos solicito nos pongamos de pie.

Sección publicaciones

La Sociedad como es del conocimiento de ustedes, continúa con la práctica de resumir las comunicaciones científicas, conferencias y otras actividades y hacerlas llegar a sus asociados por medio de los Anales de la Sociedad Científica Argentina de Buenos Aires y tirajes aparte. Esta laboriosa tarea está a cargo del Ing. José Babini, que corre con la corrección de pruebas y todo lo referente a los *Anales*.

Antes de dar término a esta lectura conviene destacar con toda justicia la colaboración de la Facultad de Química Industrial y Agrícola que facilitó el salón de actos con sus instalaciones y al Instituto Social de la Universidad del Litoral, porque auspició moral y materialmente la realización de varias conferencias.

Con la excursión de estudios que realizamos en el día de la fecha, a la *Destilería Fiscal de San Lorenzo,* tan gentilmente acordada por su Administrador el Ing. Julio V. Canessa, y el acto que realizamos para considerar el orden del día, cerramos el período de nuestras actividades.

Réstame por fin, esperar de vuestra amabilidad, la consideración de este informe, expuesto sintéticamente sobre la labor desarrollada por la Sociedad, en cuya tarea han intervenido y facilitado los señores miembros de la C. D. y las autoridades de la Junta Central de la Capital Federal; deseando el más franco éxito en sus gestiones a los componentes de la nueva Comisión Directiva, que resulten electos en este acto.

FRANCISCO A. BERTUZZI
Secretario

GUSTAVO A. FESTER
Presidente

COMISIÓN DIRECTIVA
Período 1939-1940

Presidente	Dr. JOSÉ PIAZZA
Vice-Presidente	Ing. FRANCISCO URONDO
Secretario de actas	Ing. Quím. CARLOS CHRISTEN
Secretario de correspondencia . . .	Ing. Quím. RODOLFO CHISTEN
Tesorero	Ing. Quím. GUILLERMO BERRAZ
Vocal titular I	Ing. JOSÉ BABINI
Vocal titular II	Prof. ROLANDO HEREÑU
Vocal suplente I	Prof. JULIO SALABER
Vocal suplente II	Ing. BRUNO SANTINI
Encargado de Publicaciones	Ing. JOSÉ BABINI
Encargado de Biblioteca Canje . .	Ing. Quím. RODOLFO ROUZAUT

SOCIOS ACTIVOS

Anadón, Leonidas
Ariotti, Carlos
Babini, José
Bertuzzi, Francisco A.
Berraz, Guillermo
Bossi, Celestino
Claus, Guillermo
Crouzeilles, A. L. de
Cruellas, José
Christen, Carlos
Christen, Rodolfo
Courault, Pablo
Cerana, Miguel
Cohan, Marcos
Damionovich, Horacio
Falco, Federico
Fester, Gustavo
Gollán, Josué
Hereñú, Rolando
Hochewer, Curto
Juliá Tolrá, A.
Kleer, Gregorio
Lachaga, Dámaso
Mai, Carlos A.
Mántaras, Fernando
Marelli, Hipólito
Mounier, Celestino
Muzzio, Enrique
Marino, Antonio
Montpellier, Luis
Nigro, Angel
Niklison, Carlos
Oliva, José
Piazza, José
Piñero, Rodolfo
Pozzo, Hiram J.
Peresutti, Luis
Reinares, Sergio
Rouzaut, Rodolfo
Ragonese, Arturo
Salaber, Julio
Salgado, José
Schivazappa, Mario
Santini, Bruno
Simonutti, Atilio
Tissembaum, Mariano
Urondo, Francisco
Virasoro, Enrique

BALANCE DE TESORERIA

Ejercicio: 1-V-1938 al 30-IV-1939

DEBE		HABER	
Saldo del ejercicio anterior	$ 283.78	Depositado en cuenta corriente del Banco de la Nación Argentina a la orden de la Sociedad Científica Argentina	$ 1086.00
Importe de 611 recibos de la Sociedad Científica Argentina (Sección Santa Fé)	» 1222.00	Por comisión cobranza de 599 recibos de la Sociedad Científica Argentina (Sección Santa Fe)	» 179.70
		Impresiones varias	» 58.50
		Suscripción por 1 año « Comptes Rendus de l'Academie des Sciences », Francia	» 60.85
		Artículos de librería y gastos varios	» 17.40
		Por gastos de excursiones	» 15.00
		Efectivo en Tesorería	» 88.33
	$ 1505.78		$ 1505.78

Santa Fé, 30 de Abril de 1939.

E. VIRASORO
Tesorero

G. FESTER
Presidente

SOBRE LAS FUNCIONES POLÍGENAS DE VARIABLE COMPLEJA Y BICOMPLEJA HIPERBÓLICA

POR J. C. VIGNAUX

(*Continuación* *)

CAPITULO II

FUNCIONES POLIGENAS DE UNA VARIABLE COMPLEJA HIPERBOLICA

PROPIEDADES GENERALES

14. *Definiciones.* — Diremos que $z = x + jy$ es una *variable compleja hiperbólica*, si x e y son dos variables reales independientes, donde j es la *unidad imaginaria hiperbólica* ($j^2 = +1$).

Si adoptamos un sistema de ejes rectangulares x, y y representamos el número z, por un punto del plano de coordenadas x é y, su campo de variabilidad es el conjunto de puntos en el cual z está dado.

La variable z es acotada, si son acotadas las dos variables reales x e y.

Pongamos

$$\overline{\text{lím}}\ x = \alpha' \qquad \underline{\text{lím}}\ x = \alpha''$$
$$\overline{\text{lím}}\ y = \beta' \qquad \underline{\text{lím}}\ y = \beta'',$$

por definición, los dos números complejos hiperbólicos

$$l' = \alpha' + j\beta' \quad , \quad l'' = \alpha'' + j\beta'',$$

llamaremos respectivamente, el *límite superior* y el *límite inferior* de la variable z.

$$l' = \overline{\text{lím}}\ z \quad , \quad l'' = \underline{\text{lím}}\ z\,.$$

* Ver estos *Anales*, E. IV - T. CXXVII, pág. 241 y sig.

Se tiene

$$\overline{\text{lím}}\ (x + j\, y) = \overline{\text{lím}}\ x + j\, .\, \overline{\text{lím}}\ y$$

y

$$\underline{\text{lím}}\ (x + j\, y) = \underline{\text{lím}}\ x + j\, .\, \underline{\text{lím}}\ y$$

El límite de z se define del mismo modo.

Pongamos

$$\text{lím}\ x = a \quad , \quad \text{lím}\ y = b$$

el número complejo hiperbólico

$$l = a + j\, b$$

será el límite de z.

En este caso resulta

$$l = l' = l'' .$$

La variable compleja hiperbólica $w = u + j v$, es *función* de la variable compleja hiperbólica $z = x + j y$ en el sentido general, si a cada valor de z de un cierto conjunto D, corresponde uno o varios valores para w, bien determinados.

La relación

$$w = f\,(z)$$

entre w y z equivale a las dos relaciones

$$u = u\,(x, y) \quad , \quad v = v\,(x, y)$$

que definen a u y v, como funciones de dos variables reales x e y. Toda función $f\,(z)$, se puede poner por tanto, en la *forma normal*

$$w = f\,(z) = u\,(x, y) + j\, v\,(x, y) \, .$$

La función $f\,(z)$ es *continua* en el punto z_0, si fijado un número $\varepsilon > 0$ arbitrario, existe un número $\delta > 0$, tal que

$$|\, f\,(z) - f\,(z_0)\,| < \varepsilon \quad \text{para} \quad |\, z - z_0\,| < \delta$$

De aquí resulta

$$|\, u\,(z) - u\,(z_0)\,| < \varepsilon \, , \quad |\, v\,(z) - v\,(z_0)\,| < \varepsilon$$

en todo entorno de z_0

$$|\, z - z_0\,| < \delta \, ,$$

por tanto, las funciones $u = u(x, y)$, $v = v(x, y)$ son contínuas en el conjunto (x, y). Recíprocamente ,si las componentes u y v son contínuas la $f(z)$ es función contínua.

Para representar los valores w de la función adoptaremos otro sistema de ejes rectangulares (u, v). Si las componentes u y v son en el dominio D, derivables parcialmente y su *jacobianao*

$$J(u, v) = \begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial x} \\ \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{vmatrix}$$

es distinto de cero, la relación

$$w = f(z) = u + j v ,$$

equivale a dar una correspondencia puntual entre el plano (x, y) y el plano (u, v) de modo que a toda área D del primero, corresponde una cierta área D' del plano w.

Cuando la variable z, está dada en su forma isọtropa: $z = z' j_1 + z'' j_2$, la función $f(z)$ es entonces de la *forma isótropa.*

$$f(z) = j_1 P(z', z'') + j_2 Q(z', z'')$$

donde P y Q son dos funciones reales de las dos variables reales z' y z'' (primer y segunda componente isótropa).

Es por tanto, *condición necesaria y suficiente para que la función w sea contínua que lo sean sus dos componentes isótropas P y Q.*

15. *Derivada radial.* — Sea δ una recta del plano z, que pasa por el punto fijo z del dominio D.

Llamaremos *límite radial* y designaremos con la notación

$$\lim_{h \to 0} (\delta) F(z, h)$$

al límite cuando existe de $F(z, h)$ para $h \longrightarrow 0$ de modo que el punto $z + h$ permanezca siempre sobre la recta δ.

Consideremos la función

$$w = f(z) = u + j v ,$$

dada en el dominio D y supongamos que en cada punto z interior al dominio D el límite radial

$$\lim_{h \to 0} (\delta) \frac{f(z+h) - f(z)}{h},$$

exista para cada recta δ que pasa por el punto z la cual forme con el sentido positivo del eje $0x$, un cierto ángulo φ. A éste número llamaremos la *derivada radial* de $f(z)$ en el punto z, e indicaremos con la notación

$$\left(\frac{dw}{dz}\right)_\delta.$$

Diremos que la función compleja de la variable $z = x + jy$

$$w = f(z) = u(x, y) + j\,v(x, y)$$

es *función polígena hiperbólica*, si u y v son funciones reales de x e y, contínuas y con derivadas parciales contínuas.

Estas funciones tienen la propiedad fundamental, de tener en cada punto, una derivada determinada para cada dirección dada.

En efecto; consideremos la relación incremental

$$\frac{\Delta w}{\Delta z} = \frac{\Delta u + j\,\Delta v}{\Delta x + j\,\Delta y} \qquad \text{con} \qquad \Delta x \mp \Delta y\,,$$

es decir, que el punto variable $z + \Delta z$, no pertenezca a uno de los dos rayos formados por las bicsetrices de los ejes coordenados.

Se tiene

$$\frac{\Delta w}{\Delta z} = \frac{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial u}{\partial y}\Delta y\right) + j\left(\frac{\partial v}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial v}{\partial y}\Delta y\right)}{\Delta x + j\,\Delta y} + \frac{\alpha\,\Delta x + \beta\,\Delta y}{\Delta x + j\,\Delta y}$$

$$= \frac{\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\Delta y}{\Delta x}\right) + j\left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)}{1 + j\,\frac{\Delta y}{\Delta x}} + \eta$$

donde η es un infinitésimo con $(\Delta x, \Delta y)$.

Hagamos ahora tender $\Delta z \longrightarrow 0$ de modo que $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = m$, donde m es la pendiente de la recta δ; se tiene

$$\lim_{h \to 0} (\delta) \frac{\Delta w}{\Delta z} = \frac{\dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{\partial u}{\partial y} m + j\left(\dfrac{\partial v}{\partial x} + \dfrac{\partial v}{\partial y} m\right)}{1 + jm} \qquad [2]$$

puesto que el término complementario $\eta \longrightarrow 0$.

El límite (2) depende no solamente del punto fijo z, sino también del parámetro m.

Para cada punto z y valores variables de m, el primer miembro existe, como función de m. Por tanto, la derivada radial de una función polígena hiperbólica

$$f(z) = u + jv$$

está dada por la expresión

$$\left(\frac{dw}{dz}\right)_m = \frac{1}{1 + jm}\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial x} j\right) + m\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial y} j\right)\right] \qquad [3]$$

es decir

$$\left(\frac{dw}{dz}\right)_m = \frac{1}{1 + mj}\left(\frac{\partial w}{\partial x} + m \frac{\partial w}{\partial y}\right).$$

Debemos excluir las direcciones de las dos bisectrices de los ejes coordenados según las cuales no existen las derivadas radiales; puesto que en este caso el complejo. $1 \pm j$ es un divisor de cero y la relación incremental no existe.

16. *Representación geométrica.* — Si representamos las variables $z = x + jy$, $w = u + jv$ en sus planos respectivos y adoptamos un tercer plano coordenado (X, Y) para representar a la derivada radial

$$\left(\frac{dw}{dz}\right)_m = X + jY ,$$

a cada punto z de z, corresponde un punto w del plano w, mientras que para $X + jY$ resultan infinitos puntos, correspondientes a los diversos valores del parámetro $m \mp 1$.

Estos puntos se encuentran en la hipérbola equilátera de ecuación (*hipérbola derivada*) (1)

$$\left(X-\frac{u_x'+v_y'}{2}\right)^2-\left(Y-\frac{u_y'+v_x'}{2}\right)^2=\left(\frac{u_x'-v_y'}{2}\right)^2-\left(\frac{u_y'-v_x'}{2}\right)^2 \qquad [\alpha]$$

En efecto; de la relación (2) se deduce

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}+m\frac{\partial u}{\partial y}\right)+j\left(\frac{\partial v}{\partial x}+m\frac{\partial v}{\partial y}\right) = (X+jY)\,(1+mj)$$

Separando la parte real y la parte imaginaria, la última igualdad equivale al siguiente sistema

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x}+m\dfrac{\partial u}{\partial y} = X+mY \\[2ex] \dfrac{\partial v}{\partial x}+m\dfrac{\partial v}{\partial y} = Y+mX\,, \end{cases}$$

de donde, eliminando m, resulta

$$(X-u'_x)\,(v'_y-X) = (Y-v'_x)\,(u'_y-Y)$$

es decir

$$X^2-Y^2-(u_x'+v_y')\,X+(u_y'+v_x')\,Y = u_y'\,v_x'-u_x'\,v_y'$$

o bien

$$\left(X-\frac{u_x'+v_y'}{2}\right)^2-\left(Y-\frac{u_y'+v_x'}{2}\right)^2+\left(\frac{u_y'+v_x'}{2}\right)^2-\left(\frac{u_x'+v_y'}{2}\right)^2$$
$$= u_y'\,v_x'-u_x'\,v_y'$$

la cual se puede poner en la forma (α) (2).

El centro de esta hipérbola, tiene por coordenadas

$$\alpha = \frac{1}{2}\,(u_x'+v_y') \quad , \quad \beta = \frac{1}{2}\,(u_y'+v_x')$$

(1) En el caso de las funciones polígenas ordinarias, el *indice* $X+iY$ se encuentra sobre una circunferencia (*círculo de* KASNER).

(2) El Ing. P. Capelli se ocupa del estudio geometrico de la derivada radial de estas funciones en una Nota en curso de publicación en este mismo lugar.

y sus asintotas son las paralelas a las bisectrices de los angulos (X, Y). Si la función es monógena la (α) se reduce a

$$(X - u_x')^2 - (Y - u_y')^2 = 0$$

es decir

$$(X - u_x' + Y - u_y')(X - u_x' - Y + u_y') = 0$$

de donde

$$\begin{cases} X = u_x' \\ Y = u_y' \end{cases}$$

es decir, se reduce a un punto (u_x', u_y').

17. La expresión (3) del número anterior, que define la derivada radial de $f(z)$, se puede poner también en la forma siguiente

$$\left(\frac{du}{dz}\right)_m = \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\right) + \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\right) j\right] \frac{1 + mj}{1 + mj} +$$

$$+ \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y}\right) + \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right) j\right] \frac{1 + mj}{1 + mj} \qquad [1]$$

Si es $m < 1$, ponemos

$$1 + mj = \rho\,(\cosh \varphi + j \operatorname{sen} h \varphi) = \rho\, e^{+j\varphi}$$

$$1 - mj = \rho\,(\cosh \varphi - j \operatorname{sen} h \varphi) = \rho\, e^{-j\varphi}$$

donde φ es el argumento hiperbólico de la dirección m. Se tiene entonces

$$\frac{1 - mj}{1 + mj} = e^{-2j\varphi}$$

Si es $m > 1$; ponemos

$$1 + mj = \rho\,(\operatorname{sen} h \varphi + j \cosh \varphi) = \rho \,.\, j\, e^{j\varphi}$$

$$1 - mj = \rho\,(\operatorname{sen} h \varphi - j \cosh \varphi) = -\rho \,.\, j\, e^{-j\varphi}$$

de donde

$$\frac{1 - mj}{1 + mj} = -e^{-2j\varphi}\,.$$

Por tanto, la fórmula (1) se puede escribir [1]

$$\left(\frac{d w}{d z}\right)_m = \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\right) + \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\right) j\right] +$$

$$\pm \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y}\right) + \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right) j\right] e^{-2j\varphi} .$$

18. *Función monógena hiperbólica.* — Se dice que la función $f(z)$ es *monógena hiperbólica* en el punto z, si la derivada radial es la misma cualquiera sea la dirección m.

Según la fórmual anterior, es suficiente que se tenga

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial u}\right) + j\left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y}\right) = 0 .$$

de donde resultan

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \quad , \quad \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial x}$$

que son las condiciones de monogeneidad hiperbólica.

Sea

$$w = f(z) = u + j v$$

una función polígena hiperbólica en el dominio D.

Pongamos

$$\frac{\partial w}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial x} + j \frac{\partial v}{\partial x} \qquad [1]$$

$$\frac{\partial w}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial y} + j \frac{\partial v}{\partial y} \qquad [2]$$

De la (2) se deduce

$$j \frac{\partial w}{\partial y} = j \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial y} , \qquad [3]$$

y sumando miembro a miembro las igualdades (1) y (3); se tiene

$$\frac{\partial w}{\partial x} \pm j \frac{\partial w}{\partial y} = \left(\frac{\partial u}{\partial x} \pm \frac{\partial v}{\partial y}\right) \pm \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right) j,$$

correspondiéndose los signos superiores e inferiores.

[1] La ecuación (α) del número anterior, se puede obtener también inmediatamente partiendo de esta relación.

Teniendo en cuenta estas dos últimas relaciones la fórmula (1) del número anterior; se puede escribir

$$\left(\frac{d w}{d z}\right)_{\varphi}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial x}+j \frac{\partial w}{\partial y}\right) \pm \frac{1}{2} e^{-2 j \varphi}\left(\frac{\partial w}{\partial x}-j \frac{\partial w}{\partial y}\right).$$

19. *Fórmula isotropa.* — Supongamos ahora que la función $f(z)$ esté dada en su forma isótropa

$$w = f(z) = j_1 P(z', z'') + j_2 Q(z', z'')$$

con

$$z = j_1 z' + j_2 z''.$$

Si el incremento: $\Delta z = j_1 \Delta z' + j_2 \Delta z''$ no es un divisor de cero; se tiene

$$\frac{\Delta w}{\Delta z} = \frac{j_1 \Delta P + j_2 \Delta Q}{j_1 \Delta z' + j_2 \Delta z''} = \frac{\Delta P}{\Delta z'} j_1 + \frac{\Delta Q}{\Delta z''} j_2 \qquad [1]$$

Si las funciones P y Q de las variables reales z', z'', son diferenciables; se tiene

$$\Delta P = \frac{\partial P}{\partial z'} \Delta z' + \frac{\partial P}{\partial z''} \Delta z'' + R \quad , \quad R = \varepsilon' \Delta z' + \varepsilon'' \Delta z''$$

$$\Delta Q = \frac{\partial Q}{\partial z'} \Delta z' + \frac{\partial Q}{\partial z''} \Delta z'' + R \quad , \quad R_1 = \varepsilon_1' \Delta z' + \varepsilon_1'' \Delta z''$$

donde R y R_1 son infinitésimos con $(\Delta z', \Delta z'')$.

Substituyendo estos valores en la (1), resulta

$$\frac{\Delta w}{\Delta z} = \left(\frac{\partial P}{\partial z'} + \frac{\partial P}{\partial z''} \frac{\Delta z''}{\Delta z'}\right) j_1 + \left(\frac{\partial Q}{\partial z'} \cdot \frac{\Delta z'}{\Delta z''} + \frac{\partial Q}{\partial z''}\right) j_2 +$$

$$+ \left(\varepsilon' + \varepsilon'' \frac{\Delta z''}{\Delta z'}\right) j_1 + \left(\varepsilon_1'' + \varepsilon_1' \frac{\Delta z'}{\Delta z''}\right) j_2 \, ;$$

y haciendo tender $|\Delta z| \longrightarrow 0$, de modo que

$$\frac{\Delta z''}{\Delta z'} = m \quad \therefore \quad \frac{\Delta z'}{\Delta z''} = \frac{1}{m}$$

se tiene

$$\left(\frac{dw}{dz}\right)_m = \left(\frac{\partial P}{\partial z'} + \frac{\partial P}{\partial z''} m\right) j_1 + \left(\frac{\partial Q}{\partial z'} \frac{1}{m} + \frac{\partial Q}{\partial z''}\right) j_2$$

$$= \left(j_1 \frac{\partial P}{\partial z'} + j_2 \frac{\partial Q}{\partial z''}\right) + \left(j_1 \frac{\partial P}{\partial z''} m + j_2 \frac{\partial Q}{\partial z'} \frac{1}{m}\right).$$

y finalmente

$$\left(\frac{dw}{dz}\right)_m = \left(j_1 \frac{\partial P}{\partial z'} + j_2 \frac{\partial Q}{\partial z''}\right) + \left(j_1 \frac{\partial P}{\partial z''} + j_2 \frac{\partial Q}{\partial z'}\right)\left(m j_1 + \frac{1}{m} j_2\right)$$

que define la derivada radial de la función (1) en un punto z.

Esta derivada es independiente de m, si se verifica la identidad

$$j_1 \frac{\partial P}{\partial z''} + j_2 \frac{\partial Q}{\partial z'} \equiv 0$$

es decir

$$\frac{\partial P}{\partial z''} = 0 \quad , \quad \frac{\partial Q}{\partial z'} = 0$$

que son las condiciones de monogeneidad hiperbólica, en la forma isótropa.

La derivada está dada, en este caso por la expresión

$$\frac{dw}{dz} = j_1 \frac{\partial P}{\partial z'} + j_2 \frac{\partial Q}{\partial z''} .$$

y la función $f(z)$, toma la forma particular

$$w = f(z) = j_1 A(z') + j_2 B(z'') .$$

20. *Derivada areolar y simétrica.* — Dada la función polígena hiperbólica,

$$w = f(z) = j_1 P(z', z'') + j_2' Q(z', z'') ,$$

llamaré *derivada areolar hiperbólica* a la expresión

$$D f(z) = j_1 \frac{\partial P}{\partial z''} + j_2 \frac{\partial Q}{\partial z''}$$

y *derivada simétrica hiperbólica* a

$$\overline{D} f(z) = j_1 \frac{\partial P}{\partial z'} + j_1 \frac{\partial P}{\partial z''} .$$

Según esto, la derivada radial de w, resulta

$$\left(\frac{dw}{dz}\right) = \overline{D}\, m + \left(m j_1 + \frac{1}{m}\, j_2\right) D\, w\ .$$

relación que liga a estos tres derivadas
Si

$$D w = 0\ ,$$

la función w es monógena, y recíprocamente; por tanto, las funciones monógenas juegan el papel de constantes a los efectos de la derivación areolar.
Puesto que

$$f(z) = u(x, y) + j\, v(x, y) = j_1\, P(z', z'') + j_2\, Q(z', z'')$$

donde

$$P = u + v, \quad Q = u - v$$

$$x = \frac{1}{2}(z' + z''), \quad y = \frac{1}{2}(z' - z'')$$

se tiene

$$\left\{\begin{aligned} \frac{\partial P}{\partial z''} &= \frac{1}{2}\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{1}{2}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{1}{2}\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{1}{2}\frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial Q}{\partial z'} &= \frac{1}{2}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2}\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{1}{2}\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{1}{2}\frac{\partial v}{\partial y} \end{aligned}\right. \qquad [1]$$

Por tanto

$$D w = j_1 \frac{\partial P}{\partial z''} + j_2 \frac{\partial Q}{\partial z'} = \frac{1}{2}\left[\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right] j_1 +$$

$$+ \frac{1}{2}\left[\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x}\ \frac{\partial u}{\partial y}\right] j_2\,,$$

es decir,

$$D w = \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y}\right) + \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right) j\right] = \left(\frac{\partial w}{\partial x} - j\,\frac{\partial w}{\partial y}\right).$$

Del mismo modo, resulta

$$\overline{D}w = j_1 \frac{\partial P}{\partial z'} + j_2 \frac{\partial Q}{\partial z''} = \frac{1}{2}\left[\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial y}\right] j_1 +$$

$$+ \frac{1}{2}\left[\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial y}\right] j_2$$

es decir

$$\overline{D}w = \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\right) + \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\right) j\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial x} + j \frac{\partial w}{\partial y}\right).$$

Según esto, la fórmula que da la derivada radial de una función polígena en su forma normal; se puede escribir

$$\left(\frac{dw}{dz}\right) = \overline{D}w \pm Dw \,.\, e^{-2j\varphi}\,.$$

De la condición de monogeneidad

$$\frac{\partial P}{\partial z''} = 0 \quad , \quad \frac{\partial Q}{\partial z'} = 0$$

la (1) del número anterior nos da

$$\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad , \quad \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} = 0\,.$$

21. *Funciones polígenas analíticas.* — Introduciendo al mismo tiempo que la variable z, su conjugada $\overline{z}$, las expresiones de la derivada areolar, simétrica y radial, toman una forma simple. En efecto; de

$$z = x + jy \quad , \quad \overline{z} = x - jy$$

se deduce

$$x = \frac{1}{2}(z + z)\,, \qquad j = \frac{1}{2_j}(z - z')\,.$$

por tanto, toda función

$$w = f(z) = (x, y) + j\,v\,(x, y)$$

resulta con esta substitución, una función de z y de $\overline{z}$.

Se tiene

$$\frac{\partial w}{\partial z} = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial z} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial z} + j\left(\frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial z} + \frac{\partial v}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial z}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} j\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x} j + \frac{\partial v}{\partial y}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\right) + \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right) j\right]$$

es decir

$$\boxed{\frac{\partial w}{\partial z} = \overline{D} w}$$

Así mismo; tenemos

$$\frac{\partial w}{\partial \overline{z}} = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \overline{z}} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \overline{z}} + j\left(\frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \overline{z}} + \frac{\partial v}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \overline{z}}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} j\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y}\right) + \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial y}{\partial y}\right) j\right]$$

es decir

$$\frac{\partial w}{\partial \overline{z}} = D w$$

La derivada areolar hiperbólica coincide con la derivada parcial de w *respecto a* $\overline{z}$*, mientras que la derivada simétrica hiperbólica coincide con la derivada parcial de* w *respecto de* z.

Según lo anterior, la derivada radial está dada por ésta nueva expresión

$$\left(\frac{dw}{dz}\right)_{\varphi} = \frac{\partial w}{\partial z} \pm e^{-2j\varphi} \frac{\partial w}{\partial \overline{z}}$$

El cálculo de la derivada areolar y simétrica de una suma, producto, etc. de dos o más funciones se obtiene muy simplemente teniendo presente los resultados del número anterior.

En efecto

$$D\,(w_1 \pm w_2) = \frac{\partial}{\partial \bar{z}}\,(w_1 \pm w_2) = \frac{\partial\, w_1}{\partial \bar{z}} + \frac{\partial\, w_2}{\partial \bar{z}} = D\, w_1 + D\, w_2$$

$$D\,(w_1\,.\,w_2) = \frac{\partial}{\partial \bar{z}}\,(w_1\,.\,w_2) = w_1\,\frac{\partial\, w_2}{\partial \bar{z}} + w_2\,\frac{\partial\, w_1}{\partial \bar{z}}$$

$$= w_1\, D\, w_2 + w_2\, D\, w_1$$

$$D\left(\frac{w_1}{w_2}\right) = \frac{\partial}{\partial \bar{z}}\left(\frac{w_1}{w_2}\right) = \frac{w_1\, D\, w_2 - w_2\, D\, w_1}{w_2^{\,2}}$$

siempre que w_2 no sea divisor de cero o igual a cero.

Fórmulas análogas se obtienen para la derivada simétrica $\bar{D}\, w$.

22. *Derivación sucesiva.* — La derivada areolar de una función $f\,(z)$ es una nueva función de x e y, la cual a su vez, puede admitir una derivada areolar (simétrica) hiperbólica, la cual, siendo una nueva función, puede tener a su vez una derivada areolar (simétrica) hiperbólica y así siguiendo. Estas derivadas sucesivas las anotaremos con los símbolos

$$D f \quad , \quad D^2 f \quad , \quad D^n f \ldots$$

y

$$\bar{D} f \quad , \quad \bar{D}^2 f \quad , \quad \bar{D}^n f \ldots$$

Se tiene también,

$$D f = \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2}\left[\frac{\partial f}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y}\right]$$

$$D^2\, w = \frac{\partial^2 w}{\partial \bar{z}^2} = \frac{1}{2^2}\left[\frac{\partial w}{\partial x} - j\,\frac{\partial w}{\partial y}\right]^{(2)}$$

. . . .

$$D^n\, w = \frac{\partial^n w}{\partial \bar{z}^n} = \frac{1}{2^n}\left[\frac{\partial w}{\partial x} - j\,\frac{\partial w}{\partial y}\right]^{(n)}$$

y del mismo modo

$$\bar{D}\; w = \frac{\partial w}{\partial z} = \frac{1}{2}\left[\frac{\partial w}{\partial x} - j\,\frac{\partial w}{\partial y}\right]$$

$$\bar{D}^2\, w = \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} = \frac{1}{2^2}\left[\frac{\partial w}{\partial x} - j\,\frac{\partial w}{\partial y}\right]^{(2)}$$

$$\bar{D}^n\, w = \frac{\partial^n w}{\partial z^n} = \frac{1}{2^n}\left[\frac{\partial w}{\partial x} - j\,\frac{\partial w}{\partial y}\right]^{(n)}$$

siempre que u y v admitan las derivadas parciales hasta las de orden n^{esima}.

Las delivadas radiales sucesivas se definen del mismo modo; se tiene

$$\left(\frac{d^n w}{d z^n}\right)_\varphi = \left(\frac{\partial}{\partial z} \pm e^{-2j\varphi} \frac{\partial}{\partial \bar{z}}\right)^{(n)} w .$$

Cuando las derivadas areolar y simétrica, están dadas en su forma isótropa

$$D w = j_1 \frac{\partial P}{\partial z''} + j_2 \frac{\partial Q}{\partial z'}$$

$$\bar{D} w = j_1 \frac{\partial P}{\partial z'} + j_2 \frac{\partial Q}{\partial z''} ,$$

las derivadas sucesivas se calculan del siguiente modo. Pongamos

$$D w = j_1 P_1 + j_2 Q_1$$

se tiene

$$D\ (D w) = D^2 w = j_1 \frac{\partial P_1}{\partial z''} + j_2 \frac{\partial Q_1}{\partial z'}$$

$$= j_1 \frac{\partial^2 P}{\partial z''^2} + j_2 \frac{\partial^2 Q}{\partial z'^2} .$$

En general, para la derivada areolar n^{esima}

$$D^n w = j_1 \frac{\partial^n P}{\partial z''^n} + j_2 \frac{\partial^n Q}{\partial z'^n}$$

Del mismo modo; se tiene

$$\bar{D}^n w = j_2 \frac{\partial^n P}{\partial z'^n} + j_2 \frac{\partial^n Q}{\partial z''^n} ;$$

siempre que sus componentes P y Q admitan las derivadas parciales respecto de z' y z'' hasta el orden n^{esima}.

23. *Derivada radial según dos direcciones.* — La derivadara radial $\left(\frac{dw}{dz}\right)_m$ de una función $f(z)$ es una nueva función de z la cual a su vez puede tener una derivada radial, según la dirección m' (diferente o no

de la m). Cuando exista ésta derivada la indicaremos con la notación

$$\left(\frac{dw}{dz}\right)^{(2)}_{m, n'}$$

Subsiste el siguiente teorema evidente.

El orden de derivación sucesiva de una función w según dos disereiones dadas m y m' no altera el valos de la derivada.

En efecto se tiene

$$\left(\frac{df}{dz}\right)_m = \frac{\partial f}{\partial z} \pm e^{-2j\varphi} \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = f_1 (z, \bar{z})$$

y aplicando esta misma fórmula a la función f_1 resulta

$$\left(\frac{df}{dz}\right)^{(2)}_{m, m'} = \frac{\partial f_1}{\partial z} \pm e^{-2j\varphi'} \frac{\partial f_1}{\partial \bar{z}} = \frac{\partial^2 f}{\partial^2 z} + e^{-2j\varphi} \frac{\partial^2 f}{\partial \bar{z}\, \partial z} +$$

$$+ e^{-2j\varphi'} \frac{\partial^2 f}{\partial z\, \partial \bar{z}} + e^{-2j(\varphi+\varphi')} \frac{\partial^2 f}{\partial \bar{z}^2}$$

es decir

$$\left(\frac{df}{dz}\right)^{(2)}_{m.m'} = \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} + (e^{-2j\varphi} + e^{-2j\varphi'}) \frac{\partial^2 f}{\partial \bar{z}\, \partial z} + e^{-2j(\varphi+\varphi')} \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial \bar{z}^2}$$

De la simetría de ésta relación con respecto de los parámetros φ y φ' se deduce que

$$\left(\frac{df}{dz}\right)^{(2)}_{m,m'} = \left(\frac{df}{dz}\right)^{(2)}_{m',m}$$

Este resultado se puede igualmente generalizar al caso de varias direcciones dadas m, m_1, ... m_p.

24. Vamos a generalizar los resultados anteriores, determinando, la derivada radial de una función polígena de $z = x + jy = z'j_1 + z''j_2$

$$W = U(x, j) + V(x, j)\, j = j_1 P(z', z'') + j_2 Q(z', z'')$$

con respecto a otra función polígena

$$w = u(x, j) + v(x, j)\, j = j_1 p(z', z'') + j_2 q(x, y)$$

La derivada radial, tiene por expresión

$$\left(\frac{dW}{dw}\right)_m = \frac{\left(\frac{dW}{dz}\right)_m}{\left(\frac{dw}{dz}\right)_m}$$

$$= \frac{\left(j_1 \frac{\partial P}{\partial z'} + j_2 \frac{\partial Q}{\partial z''}\right) + \left(m j_1 + \frac{1}{m} j_2\right)\left(j_1 \frac{\partial P}{\partial z''} + j_2 \frac{\partial Q}{\partial z'}\right)}{\left(j_1 \frac{\partial p}{\partial z'} + j_2 \frac{\partial q}{\partial z''}\right) + \left(m j_1 + \frac{1}{m} j_2\right)\left(j_1 \frac{\partial p}{\partial z''} + j_2 \frac{\partial q}{\partial z'}\right)}$$

siempre que los complejos hiperbólicos

$$j_1 \frac{\partial p}{\partial z'} + j_2 \frac{\partial q}{\partial z''} \quad , \quad j_1 \frac{\partial p}{\partial z''} + j_2 \frac{\partial q}{\partial z'}$$

no sean divisores de cero de la *misma especie*.

Se tiene entonces

$$\left(\frac{dW}{dw}\right)_m = \frac{\overline{D}W + \left(m j_1 + \frac{1}{m} j_2\right) D\, W}{\overline{D}w + \left(m j_1 + \frac{1}{m} j_2\right) D w} .$$

Del mismo modo, resulta

$$\left(\frac{dW}{dw}\right)_m = \frac{\overline{D}\, W + e^{-2j\varphi}\, D\, W}{\overline{D}\, w + e^{-2j\varphi}\, D\, w} .$$

Si la función w es monógena; se tiene

$$D\, w = 0$$

luego, las anteriores, dan

$$\left(\frac{dW}{dw}\right)_m = \frac{\overline{D}\, W}{\overline{D}\, w} + \left(m j_1 + \frac{1}{m} j_1\right) D\, W$$

y

$$\left(\frac{dW}{dw}\right)_m = \frac{D\, W}{\overline{D}\, w} + e^{-2j\varphi} \,.\, D\, W$$

En particular, para: $w = x + j y = z' j_1 + z'' j_2$ resultan, las fórmulas dadas anteriormente.

Llamaremos *jacobiano* de las funciones (1) y (2), al determinante funcional

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial W}{\partial x} , & \frac{\partial W}{\partial y} \\ \frac{\partial w}{\partial x} & \frac{\partial w}{\partial y} \end{vmatrix} = \frac{\partial (W, w)}{\partial (x, y)} = \frac{\partial (W, w)}{\partial (z'; z'')}$$

Se tiene además que,

$$\frac{\partial W}{\partial x} = \frac{\partial U}{\partial x} + j \frac{\partial V}{\partial x} \quad , \quad \frac{\partial W}{\partial y} = \frac{\partial U}{\partial y} + j \frac{\partial V}{\partial y}$$

y

$$\frac{\partial W}{\partial z'} = j_1 \frac{\partial P}{\partial z'} + j_2 \frac{\partial Q}{\partial z'} \quad , \quad \frac{\partial W}{\partial z''} = j_1 \frac{\partial P}{\partial z''} + j_2 \frac{\partial Q}{\partial z''}$$

y expresiones análogas para la función w.

Según esto, las expresiones normal e isótropa de J es por tanto

$$\frac{\partial (W, w)}{\partial (x, y)} = \frac{\partial (V, u)}{\partial (x, y)} + \frac{\partial (V, v)}{\partial (x, y)} + j \left[\frac{\partial (U, v)}{\partial (x, j)} + \frac{\partial (V, u)}{\partial (x, y)} \right] \quad [1]$$

y

$$\frac{\partial (W, w)}{\partial (x, y)} = \frac{\partial (W, w)}{\partial (z', z'')} = j_1 \frac{\partial (P, p)}{\partial (z', z'')} + j_2 \frac{\partial (Q, q)}{\partial (z', z'')} \quad . \quad [2]$$

25. La derivada radial de una función W, respecto de otra función w, es función de z y de la dirección m. El teorema que sigue, prueba bajo que condiciones, esta derivada es independiente de m.

La condición necesaria y suficientel para que la derivada $\left(\frac{dw}{dw}\right)_m$ *sea independiente de* m, *es que el jacobiano de las funciones* W *y* w *sea nulo, supuesto que los complejos*

$$\overline{D} w = j_1 \frac{\partial p}{\partial z'} + j_2 \frac{\partial q}{\partial z''} \quad , \quad D w = j_1 \frac{\partial p}{\partial z''} + j_2 \frac{\partial q}{\partial z'}$$

no sean divisores de cero de la misma especie.

En efecto; se tiene

$$\left(\frac{dW}{dw}\right)_m = \frac{\left(j_1 \frac{\partial P}{\partial z'} + j_2 \frac{\partial Q}{\partial z''}\right) + \left(m j_1 + \frac{1}{m} j_2\right)\left(j_1 \frac{\partial P}{\partial z''} + j_2 \frac{\partial Q}{\partial z'}\right)}{\left(j_1 \frac{\partial p}{\partial z'} + j_2 \frac{\partial q}{\partial z''}\right) + \left(m j_1 + \frac{1}{m} j_2\right)\left(j_1 \frac{\partial p}{\partial z''} + j_2 \frac{\partial q}{\partial z'}\right)}$$

$$= \frac{j_1 \left[\frac{\partial P}{\partial z'} + m \frac{\partial P}{\partial z''}\right] + j_2 \left[\frac{\partial Q}{\partial z''} + \frac{1}{m} \frac{\partial Q}{\partial z'}\right]}{j_1 \left[\frac{\partial p}{\partial z'} + m \frac{\partial p}{\partial z''}\right] + j_2 \left[\frac{\partial q}{\partial z''} + \frac{1}{m} \frac{\partial q}{\partial z'}\right]}$$

de donde

$$\left(\frac{dW}{dw}\right)_m = \frac{\frac{\partial P}{\partial z'} + m \frac{\partial P}{\partial z''}}{\frac{\partial p}{\partial z'} + m \frac{\partial p}{\partial z''}} j_1 + \frac{\frac{\partial Q}{\partial z''} + \frac{1}{m} \frac{\partial Q}{\partial z'}}{\frac{\partial q}{\partial z''} + \frac{1}{m} \frac{\partial q}{\partial z'}} j_2 . \quad [1]$$

La condición necesaria y suficiente para que la expresión (1), sea independiente de m, es que sus componentes sean independientes de m; deben por tanto, verificarse las condiciones siguientes

$$\frac{\partial (P, p)}{\partial (z', z'')} = \begin{vmatrix} \frac{\partial P}{\partial z'} & \frac{\partial P}{\partial z''} \\ \frac{\partial p}{\partial z'} & \frac{\partial p}{\partial z''} \end{vmatrix} = 0, \quad \frac{\partial (Q, q)}{\partial (z', z'')} = \begin{vmatrix} \frac{\partial Q}{\partial z''} & \frac{\partial Q}{\partial z'} \\ \frac{\partial q}{\partial z''} & \frac{\partial q}{\partial z'} \end{vmatrix} = 0 \quad [2]$$

Teniendo presente, que

$$\frac{\partial (W, w)}{\partial (z', z'')} = \frac{\partial (P, p)}{\partial (z', z'')} j_1 + \frac{\partial (Q, q)}{\partial (z', z'')} j_2$$

y según las relaciones (2); resulta finalmente

$$\frac{\partial (W, w)}{\partial (z', z'')} = 0 .$$

También se puede probar este teorema partiendo de la fórmula

$$\left(\frac{\partial W}{d w}\right)_m = \frac{\frac{\partial U}{\partial x} + j\frac{\partial V}{\partial x} + m\left(\frac{\partial U}{\partial y} + j\frac{\partial V}{\partial y}\right)}{\frac{\partial u}{\partial x} + j\frac{\partial v}{\partial x} + m\left(\frac{\partial u}{\partial y} + j\frac{\partial v}{\partial y}\right)} \qquad [4]$$

que tiene sentido, cuando los complejos hiperbólicos

$$\frac{\partial u}{\partial x} + j\frac{\partial v}{\partial x} \quad y \quad \frac{\partial u}{\partial y} + j\frac{\partial v}{\partial y}$$

no son divisores de cero de la misma especie.

Las condiciones necesaria y suficiente para que ella sea independiente de m, es por tanto

$$\frac{\frac{\partial U}{\partial x} + j\frac{\partial V}{\partial x}}{\frac{\partial u}{\partial x} + j\frac{\partial v}{\partial x}} = \frac{\frac{\partial U}{\partial y} + j\frac{\partial V}{\partial y}}{\frac{\partial u}{\partial y} + j\frac{\partial v}{\partial y}} \qquad [6]$$

de donde resulta, igualando las primeras y las segundas componentes, de ambos miembros, que

$$\left\{\begin{aligned} \frac{\partial (U, u)}{\partial (x, y)} &= -\frac{\partial (V, v)}{\partial (x, y)} \\ \frac{\partial (U, v)}{\partial (x, y)} &= -\frac{\partial (V, u)}{\partial (x, y)}, \end{aligned}\right. \qquad [6]$$

y teniendo presente estas relaciones, la (1) del número anterior, nos da

$$\frac{\partial (W, w)}{\partial (x, y)} = 0.$$

26. FUNCIONES HOLOMORFAS. — La función compleja

$$w = f(z) = u(x, y) + j v(x, y)$$

de la variable compleja hiperbólica $z = x + jy$ es *función holomorfa* en un dominio simplemente conexo D, si ella es uniforme contínua y monógena en todos los puntos interiores de D.

Estas funciones forman por tanto una clase especial dentro del conjunto de las funciones polígenas y están caracterizadas por tener en cada punto z de su dominio de existencia una derivada *radial única* independiente de la dirección m y además de comportarse como *constante* a los efectos de la derivación areolar hiperbólica.

La condición necesaria y suficiente para que la $f(z)$ sea holomorfa hiperbólica en D es que se verifique en éste dominio la condición: $Df(z) = 0$, es decir:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \quad , \quad \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial x}$$

Estas condiciones fueron establecidas por otro camino (1).

Vamos a establecer estas condiciones de *monogeneidad* con hipótesis más generales.

TEOREMA. — *Condición necesaria y suficiente para que la función*

$$w = f(z) = u + jv$$

sea monógena hiperbólica en el punto $z = x + jy$ *del dominio* D es que las funciones reales $u(x,y)$ y $v(x,y)$ sean diferenciables y cumplan las condiciones

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \quad , \quad \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial x} \qquad [2]$$

La condición es necesaria. En efecto, supongamos que $f(z)$ sea monógena y sea

$$\lim_{|\Delta z| \to 0} \frac{\Delta w}{\Delta z} = P + jQ$$

Poniendo

$$\begin{cases} \eta(z, \Delta z) = \dfrac{\Delta w}{\Delta z} - (P + jQ) \quad \text{para} \quad \begin{cases} \Delta x + y \Delta y \neq 0 \\ \Delta x \neq \Delta y \end{cases} \\ \\ \eta(z, \Delta z) = 0 \quad \text{para} \quad \Delta z = 0 \end{cases}$$

se tiene

$$\Delta w = (P + jQ)\,\Delta z + \eta\,\Delta z \qquad [3]$$

donde

$$\lim_{|\Delta z| \to 0} \eta(z, \Delta z) = 0$$

(1) DURAÑONA y VIGNAUX, *Loc. cit.*

Sea

$$\eta = \alpha + j\beta \quad , \quad \lim_{|\Delta z| \to 0} \alpha = \lim \beta = 0$$

la igualdad (3) resulta

$$\Delta w = (P + jQ)(\Delta x + j\,\Delta y) + (\alpha + j\beta)(\Delta x + j\,\Delta y) =$$
$$= (P\Delta x + Q\Delta y + \alpha\Delta x + \beta\Delta y) + j\,(P\Delta y + Q\Delta x + \alpha\Delta y + \beta\Delta x)$$

de donde se deduce

$$\begin{cases} \Delta u = P\Delta x + Q\Delta y + \alpha\Delta x + \beta\Delta y \\ \Delta v = Q\Delta x + P\Delta y + \beta\Delta x + \alpha\Delta y \end{cases} \qquad [5]$$

relaciones que nos prueban la diferenciabilidad de las funciones u y v y además las condiciones (2) puesto que de la (5) resulta ser.

$$\begin{cases} P = \dfrac{\partial u}{\partial x} \quad Q = \dfrac{\partial u}{\partial y} \\ Q = \dfrac{\partial v}{\partial x} \quad P = \dfrac{\partial v}{\partial y} \end{cases}$$

La condición es suficiente. En efecto, si u y v son diferenciables y se cumplen las condiciones (2), poniendo

$$\frac{\partial u}{\partial x} = P \qquad \frac{\partial v}{\partial x} = Q$$

se tiene

$$\Delta u = \frac{\partial u}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial u}{\partial y}\Delta y + \varepsilon \,.\, |\Delta z| \quad , \quad \lim_{|\Delta z| \to 0} \varepsilon' = 0$$
$$= P\,\Delta x + Q\,\Delta y + \varepsilon\,|\Delta z|$$

y

$$\Delta v = \frac{\partial v}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial v}{\partial y}\Delta y + \varepsilon'\,|\Delta z| \quad , \quad \lim_{|\Delta z| \to 0} \varepsilon' = 0$$
$$= Q\,\Delta x + P\,\Delta y + \varepsilon'\,|\Delta z|\,.$$

De aquí resulta

$$\Delta w = (P + jQ)\,\Delta z + (\varepsilon + \varepsilon' j)\,|\,\Delta z\,|$$

$$\lim_{|\Delta z| \to 0} \frac{\Delta w}{\Delta z} = P + Qj$$

es decir

$$f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + k \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial w}{\partial x}\,.$$

27. *Polinomio areolar.* — Dada una función holomorfa hiperbólica $h(z)$ en un dominio D propongámonos determinar una función $f(z)$ tal que

$$D f(z) = h(z)$$

Se tiene

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = h(z)$$

de donde

$$\frac{\partial^2 f}{\partial \bar{z}^2} = 0$$

si $h(z)$ es holomorfa.

La solución general de esta ecuación es

$$f(z) = \Phi_0(z) + \bar{z}\,\Phi_1(z)$$

donde

$$\Phi_0(z) \text{ y } \Phi_1(z)$$

son funciones holomorfas hiperbólicas.

En general, la investigación de una función $f(z)$, tal que su derivada areolar hiperbólica, de orden n^{esima}, sea igual a una función holomorfa hiperbólica, conduce a un polinomio del tipo anterior y de grado n.

(Continuará)

SOBRE LOS PUNTOS SINGULARES DE LAS FUNCIONES ANALÍTICAS

POR EL DOCTOR CARLOS BIGGERI

Con este mismo título, (*Sobre los puntos singulares de las funciones analíticas*), en la *Revista de la Unión Matemática Argentina, Volumen II*, 1938-1939, *Número 4, página 22, aparecida en el mes de Abril de 1939*, he visto con profunda sorpresa un artículo que la Redacción de dicha Revista me atribuye. Afirmo categóricamente que no he autorizado a nadie para publicar el referido artículo. Además, no he tenido conocimiento de ese artículo sino después de haberlo leído ya publicado (pues ni siquiera he visto las correspondientes pruebas de imprenta), y publicado en forma tal como si yo lo hubiera remitido para su publicación, lo que, como ya dije, no es exacto.

En virtud de estas circunstancias, estimo necesario, *por de pronto,* dejar constancia de esto y de lo que consigno más abajo, librando al lector desinteresado e imparcial la sencilla tarea de calificar como corresponde los hechos expuestos.

Pasaré, ahora, a considerar brevemente el artículo en cuestión. En realidad, el trabajo que he publicado en los *Comptes Rendus des Séances de l'Académie des Sciences de Paris, el* 14 *de Septiembre de* 1936 (presentado por el intermedio de *M. Emile Borel*), con el título *Sur les singularités des fonctions analytiques définies par des séries potentielles*, y que es el que ha servido, en parte, de base a la persona que (con fines que no me detendré a analizar en atención al respeto que me inspiran estos *Anales de la Sociedad Científica Argentina*) ha confeccionado el artículo aparecido en la *Revista de la Unión Matemática Argentina* (*Volumen II*, 1938-1939, *Número* 4, *página* 22), no dice lo que en éste último se expresa: en el artículo aparecido en la *Revista de la Unión Matemática Argentina* (*Volumen II*, 1938-1939, *Número* 4, *página* 22) se omite una condición *esencial* para la validez de uno de los teoremas contenidos en él, condición

que está *explícitamente* estipulada en mi Nota mencionada de los *Comptes Rendus des Séances de l'Académie des Sciences de Paris* (*Sesión del* 14 *de Septiembre de* 1936). En efecto, en dicha Nota mía de los *Comptes Rendus des Séances de l'Aeadémie des Seienees de Paris* (*Sesión del* 14 *de Septiembre de* 1936), enuncio el siguiente teorema:

« *Théorème. — Si les trois conditions suivantes sont vérifiées:*

1°) *la partie réelle du eoefficient* a_n *de la série de Dirichlet*

[12] $$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot e^{-\lambda_n \cdot z}, \qquad [R(a_n) \equiv a'_n]$$

n'est pas négative;

2°) *la valeur principale de l'argument,* φ_n, *de* a_n (*pour* $a'_n > 0$) *est telle que*

$$\lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{\cos \varphi_n} = 1 ;$$

3°) *les abscisses de eonvergenee conditionnelle et absolue de la série* [12] *sont égales; alors, le point auquel la droite de convergence de la série* [12] *coupe l'axe réel est singulier pour la fonction analytique qui définit cette série* ».

En cambio, en el artículo que la Redacción de la *Revista de la Unión Matemática Argentina* (*en Volumen II*, 1938-1939, *Número* 4, *página* 22) me atribuye, *aparece este último teorema sin imponerle a la serie de Dirichlet la tercera condición* (las abscisas de convergencia condicional y absoluta de la serie [12] son iguales), la cual es *fundamental* para la validez del teorema.

El teorema (que, más arriba, transcribí textualmente) enunciado en mi Nota de los *Comptes Rendus des Séances de l'Académie des Sciences de Paris* (*Sesión del* 14 *de Septiembre de* 1936) lo *demostré* en mi trabajo *Sulle serie di Dirichlet*, publicado en el *Bollettino della Unione Matematica Italiana*, 15 *Ottobre* 1937-(*XV*), *Anno XVI*, *N.°* 4, *páginas* 178-182.

La *necesidad* de la tercera condición; es decir, la *necesidad* de la igualdad de las abscisas de convergencia condicional y absoluta de la serie, [12], de Dirichlet (condición omitida en el artículo que *la Redacción de la Revista de la Unión Matemática Argentina, en Volumen II*, 1938-1939, *Número* 4, *página* 22, me atribuye), para la validez del teorema fué demostrada por el *Profesor Oskar Perron* en su trabajo *Osservazioni riguardo un teorema di C. Biggeri*, publicado en el *Bollettino della Unione Matematica Italiana*, 15 *Aprile* 1937-(*XV*), *Anno XVI*, *N.°* 2, *páginas* 82-84.

ESTRUCTURAS DE ANÁGENOS

Por MISCHA COTLAR

(*Conclusión* *)

III. — Estructuras asociadas. Anágenos (2)

11. — Los anágenos (1) permiten transformar un conjunto parcialmente ordenado en una estructura fuerte; pero esta estructura no siempre es distributiva, como se ha visto en ejemplos. En este capítulo vamos a mostrar que esta estructura puede a su vez ser transformada en una estructura distributiva, pero sin conservar el principio de prolongación sino únicamente los principios de permanencia y de «totalidad». En el capítulo siguiente vamos a realizar esta transformación conservando el principio de prolongación. Nosotros usaremos de un principio análogo al de Hardy-Borel para las series sumables. A toda estructura hacemos corresponder otra asociada a ésta y definida de tal suerte que si la estructura es distributiva ella es isomorfa con su asociada (principio de permanencia). Pero mientras que en el caso de las series la serie asociada no siempre resulta sumable, en cambio la estructura asociada es siempre distributiva, aunque en ciertos casos puede degenerar en la estructura trivial compuesta por un solo elemento. De manera que, si tenemos que desarrollar una teoría determinada (p. ej. la teoría de divisibilidad) dentro de una estructura dada, y si dicha teoría exige la distributividad de la misma, es lógico que en vez de la estructura dada utilizaremos su asociada para conseguir nuestro objeto. Indicamos dos métodos:

A) Método de la composición

12. — Consideremos una estructura cualquiera (de anágenos) y sean A, B, ... subconjuntos no vacíos de la misma.

* Ver estos *Anales*, E. V - Tomo CXXVII, pág. 328 y sig.

Diremos que una familia de conjuntos no vacíos $\{A, B, ...\}$ es una « *subdivisión* » de la estructura si todo elemento de la estructura pertenece a uno y sólo uno de los conjuntos (componentes) de la familia; de modo que esos conjuntos son primos dos a dos. Llamemos « *subdivisión homomorfa e* » a las subdivisiones $\{A, B, ...\}$ tales, que sus elementos no se separan con respecto a la suma de la estructura, es decir que de $a, a' \varepsilon A$; $b, b' \varepsilon B$; $a + b \varepsilon C$ se deduce $a' + b' \varepsilon C$. Análogamente llamamos « *subdivisión homomorfa i* » a tales cuyos elementos no se separan con respecto al producto de la estructura. Llamemos simplemente « *subdivisión homomorfa* » a las subdivisiones a la vez homomorfas *e* e *i*, es decir cuyos elementos no se separan con respecto a la suma y al producto de la estructura. Dos elementos serán dichos « *unidos* » en una subdivisión cuando pertenecen a un mismo conjunto de la misma. Llamemos « *subdivisión normal homomorfa e* » o simplemente « subdivisión normal *e* » a las subdivisiones homomorfas *e* que además verifican la siguiente condición: para toda terna x, y, z los elementos $(x + y)z$ y $xz + yz$ son unidos. Análogamente una « *subdivisión normal i* » es una subdivisión homomorfa *i* que verifica: para todo x, y, z son unidos los elementos $(x + z)(y + z)$ y $xy + z$.

Es evidente que siempre existen por lo menos una subdivisión de cada uno de los tipos considerados, que es la familia compuesta de un solo componente.

Es importante hacer notar que en toda subdivisión normal *i* son unidos los elementos $(x + y)z$ y $xz + yz$; en efecto, por definición son unidos $xz + yz$ y $(x + yz)(z + yz)$; como $(x + yz)$ y $(x + y)(x + z)$ son unidos y como en la subdivisión *i* los productos de unidos son unidos resulta que son unidos $(x + yz)(z + yz)$ con $(x + y)(x + z)(z + yz) = (x + y)z$, luego son unidos $xz + yz$ y $(x + y)z$. Análogamente, se verá que en la subdivisión normal *e* son unidos $(x + z)(y + z)$ y $xy + z$.

Es obvio hacer notar que en el caso de subdivisión *i* no se puede asegurar que las sumas de unidos son unidos y en el caso de subdivisiones *e* no se puede saber si los productos de unidos son unidos.

Dadas dos o infinitas subdivisiones de cualesquiera de los tipos considerados S_1, S_2,... (los índices no quieren decir que sea numerable) donde $S_i = \{A_i, B_i, ...\}$, formemos la familia de conjuntos no vacíos compuesta por los posibles conjuntos de la forma $A_1 \times A_2 \times ...$ (*) menos aquellos que son vacíos. La familia así

(*) Con $A \times B$ indicamos el producto de conjuntos. En el producto escrito debe figurar un componente y sólo uno de cada una de las S_i. Por supuesto, admitimos el postulado de Zermelo.

obtenida llamemos « producto de las subdivisiones S_i » y la designamos con

$$P = S_1 \circ S_2 \circ \ldots = \{A_1, B_1, \ldots\} \circ \{A_2, B_2, \ldots\} \circ \ldots$$

Llamaremos « composición i o e » de las subdivisiones S_i, según se trate de subdivisiones i o e y la designaremos con

$$S = S_1 \overset{e}{-} S_2 \overset{e}{-} \ldots = \{A_1, B_1, \ldots\} \overset{e}{-} \{A_2, B_2, \ldots\} \overset{e}{-}, \ldots$$

o $$S = S_1 \overset{i}{-} S_2 \overset{i}{-} \ldots = \{A_1, B_1 \ldots\} \overset{i}{-} \{A_2, \ldots\} \overset{i}{-}$$

a la subdivisión S tal que: la condición necesaria y suficiente para que dos elementos a, b sean unidos en S es que existe un número finito de elementos $a_1, \ldots a_n$, tales que en la sucesión finita $a, a_1, \ldots a_n, b$ cada elemento es unido con su consecutivo en alguna de las subdivisiones S_i.

13. — Teorema I. — Para subdivisiones de tipo cualesquiera se verifica: el producto de subdivisiones (de potencia cualquiera) es otra subdivisión del mismo tipo.

Demostración. — Supongamos que $S_i = \{A_i, B_i, \ldots\}$ son subdivisiones normales holomorfas i y $P = \{A, B, \ldots\}$ su producto. Vamos a mostrar que P es también una subdivisión normal i.

1) Todo elemento del espacio (estructura) pertenece a uno de los conjuntos A, $B, \ldots$ puesto que pertenece a algún componente de cada uno de los S_i, Y no puede pertenecer más que a uno, pues de lo contrario pertenecería a dos componentes diferentes de algún S_i, luego es P una subdivisión.

2) Supongamos que $a \varepsilon A$, $a' \varepsilon A$, $b \varepsilon B$, $b' \varepsilon B$, $ab \varepsilon C$ y vamos a mostrar que $a' b' \varepsilon C$.

Por definición de producto debe ser

$$A = A_1 \times A_2 \times \ldots \quad B = B_1 \times B_2 \times \ldots \quad C = C_1 \times C_2 \times \ldots$$

luego a y a' pertenecen a

$$A_1, A_2, \ldots \quad , \quad b \text{ y } b' \text{ a } B_1, B_1, \ldots \quad \text{y} \quad a.b \quad \text{a} \quad C_1, C_2 \ldots$$

Pero los S_i son subdivisiones, y de $a.b \varepsilon C_1, C_2, \ldots$ se deduce $a' b' \varepsilon C_1 \times C_2 \times \ldots = C$. Luego es P una subdivisión homomorfa i.

3) Consideremos los dos elementos $xy + z$ y $(x + z)(y + z)$. Estos elementos pertenecen a un mismo componente A_1 de S_1, a un mismo A_2 de $S_2, \ldots$ y por lo tanto al componente $A = A_1 \times \times A_2 \times \ldots$ de P, luego P es una subdivisión normal i l. q. d. d.

TEOREMA II. — La composiciones de subdivision es una suodivisión del mismo tipo.

Demostración. — Sean S_i las subdivisiones y S su composición. Suponemos que los S_i son subdivisiones normales y vamos a mostrar que también lo es S.

1) Por la definición misma es S una subdivisión.

2) Sean $a, a' \varepsilon A; b, b' \varepsilon B; a.b \varepsilon C$, vamos a mostrar que $a'.b' \varepsilon C$.

Por definición existe un número finito de elementos $a_1, \ldots a_n$, $b_1, \ldots b_m$ tales que en las sucesiones finitas

$$a, a_1, \ldots a_n, a' \quad [1] \qquad \text{y} \qquad b, b_1, \ldots b_m, b' \quad [2]$$

cada dos consecutivos son unidos en alguno de los S_i. Pero como los S_i son subdivisiones i resulta que en

$$a.b, a, b, \ldots a_n.b, a' b \quad \text{y} \quad a.b, a.b_1, \ldots ab_m, ab''$$

cada dos consecutivos son unidos en algún S_i, luego ab es unido con ab' en S. Pero de [1] resulta que en

$$ab', a_1 b', \ldots a_n b', a' b'$$

cada dos son unidos en algún S_i, luego ab' es unido con $a' b'$ en S, de donde resulta que ab es unido con $a' b'$ en S. Luego S es una subdivisión homomorfa i.

3) Como todo par de elementos de la forma $(x + z)(y + z)$ y $x.y + z$ son unidos en cada S_i con más razón lo serán en S. Luego es S una subdivisión normal i l. q. d. d.

COROLARIO. — Las subdivisiones forman una estructura muy fuertes, si convenimos que una subdivisión sigue a otra cuando cada uno de sus componentes está contenido en un componente de la otra.

De los dos teoremas demostrados se deduce que en particular el producto y la suma de subdivisiones homomorfas es una subdi-

visión homomorfa. Pero a toda subdivisión homomorfa corresponde una estructura homomorfa con la dada y, recíprocamente, a toda estructura homomorfa corresponde una subdivisión homomorfa, por lo tanto puede definirse el producto y composición de varios homomorfismos; luego los homomorfismos de una estructura forman otra estructura muy fuerte si convenimos que un homomorfismo precede a otro cuando es homomorfo de él, es decir cuando los componentes de la subdivisión correspondiente al primero contienen a los componentes de la subdivisión correspondiente del otro.

14. — Los teoremas del § anterior no solamente demuestran que el producto y composición de subdivisiones es una subdivisión, sino también demuestran la existencia de este producto o composición. Luego existe el producto de todas las subdivisiones i que será otra subdivisión i que llamamos « *subdivisión principal i* ». Análogamente se definen la « subdivisión principal e », la « *subdivisión principal normal i* », etc.

Ahora podemos resolver el problema de asociar a toda estructura una base e o i según lo dicho en el capítulo anterior. Para fijar ideas nos ocuparemos de la base e. Para ello introducimos previamente unas definiciones más.

Dos elementos se dirán « *equivalentes e* » si son unidos en la « subdivisión principal *normal e* », en símbolos $a \overset{e}{\equiv} b$.

De la definición de subdivisiones normales e resultan las siguientes propiedades:

para todo a es $a \overset{e}{\equiv} a$, de $a \equiv b$ $b \equiv c$ se deduce $a \equiv c$

de $a \overset{e}{\equiv} a_1$ $b \overset{e}{\equiv} b_1$ se deduce $a + b \overset{e}{\equiv} a_1 + b_1$

para todo x, y, z es $(x + y)\, z \equiv xz + yz$; $(x + z)\,(y + z) \equiv x.y + z$.

Escribamos $\alpha \overset{e}{<} \beta$

cuando $\alpha + \beta \overset{e}{\equiv} \beta$. Es claro que si $\alpha \equiv \alpha_1$ es $\alpha < \alpha_1$.

Además definimos la función multiforme $D\,(\alpha\, \beta)$ que hace corresponder al par α, β el elemento $\alpha.\beta$ y todos los elementos equivalentes a éste.

Escribiendo $d = D\,(\alpha\, \beta)$ queremos expresar que d es una de las determinaciones de $D\,(\alpha\, \beta)$.

15. — Teorema III. —

1) Si $\bar{\alpha} \overset{e}{=} \alpha$ es $\bar{\alpha} \overset{e}{\geq} D\,(\alpha\,\beta)$.

2) Si $\bar{\alpha} \overset{e}{=} \alpha$ es $\alpha + \beta \overset{e}{\geq} \alpha$.

3) Si $\alpha < \beta$ $\beta < \gamma$ es $\alpha < \gamma$.

4) Si $\gamma = D\,(\alpha\,\beta)$, $\gamma_1 \overset{e}{\geq} \gamma$, $\bar{\gamma}_1 \overset{e}{=} \gamma_1$

entonces existen $\alpha_1 \overset{e}{\geq} \alpha$ $\beta_1 \overset{e}{\geq} \beta$ tales que $\bar{\gamma}_1 = D\,(\alpha_1\,,\,\beta_1)$.

Demostración. —

1) Tenemos $\bar{\alpha} + D\,(\alpha\,\beta) \overset{e}{=} \alpha + (\alpha\,\beta) = \alpha \overset{e}{=} \bar{\alpha}$;
luego $\bar{\alpha} \overset{e}{\geq} D\,(\alpha\,\beta)$.

2) $\bar{\alpha} + (\alpha + \beta) \overset{e}{=} \alpha + (\alpha + \beta) = \alpha + \beta$; luego $\alpha + \beta \overset{e}{\geq} \bar{\alpha}$.

3) Por hipótesis es $\alpha + \beta \overset{e}{=} \beta$ $\beta + \gamma \overset{e}{=} \gamma$;

luego $\alpha + \gamma \overset{e}{=} \alpha + (\beta + \gamma) = (\alpha + \beta) + \gamma \overset{e}{=} \beta + \gamma \overset{e}{=} \gamma$ es decir que $\alpha \overset{e}{\geq} \gamma$.

4) Tenemos $\gamma_1 \overset{e}{=} \gamma + \gamma_1 \overset{e}{=} \gamma + \bar{\gamma}_1 \overset{e}{=} \alpha.\beta + \bar{\gamma}_1 \overset{e}{=} (\alpha + \bar{\gamma}_1)\,.\,(\beta + \bar{\gamma}_1)$,

haciendo $\alpha_1 = \alpha + \bar{\gamma}_1$ $\beta_1 = \beta + \bar{\gamma}_1$ es en virtud de 2) $\alpha_1 > \alpha$ $\beta_1 > \beta$,

luego $\gamma_1 \overset{e}{=} \alpha_1\,\beta_1$ y $\bar{\gamma}_1 = D\,(\alpha_1\,\beta_1)$ l. q. d. d.

De 3) de este teorema se deduce que la estructura es un conjunto parcialmente ordenado con respecto a la relación $\overset{e}{<}$, y de 1) y 4) que este conjunto parcialmente ordenado es una base e con respecto a las relaciones $\overset{s}{<}$ y $D\,(\alpha\,\beta)$ (§ 10).

Luego podemos formar la « estructura » asociada a esta base que será, como se ha visto, una estructura distributiva. Queda pues demostrado que a toda estructura fuerte se puede asociarle una estructura distributiva. Los principios de permanencia y de totalidad están incluídos en el siguiente teorema.

Teorema IV. — Toda estructura distributiva es isomorfa con su asociada *e*.

Demostración. — Puesto que la estructura es distributiva hay una subdivisión normal e tal que cada uno de sus componentes se compone de un elemento solamente; en otras palabras, los elementos de la estructura son los conjuntos de esta subdivisión. Es evidente que esta subdivisión es la principal. Luego dos elementos son equivalentes solamente si son iguales. Luego la función $D(\alpha \beta)$ es uniforme y coincide con el producto de la estructura. Lo mismo la relación $<$ coincide con la $\subset$ y la estructura es isomorfa con la asociada, como seha visto en el § 10.

B) Método de homomorfismos

16. — Aunque con el método anterior se consigue teóricamente una estructura « asociada » de acuerdo al principio de permanencia, en la práctica puede resultar muy complicada su construcción, además hay cierta ambigüedad en la elección de la base e o de la base i. Por eso a continuación vamos a darle otra forma más cómoda y directa, independiente de la teoría de la composición de anágenos.

Antes de pasar a la exposición ilustraremos la idea sobre la estructura de los números naturales, entendiendo por $a \subset b$ que a es divisor de b, por $a + b$ el mínimo común múltiple $M(ab)$ y por ab el máximo común divisor $D(ab)$.

A cada número a hacemos corresponder una disposición de todos los números naturales en forma de un « cuadro » de la siguiente manera. Sean $\{d_n\}$ los divisores y $\{m_k$ los múltiplos de a. Disponemos los $m.$ en una fila y los $d.$ en columna:

$$\begin{array}{lllll} \boxed{a} & m_1 & m_2 & m_3 \cdots\cdots & m_i \\ d_1 & & & & \\ \cdot & & & & \\ d_n & \cdots\cdots & & \cdots\cdots & b \end{array} \qquad \begin{aligned} D(a, b) &= d_n \\ M(a, b) &= m_i \end{aligned}$$

Ahora todo otro elemento b le colocamos en la misma fila que $D(a, b)$ y en la misma columna que $M(a, b)$. Así p. ej. si $a = 20$ se obtiene el siguiente cuadro:

20	40	60	80	100	120 ...
10		30		50	
5		15		25	
4	8	12	16		24
2		6			
1		3			etc.

(Así 25 está en la fila de $5 = D(25, 20)$ y en la columna de $100 = M(25, 20)$.

Es claro que si a es múltiplo de b cada fila del cuadro correspondiente a a está contenida en una fila del cuadro de b, mientras que las columnas del cuadro b están contenidas en las de a. Podemos, pues, considerar en vez de los números naturales sus cuadros correspondientes, diciendo que un cuadro es divisor de otro cuando sus filas (columnas) contienen (están contenidos) a las del otro, y en esta forma deducir todas las propiedades aritméticas de los números naturales.

Examinando alguno de estos cuadros veremos que en él los elementos de las filas y columnas no se separan con respecto al mínimo común múltiplo y máximo común divisor.

Es decir que cada cuadro es un par de homomorfismos; uno lo forman las filas y el otro las columnas. Pero estos dos homomorfismos determinan uno al otro, puesto que están ligados por la siguiente relación fácil de verificar:

todo múltiplo de b (arbitrario) está en la misma fila que b siempre que no sea múltiplo de otro múltiplo de b que está en la misma columna que b;

todo divisor de b está en la misma columna que b siempre que no sea divisor de otro divisor de b que está en la misma fila que b.

Todo eso puede expresarse en forma abstracta como sigue.

Volvamos a las estructuras fuertes. Si $a \subset b$ diremos que c se encuentra « entre » a y b si $a \subset c \subset b$ incluídas las posibilidades $a = c$ o $b = c$. Además en adelante vamos a escribir simplemente « subdivisión » en vez de subdivisión homomorfa (es decir homomorfa e e i a la vez, pero no necesariamente normal).

17. — *Definición.* — Llamamos « *anágeno* 2 » a todo par de subdivisiones homomorfas

$$[\{A_i, B_i, \ldots\} \quad ; \quad \{A_e, B_e, \ldots\}]$$

que para todo par a, b, donde $a \supset b$, verifica las siguientes 2 condiciones:

1) Para que a y b sean unidos en $\{A_i, \ldots\}$ es necesario y suficiente que no exista ningún elemento entre ellos ($\neq b$) unido con b en $\{A_e, \ldots\}$.

2) Para que a y b sean unidos en $\{A_e, \ldots\}$ es necesario y suficiente que no exista ningún elemento entre a y b ($\neq a$) y unido con a en $\{A_i, \ldots\}$.

Teorema V. — Sean

$$[\{A_i, \ldots\} ; \{A_e, \ldots\}] \text{ y } [\{A_i', \ldots\} ; \{A_e', \ldots\}]$$

dos anágenos 2.

Si todo componente de $\{A_i, \ldots\}$ está contenido en un componente de $\{A_i', \ldots\}$ entonces todo componente de $\{A_e', \ldots\}$ está contenido en uno de $\{A_i, \ldots\}$.

Demostración. — Supongamos que a y b son unidos en $\{A_e', \ldots\}$ y vamos a mostrar que son también en $\{A_e, \ldots\}$. Por definición de subdivisiones es $d = a.b$ unido con a y b en $\{A_e', \ldots\}$, luego no hay ningún elemento entre a y d unido con a en $\{A_i', \ldots\}$. Como cada componente de $\{A_i, \ldots\}$ está contenido en uno de $\{A_i', \ldots\}$, con más razón no hay ningún elemento entre d y a unido con a en $\{A_i, \ldots\}$. Luego es d unido con a en $\{A_e, \ldots\}$: análogamente se verá que d es unido con b en $\{A_e, \ldots\}$ y por lo tanto lo son a y b l. q. d. d.

Basándose en este teorema podemos dar la siguiente:

Definición. — Si

$$[\{A_i, \ldots\} ; \{A_e, \ldots\}] \quad , \quad [\{A_i', \ldots\} ; \{A_e', \ldots\}]$$

son dos anágenos, diremos que el primero precede al segundo cuando los componentes de $\{A_e, \ldots\}$ están contenidos en los de $\{A_e', \ldots\}$ y los componentes de $\{A_i', \ldots\}$ están contenidos en los de $\{A_i, \ldots\}$ En símbolos

$$[\{A_i, \ldots\} ; \{A_e, \ldots\}] \subset [\{A_i', \ldots\} ; \{A_e', \ldots\}] .$$

La relación $\subset$ definida cumple las propiedades necesarias para que los anágenos 2 formen un conjunto parcialmente ordenado.

18. — Vamos a mostrar que los anágenos 2 forman estructura.

Lema I. — Sea $[\{A_i, \ldots\} \ \{A_e, \ldots\}]$ un anágeno. Si a y b son unidos en $\{A_i, \ldots\}$ y al mismo tiempo en $\{A_e, \ldots\}$ es $a = b$.

Demostración. — Sea $m = a + b$; m es unido con a y con b en $\{A_i, \ldots\}$ y en $\{A_e, \ldots\}$, pero $m \supset a$ luego hay un elemento entre a y m unido con a, lo que es únicamente posible si $m = a$. Análogamente es $m = b$ luego $a = b$.

LEMA II. — Sea $[\{A_i, \ldots\} \ \{A_e, \ldots\}]$ un anágeno y ω el producto de todos los elementos unidos con 1 (la unidad de la estructura) en $\{A_i, \ldots\}$. Entonces, para que dos elementos a y b sean unidos en $\{A_i, \ldots\}$ es necesario y suficiente que se verifique $a.\omega = b.\omega$.

Demostración. — Supongamos que a y b sonunidos en $\{A_i, \ldots\}$. Sean $\bar{\omega}$ un elemento que sigue a ω y unido con él en $\{A_e, \ldots\}$, y α_k un elemento cualquiera unido con 1 en $\{A_i, \ldots\}$. $\bar{\omega} + \alpha_k$ es unido con $\omega + \alpha_k = \alpha_k$ en $\{A_e, \ldots\}$, lo que exige $\bar{\omega} + \alpha_k = \alpha_k$, puesto que también $\bar{\omega} + \alpha_k$ es unido en $\{A_i,\}$ con $\bar{\omega} + 1 = 1$ y por lo tanto con α_k; luego $\bar{\omega} \subset \alpha_k$ $\bar{\omega} \subset \omega$ $\bar{\omega} = \omega$. Así que ningún elemento que sigue a ω no es unido con él en $\{A_e,\}$, por lo tanto *es* ω *unido con* 1 en $\{A_i, \ldots\}$. Entonces $a.\omega$ es unido con $a.1 = a$ y análogamente $b.\omega$ con b en $\{A_i, \ldots\}$, es decir que $a.\omega$ y $b.\omega$ son unidos en $\{A_i, \ldots\}$. Pero estos elementos son unidos en $\{A_e, \ldots\}$; en efecto: $a.\omega$ es $\subset \omega$ y ω precede a todos los unidos con el $\{A_i \ldots\}$; luego $a.\omega$ es unido con ω en $\{A_e, \ldots\}$; análogamente son unidos $b.\omega$ y ω de donde son unidos $a.\omega$ y $b.\omega$ en $\{A_e, \ldots\}$. Entonces en virtud del Lema I debe ser $a.\omega = b.\omega$. Recíprocamente si $a.\omega = b.\omega$ como $a.\omega$ es unido con $a.1 = a$ en $\{A_i, \ldots\}$ y $b.\omega$ con $b.1$ resulta que son unidos en $\{A_i, \ldots\}$ a y b.

LEMA III. — La condición necesaria y suficiente para que a y b sean unidos en $\{A_e, \ldots\}$ es $a + \omega = b + \omega$.

Demostración. — Supongamos que a y b son unidos en $\{A_e, \ldots\}$. De lo visto en el lema anterior se deduce que son unidos en $\{A_i, \ldots\}$ $a + \omega$ y $a + 1 = 1$; análogamente son unidos en $\{A_i, \ldots\}$ $b + \omega$ y 1, luego $a + \omega$ y $b + \omega$ son unidos en $\{A_i\}$. Pero $a + \omega$ y $b + \omega$ deben ser unidos en $\{A_e, \ldots\}$, luego es $a + \omega = b + \omega$. Recíprocamente si $a + \omega = b + \omega$, son unidos a y b en $\{A_e,\}$, en efecto: $a \subset a + \omega$ y $a + \omega$ es unido con 1 en $\{A_i, \ldots\}$. Como todo ω' unido con $a + \omega$ en $\{A_i, \ldots\}$ sigue a ω, todo elemento que se encuentre entre a y $a + \omega$ y unido con $a + \omega$ en $\{A_i, \ldots\}$ es igual a $a + \omega$, luego a es unido con $a + \omega$ en $\{A_e, \ldots\}$. Análogamente b es unido con $b + \omega$, y como $a + \omega = b + \omega$, son unidos a y b en $\{A_e, \ldots\}$.

TEOREMA VI. — Sean

$$[\{A_i, \ldots\} \{A_e, \ldots\}] \quad y \quad [\{A_i', \ldots\} \{A_e', \ldots]$$

dos anágenos, y

$$\{A_i'', \ldots\} = \{A_i, \ldots\} \stackrel{i}{-} \{A_i', \ldots\} \ (*) , \quad \{A_e'', \ldots\} = \{A_e, \ldots\} \circ \{A_e', \ldots\}.$$

Entonces $[\{A_i'', \ldots\} \ \{A_e'', \ldots\}]$ es un anágeno.

Demostración. — Por lo demostrado anteriormente son $\{A_i'', \ldots\}$ y $\{A_e'', \ldots\}$ subdivisiones homomorfas. Basta pues mostrar que ellas verifican las condiciones 1) y 2) de los anágenos (2). En efecto:

1) Sea $a \subset b$ y vamos a demostrar que para que a y b sean unidos en $\{A_e'', \ldots\}$ es necesario y suficiente que no exista ningún elemento entre a y b, $\neq b$ unido con b en $\{A_i'', \ldots\}$.

a) La condición es necesaria. Supongamos lo contrario, o sea que existe b, tal que $a \subset b_1 \subset b$ $b_1 \neq b$ siendo b_1 y b unidos en $\{A_i'', \ldots\}$ y a y b unidos en $\{A_e'', \ldots\}$. Entonces por definición son unidos a y b en $\{A_e, \ldots\}$ y en $\{A_e', \ldots\}$, luego son unidos $b + b_1$ y $a + b_1$ o sea b_1 *y* b *en* $\{A_e, \ldots\}$ *y en* $\{A_e', \ldots\}$. Como son unidos b y b_1 en $\{A_i'', \ldots\}$ existe por definición un número finito de elementos $c_1, \ldots c_n$, tales, que en la sucesión

$$b, c_1, \ldots c_n, b_1$$

son unidos cada dos consecutivos, ya sea en $\{A_i, \ldots\}$ ya sea en $\{A_i', \ldots\}$. En virtud del lema II podemos hacer

$$b\,\omega = c_1\,\omega \quad ; \quad c_1\,\omega' = c_2\,\omega' \quad ;$$

$$c_2\,\omega = c_3\,\omega' \quad ; \quad \ldots c_n\,\omega = b_1\,\omega \quad [\text{o} \quad c_n\,\omega' = b_1\,\omega'],$$

donde ω, ω' son los elementos definidos en el lema correspondientes a los dos anágenos

$$[\{A_i, \ldots\} \ \{A_e, \ldots\}] \quad y \quad [\{A_i', \ldots\} \ \{A_e', \ldots\}].$$

De donde resulta

$$\boxed{b\,\omega\,\omega' = b_1\,\omega\,\omega'}$$

(*) Se puede utilizar indistintamente la notación $\stackrel{i}{-}$ o $\stackrel{e}{-}$, puesto que acá se trata de subdivisiones homomorfas *i* y *e* a la vez.

Escribiendo esta igualdad $(b\,\omega').\omega = (b_1\,\omega').\omega$ deducimos que $b\,\omega'$ y $b_1\,\omega'$ son unidos en $\{A_i, \ldots\}$ (lema II). Pero por lo visto b y b_1 son unidos en $\{A_e, \ldots\}$, lo que da que $b\,\omega'$ y $b_1\,\omega'$ son unidos en $\{A_e, \ldots\}$, luego en virtud del lema I debe ser $b\,\omega' = b_1\,\omega'$. En virtud del lema II esta igualdad indica que b y b_1 son unidos en $\{A_i', \ldots\}$, pero por lo visto b y b_1 son unidos en $\{A_e', \ldots\}$, luego es $b = b_1$ (lema I). Llegamos a una contradicción con $b \neq b_1$.

b) *La condición es suficiente.* Si no existe ningún elemento entre a y b, $\neq b$ unido con b en $\{A_i'', \ldots\}$ con más razón no existe tal elemento unido con b en $\{A_i, \ldots\}$ ni en $\{A_i', \ldots\}$. Pero por definición de anágenos esto indica que a y b son unidos en $\{A_e, \ldots\}$ y en $\{A_e', \ldots\}$, luego lo son en $\{A''_e, \ldots$ l. q. d. d.

2) Vamos a mostrar que para que a y b sean unidos en $\{A_i'', \ldots\}$ es necesario y suficiente que no exista ningún elemento entre a y b, $\neq a$ unido con a en $\{A_e'', \ldots\}$.

a) *La condición es necesaria.* Suponemos lo contrario, o sea que a y b son unidos en $\{A_i'', \ldots\}$ y que sin embargo existe un a_1 tal que $a \subset a_1 \subset b$ $a \neq a_1$ y que a y a_1 son unidos en $\{A_e'', \ldots\}$. Entonces también son unidos a y a_1 en $\{A_e, \ldots\}$ y en $\{A_e', \ldots\}$. Como hemos visto en 1 a) del hecho que a y b son unidos en $\{A_i'', \ldots\}$ se deduce que $a\,\omega.\omega' = b\,\omega\,\omega'$. Pero $a \subset a_1 \subset b$ luego $a\omega\omega' = a_1\omega\omega'$ lo que indica (lema II) que $a\,\omega'$ y $a_1\,\omega$ son unidos en $\{A_i, \ldots\}$. Pero siendo unidos en $\{A_e, \ldots\}$ a y a_1 lo son $a\,\omega'$ y $a_1\,\omega'$, y entonces en virtud del lema I debe ser $a\,\omega' = a_1\,\omega'$. Luego a y a_1 son unidos en $\{A_i', \ldots\}$ y como lo son en $\{A_e', \ldots\}$ resulta $a = a_1$. Hemos llegado a una contradicción con $a \neq a_1$.

b) *La condición es suficiente.* En 1 a) hemos visto que si a y b son unidos en $\{A_i'', \ldots\}$ es necesario que sea $a\,\omega\,\omega' = b\,\omega\,\omega'$. Vamos a mostrar que esta condición es también suficiente; en efecto: En virtud del lema I tenemos que

a es unido con $a.\omega$ en $\{A_i, \ldots\}$;
$a.\omega$ unido con $a.\omega\,\omega' = b.\omega\,\omega'$ en $\{A_i', \ldots\}$;
$b.\omega.\omega'$ unido con $b.\omega$ en $\{A_i', \ldots\}$;
$b.\omega$ unido con b en $\{A_i, \ldots\}$.

luego es a unido con b en $\{A_i'', \ldots\}$. Así que $a\,\omega\,\omega' = b.\omega\,\omega'$ es necesario y suficiente para que a y b sean unidos en $\{A_i'', \ldots\}$. De acá se deduce que $\omega\,\omega'$ es unido con 1 en $\{A_i'', \ldots\}$ y que todo otro elemento unido con 1 en $\{A_i'', \ldots\}$ sigue a $\omega\,\omega'$. Entonces $a + \omega\,\omega'$ es unido con 1 en $\{A_i'', \ldots\}$ y todo elemento que sigue a a y unido con $a + \omega\,\omega'$ en $\{A_i'', \ldots\}$, sigue a $\omega\,\omega'$ y por lo tanto

a $a + \omega\omega'$. Quiere decir que no hay ningún elemento entre a y $\omega\,\omega' + a$, $\neq \omega\,\omega' + a$ y unido con $a + \omega\,\omega'$ en $\{A_i'', \ldots\}$. Luego en virtud de lo demostrado en 1 b) es a unido con $a + \omega\,\omega'$ en $\{A_e'', \ldots\}$. De acá son unidos $a.b = a$ y $(a + \omega\,\omega').b$ en $\{A_e'', \ldots\}$; pero $a \subset (a + \omega\,\omega')\,b \subset b$ luego por hipótesis es $(a + \omega\,\omega').b = a$ de donde $b.\omega\,\omega' = a.\omega.\omega'$ lo que según lo dicho indica que a y b son unidos en $\{A_i'', \ldots\}$ l. q. d. d.

De la misma manera se demuestra que si

$$\{A_i''', \ldots\} = \{A_i, \ldots\} \text{ o } \{A_i', \ldots\}$$

y $$\{A_e'', \ldots\} = \{A_e, \ldots\} \overset{e}{-} \{A_e' \ldots\}$$

es $$[\{A_i'', \ldots\} \quad ; \quad \{A_e''', \ldots\}]$$

un anágeno. De lo dicho se deducen los dos corolarios siguientes:

Corolario I. — Los anágenos (2) forman una estructura, de modo que si

$$[\{A_i'' \ldots\} \ \{A_e'', \ldots\}] \text{ y } [\{A_i''', \ldots\} \ \{A_e''', \ldots\}]$$

son el producto y suma respectivamente de

$[\{A_i, \ldots\} \ \{A_e, \ldots\}]$ y $[\{A_i', \ldots\} \ \{A_e', \ldots\}]$

es

$\{A_i'', \ldots\} = \{A_i, \ldots\} \overset{i}{-} \{A_i', \ldots\}$; $\{A_e'', \ldots\} = \{A_e, \ldots\}$ o $\{A_e', \ldots\}$

y $\{A_i''', \ldots\} = \{A_i\}$ o $\{A_i'\}$; $\{A_e'''\} = \{A_e\} \overset{e}{-} \{A_e'\}$

Corolario II. — Si $\omega\ \omega'\ \omega''\ \omega''$ son los elementos correspondientes a esos anágenos definidos en el lema II es $\omega'' = \omega.\omega'$ $\omega''' = \omega + \omega'$.

19. — Teorema VII. — Los anágenos (2) forman una estructura distributiva.

Demostración. — Sean

$[\{A_i, \ldots\} \ \{A_e, \ldots\}]$, $[A_i', \ldots\} \ \{A_e', \ldots\}]$, $[\{A_i'', \ldots\} \ \{A''_e, \ldots\}]$

tres anágenos cualesquiera, y ω, ω_1, ω_2, los elementos definidos en el lema II, § 18, correspondientes. Basta demostrar, pues, que $(\omega + \omega_1)\,\omega_2 = \omega\,\omega_2 + \omega_1\,\omega_2$. En efecto, en virtud del lema II ω y

$\omega\,\omega_2$ como ω_1 y $\omega_1\,\omega_2$ son unidos en $\{A''_i, \ldots\}$, luego son unidos en $\{A_i'', \ldots\}$ $\omega + \omega_1$ y $\omega\,\omega_2 + \omega_1\,\omega_2$, lo que exige, en virtud del mismo lema: $(\omega + \omega_1)\,\omega_2 = (\omega\,\omega_2 + \omega_1\,\omega_2)\,\omega_2 = \omega\,\omega_2 + \omega_1\,\omega_2$ l. q. d. d.

Ahora si a toda estructura « asociamos » la estructura de sus anágenos (2), la estructura asociada será distributiva; falta, pues, solamente ver que se verifica el

Principio de permanencia. — Toda estructura muy fuerte y distributiva es isomorfa con la asociada, o sea con la de sus anágenos (2).

Demostración. — En virtud del corolario II del T. VI, § 18, a todo anágeno corresponde un elemento de la estructura. Recíprocamente a cada elemento ω de la estructura corresponde un anágeno (2); en efecto. Formemos las dos familias $\{A_i, \ldots$ $\{A_e, \ldots\}$ según esta ley: dos elementos a, b son unidos en $\{A_i, \ldots\}$ si $a\,\omega = b.\omega$ y en $\{A_e, \ldots\}$ si $a + \omega = b + \omega$. 1) $\{A_i\}$ *es una subdivisión homomorfa*, puesto que si

$$a\,\omega = b.\omega$$

$$c\,\omega = d.\omega$$

se deduce $a.c.\omega = b.d.\omega$ y $(a + c)\,\omega = (b + d)\,\omega$. Análogamente se verá que $\{A_e\}$ es una subdivisión homomorfa. 2) Para que a y b, $a \subset b$, sean unidos en $\{A_e, \ldots\}$ es necesario y suficiente que para todo b_1 tal que $a \subset b_1 \subset b$, b y b_1 unidos en $\{A_i, \ldots\}$ sea $b_1 = b$. En efecto, si a y b son unidos en $\{A_e, \ldots\}$ es $a + \omega = b + \omega$; además $b_1\,\omega = b.\omega$; de la primera igualdad es $b_1 + \omega = b + \omega$, lo que exige (Cap. II) $b_1 = b$, luego la condición es necesaria. Ella es suficiente puesto que como $(a + b\,\omega)\,\omega = b.\omega$ es $a + b\,\omega$ unido con b en $\{A_i, \ldots\}$, y como además $a \subset a + b\,\omega \subset b$ debe ser $a + b\,\omega = b$ de donde $a + \omega = b + \omega$. luego a y b son unidos en $\{A_e, \ldots\}$. Así que $[\{A_i, \ldots\}$ $\{A_e, \ldots$ $]$ es un anágeno (2). Luego hay una correspondencia biunívoca entre los elementos de la estructura y sus anágenos (2), además esta correspondencia conserva la suma y producto (Corolario II), luego queda establecido el isomorfismo.

20. — Examinando las demostraciones de los teoremas relativos a los anágenos (2), se llega a la siguiente importante generalización de estos anágenos.

Consideremos una estructura muy fuerte y supongamos que en ella están definidas dos funciones $M(a, b)$ y $D(a, b)$, uniformes o no, que verifican las dos siguientes condiciones (la notación $d = D(a\,b)$ indica que d es uno de los elementos que hace corresponder la función; lo mismo se refiere a $m = M(c, d)$:

1) Si $b \subset a$ es $b = D(a, b)$; existen d y d_1 tales que $d = D(a, b)$ $d_1 = D(a, b)$ y $d \subset a, d_1 \subset b$.

2 Si $a \supset b$ es $b = M(a, b)$; existen m y m_1 tales que $m = M(a, b)$ $m_1 = M(a, b)$ y $m \supset a,\ m_1 \supset b$.

En semejantes estructuras se puede definir los anágenos (2) respecto a M y D como sigue. Llamamos « subdivisión homomorfa respecto a M, D » a las familias de conjuntos no vacíos y primos dos a dos, cuyos elementos no se separan respecto a M y D, es decir si A, B, C, D, son conjuntos de la familia y $a, a_1 \varepsilon A$; $b, b_1 \varepsilon B$ $D(a, b) \varepsilon C$ $M(a, b) \varepsilon D$ se deduce $D(a_1 b_1) \varepsilon C$ $M(a_1 b_1) \varepsilon D$ para todas las determinaciones de M y D.

Luego definimos los anágenos 2 respecto de M, D, como un par de subdivisiones homomorfas M, D que verifican las 2 condiciones de anágenos del § 17.

Todos los teoremas de los §§ 17-19 quedan ciertos para estos anágenos generalizados.

Vamos a demostrar la validez del lema II y de 1 a) del teorema IV y del teorema VII, que son los únicos pasajes que presentan alguna modificación esencial.

21. — *Demostración del lema II.* — Sea $\bar{\omega}$ un elemento unido con ω en $\{A_e, \ldots\}$.

Sea α_k un elemento unido con 1 en $\{A_i, \ldots\}$. $M(\bar{\omega}, \alpha_k)$ es unido con $\alpha_k = M(\omega, \alpha_k)$ en $\{A_e, \ldots\}$ y también $M(\bar{\omega}, a_k)$ es unido con $1 = M(\bar{\omega}, 1)$ y por lo tanto con α en $\{A_i, \ldots\}$. Luego (lema I) $\alpha_k = M(\bar{\omega}, \alpha_k)$ o sea $\bar{\omega} \subset \alpha_k$, $\bar{\omega} \subset \omega$. Así que ninguno de los elementos unidos con ω en $\{A_e, \ldots\}$ sigue a ω. Luego ω es unido con 1 en $\{A_i, \ldots\}$, y además ω sigue a todos los elementos unidos con él en $\{A_e, \ldots\}$ y recíprocamente. Ahora, a y $a.\omega$ son unidos en $\{A_i, \ldots\}$; en efecto, suponiendo lo contrario existe a_1 tal que $a.\omega \subset a_1 \subset a$ siendo unidos a_1 y $a.\omega$ en $\{A_e, \ldots\}$; pero $a.\omega \subset \omega$ luego $a.\omega$ y ω son unidos en $\{A_e, \ldots\}$ y por lo tanto son unidos en $\{A_e, \ldots\}$ a_1 y ω, lo que da $a_1 \subset \omega$, $a_1 \subset a\,a_1 = a.\omega$. Análogamente se verá que son unidos en $\{A_i, \ldots\}$ b y $b.\omega$. Entonces si $a.\omega = b.\omega$

son unidos a y b en $\{A_i, \ldots\}$. Recíprocamente si a y b son unidos en $\{A_i, \ldots\}$ lo son $a\,\omega$ y b, pero como esos preceden a ω son unidos con ω en $\{A_e, \ldots\}$ lo que da $a.\omega = b.\omega$ (lema 1).

Demostración de 1 *a) del teorema VI.* — Todos los razonamientos hechos hasta obtener la igualdad $b\,\omega\,\omega' = b_1\,\omega\,\omega'$ se conservan. Luego $b\,\omega'$ y $b_1\,\omega$ son unidos en $\{A_i, \ldots\}$. Tenemos:

$M\,(b_1, b\omega')$ es unido con $b = M\,(b, b\omega')$ y por lo tanto con b_1 en $\{A_e, \ldots\}$.

$M\,(b_1, b\,\omega')$ es unido con $b_1 = M\,(b_1, b_1\,\omega')$ en $\{A_i, \ldots\}$.

luego $M\,(b_1, b\omega') = b_1$; $b_1 \supset b\,\omega'$, $b_1\,\omega' = b\omega'$.

Esta última igualdad indica que b_1 y b son unidos en $\{A_i', \ldots\}$ y como son unidos en $\{A_e', \ldots\}$ es $b_1 = b$.

Demostración del teorema VIII. — Como se demostró (lema II) es ω unido con 1 en $\{A_i, \ldots\}$ y todo elemento que precede a ω es unido con él en $\{A_e, \ldots\}$. Por lo tanto $D\,(\omega, \omega')$ es unido con $\omega_1 = D\,(1, \omega_1)$ y por lo tanto con $\omega\,\omega_1$ en $\{A_i, \ldots\}$; además $D\,(\omega, \omega')$ es unido con ω y por lo tanto con $\omega\,.\,\omega_1$ en $\{A_e, \ldots\}$. Luego $D(\omega, \omega') = \omega.\omega'$. Análogamente se verá que $\omega + \omega_1 = M\,(\omega, \omega')$. Luego en vez de $(\omega + \omega_1)\,\omega_2$ podemos escribir

$D\,[\omega_2\,M\,(\omega, \omega_1)]$ y en vez de $\omega\,\omega_2 + \omega_1\,\omega_2 = M\,[D\,(\omega, \omega_2)\,;\ D\,(\omega_1\,\omega_2)]$.

Pero ω es unido con $\omega\omega_2$ en $\{A_i'', \ldots\}$ y ω_1 con $\omega_2\omega_1$ en $\{A_i'', \ldots\}$ y por lo tanto $M\,(\omega, \omega_1)$ es unido con $M\,(\omega\omega_2\,;\ \omega_1\omega_2)$ en $\{A_i'', \ldots\}$ lo que da

$$D\,[M\,(\omega, \omega_1)\ ;\ \omega_2] = M\,(\omega\,\omega_2\,,\ \omega_1\,\omega_2]$$

o sea
$$(\omega + \omega_1)\,\omega_2 = \omega\,\omega_2 + \omega_1\,\omega_2.$$

Análogamente se demuestra que

$$(\omega + \omega_2)\,(\omega_1 + \omega_2) = \omega\,\omega_1 + \omega_2.$$

De acá se deduce que los anágenos 2 *proporcionan un método eficaz para construir estructuras distributivas, puesto que es fácil encontrar funciones* M, D *que verificon las muy débiles condiciones* 1) *y* 2) *del* § 20.

22. — En particular se introduce la definición de anágeno 2 de una estructura respecto a otra estructura, en analogía con la definición del § 7:

Sea S una estructura muy fuerte contenida en otras dos estructuras $\overline{S}$ y $\underline{S}$ (no necesariamente fuertes) de modo que si en S es $a \subset b$ también lo es en $\overline{S}$ y en $\underline{S}$. Si a y b son dos elementos de S puede ser que el producto y suma de estos elementos en S no coincida con el producto o suma de estos elementos en $\overline{S}$ o en $\underline{S}$. Entondes definimos las funciones $M(a, b)$ y $D(a, b)$ de la siguiente manera:

$$M(a, b) = a + b \text{ (en } S)$$

si la suma $a + b$ en S coincide con la suma de estos elementos en $\overline{S}$

y $$M(a, b) = a, b \qquad \text{en el caso contrario;}$$

$$D(a, b) = a . b \text{ (en } S)$$

si el producto de estos elementos en S coincide con él en $\underline{S}$

y $$D(a, b) \text{ igual a } a \text{ y a } b \qquad \text{en el caso contrario.}$$

Esas definiciones verifican las condiciones 1), 2) del § 20, luego podremos formar los anágenos de S respecto a M y D que llamamos « los anágenos 2 de S respecto a $\overline{S}$ y $\underline{S}$ ».

IV. — Prolongaciones distributivas según los 3 principios

23. — En el capítulo anterior hemos mostrado que a toda estructura de anágenos se puede « asociar » otra estructura distributiva según el principio de permanencia. Pero esta asociada puede no contener a la estructura primitiva, es decir que el principio de prolongación no fué conservado en ninguno de los dos métodos indicados en el capítulo anterior. En este capítulo vamos a mostrar que combinando estos métodos con el expuesto en el § 7, Cap. I, se obtiene una asociada según los 3 principios. Los mismos métodos sirven para obtener asociadas fuertemente distributivas (*) y muy fuertemente distributivas.

(*) Una estructura es fuertemente distributiva a la izquierda si se verifica

$$(a + b + \ldots)\, m = a\, m + b\, m + \ldots$$

para infinitos $a, b, \ldots$, y a la derecha si

$$a\, b\, c \ldots + m = (a + m)(b + m)(c + m) \ldots$$

De este modo quedará demostrado que todo conjunto parcialmente ordenado puede ser ampliado con nuevos elementos hasta obtener una estructura fuertemente distributiva, y si este conjunto ordenado es él mismo una tal estructura, esta ampliación no introduce (desde el punto de vista del isomorfismo) elementos nuevos.

24. — Sean A, B, C,... los componentes e de anágenos (1) de un conjunto parcialmente ordenado. Como hemos visto en el Cap. I éstos forman una estructura que designamos con Σ_e, y nos proponemos ampliarla hasta obtener una estructura distributiva.

Consideremos las posibles composiciones e (Cap. II) en número finito y los posibles productos en número finito e infinito de estos anágenos de Σ_e, luego las posibles composiciones e (en número finito) y productos de los conjuntos así obtenidos y así al infinito. Sea $\overline{\Sigma}_e$ el conjunto de todos los conjuntos que pueden ser así obtenidos. $\overline{\Sigma}_e$ es evidentemente una estructura si convenimos que un conjunto de $\overline{\Sigma}_e$ sigue a otro cuando está contenido ($\leq$) en él. Además $\overline{\Sigma}_e$ contiene a Σ_e de modo que si un elemento precede a otro en Σ_e también le precede en $\overline{\Sigma}_e$.

Definición. — Sean F, F_1 dos familias (conjuntos) de anágenos e de Σ_e.

Llamamos composición respecto a $(\overline{\Sigma}_e)$ de F, F_1 y lo designamos $F * F_1$ a la familia compuesta por los anágenos de $F + F_1$ y los posibles anágenos de Σ_e que son de la forma $A_1 \overset{e}{-} A_2 \overset{e}{-} A_3 \overset{e}{-} \dots \overset{e}{-} A_k$ donde los $A_1, \dots A_k$ pertenecen a $F + F_1$.

Como Σ_e está contenida en $\overline{\Sigma}_e$ podemos considerar los anágenos e (1) de Σ_e con respecto a $\overline{\Sigma}_e$ (§ 7, Cap. I). Es fácil ver que estos últimos son conjuntos (familias) $\mathscr{A}$ de anágenos de Σ_e que verifican las dos siguientes condiciones:

si $\quad A \in \mathscr{A}$ y $A_1 \supset A$, $A_1 \in \Sigma_e$ es $A_1 \in \mathscr{A}$ [1]

si $\quad A_1, \dots A_k \in \mathscr{A}$ y $C = A_1 \overset{e}{-} A_2 \overset{e}{-} \dots A_k$, $C \in \Sigma_e$ es $C \in \mathscr{A}$ [2]

En efecto, la condición [1] es evidente; vamos a demostrar la [2]. Sea $\mathscr{A}_1$ el conjunto de los elementos de $\overline{\Sigma}_e$ que preceden a todos los de $\mathscr{A}$. Por definición $A_1, \dots A_k$ siguen a todos los de $\mathscr{A}_1$, luego C también sigue a todos los de $\mathscr{A}_1$, pero como $C \in \Sigma_e$ resulta que $C \in \mathscr{A}$.

TEOREMA 1. — Si F, F_1 son dos familias de anágenos e de Σ_e que verifican las dos condiciones [1], [2], entonces la composición respecto a $\overline{\Sigma}_e^*$ de F, F_1 también verifica estas condiciones.

Demostración. — Sea $F_2 = F * F_1$ y vamos a mostrar que F_2 verifica [1] y [2]. La condición [2] es evidente por la definición misma de la composición con respecto a $\overline{\Sigma}_e$, basta pues ver que se verifica [1]:

Sean $A_2 \varepsilon F_2$ y $A_2' \supset A_2$, $A_2' \varepsilon \Sigma_e$.

Por definición es o $A_2 \varepsilon F$ o $A_2 \varepsilon F_1$ o $A_2 = A \overset{e}{-} B \overset{e}{-} \ldots \overset{e}{-} K$

donde $A , B , \ldots K \varepsilon F + F_1$.

Si A_2 pertenece a F o a F_1 también A_2' pertenecerá a F o F_1 y por lo tanto a F_2.

Supongamos, pues, $A_2 = A \overset{e}{-} B \overset{e}{-} \ldots \overset{e}{-} K$.

En virtud del Corolario del teorema I del Cap. II, § 9, es

$$A'_2 = A' \overset{e}{-} B' \overset{e}{-} \ldots \overset{e}{-} K'$$

donde $A' \supset A, B' \supset B , \ldots K' \supset K$ y $A' , \ldots K' \varepsilon \Sigma_e$.

Por hipótesis debe ser

$A' , B' , \ldots K' \varepsilon F + F_1$, luego $A'_2 \varepsilon F_2$ l. q. d. d.

El teorema queda cierto para un número finito cualquiera de $F, F_1, \ldots$ pero no infinito. En cambio es fácil ver que el producto finito o infinito de familias que verifican [1] y [2] también verifica estas condiciones.

Ahora consideremos los posibles anágenos (1) de $\overline{\Sigma}_e$, con respecto a $\overline{\Sigma}_e$, luego las posibles composiciones ($\overline{\Sigma}_e$) en número finito y productos en número finito e infinito de estos anágenos y de los conjuntos que se obtienen de esta manera. Sea Σ_e' el conjunto de todos estos conjuntos. Todo conjunto $\mathscr{A}$ de Σ_e' verifica las condiciones 1) y 2) y además Σ_e' es una estructura muy fuerte si convenimos que un conjunto de Σ_e' sigue a otro cuando está contenido ($\leq$) en él. Entonces resulta el:

PRINCIPIO DE PROLONGACIÓN. — La estructura Σ_e' contiene a la Σ_e de modo que si un elemento precede a otro en Σ_e también le precede en Σ_e'.

TEOREMA II. — La estructura Σ_e' es distributiva, es decir si $\mathscr{A}, \sigma, \Gamma \in \Sigma_e'$ se verifica $(\mathscr{A} * \sigma) \times \Gamma = (\mathscr{A} \times \Gamma) * (\sigma \times \Gamma)$.

Demostración. — Sean $\mathscr{A}' = \mathscr{A} - \Gamma . \mathscr{A}$ $\sigma' = \sigma - \Gamma . \sigma$

entonces

$$(\mathscr{A} * \sigma) \times \Gamma = [(\mathscr{A}' + \Gamma . \mathscr{A}) * (\sigma' + \Gamma . \sigma] \times \Gamma =$$

$$= [(\mathscr{A}' * \sigma') + (\mathscr{A}' * \Gamma . \sigma) + (\sigma' * \Gamma . \mathscr{A}) + (\Gamma . \mathscr{A} * \Gamma . \sigma)] \times \Gamma =$$

$$= [(\mathscr{A}' * \sigma') \times \Gamma] + [(\mathscr{A}' * \Gamma \times b) \times \Gamma] + [(\sigma' * \Gamma A) \times \Gamma] +$$

$$+ [(\Gamma \mathscr{A} * \Gamma \sigma) \times \Gamma],$$

Entonces si A pertenece a $(\mathscr{A} * \sigma) \times \Gamma$ debe pertenecer a uno de los 4 sumandos de la última igualdad. Suponemos, por ejemplo, que A pertenece a $(\mathscr{A}' * \sigma') \times \Gamma$. Entonces es

$$A = A_1 \stackrel{e}{-} A_2 \stackrel{e}{-} \dots \stackrel{e}{-} A_k,$$

donde $A_1, \dots A_k$ pertenecen a $\mathscr{A}' + \sigma'$.

Sea A_1 de $\mathscr{A}'$. como $A_1 \supset A$ y $A_1 \in \Sigma_e$ resulta en virtud de la condición [1] que A_1 pertenece a Γ, puesto que A pertenece a Γ, lo que contradice a $\mathscr{A}' = \mathscr{A} - \Gamma$.

De la misma manera se verá en el caso de los otros 3 sumandos que sólo es posible que A pertenezca a $(\Gamma \times \mathscr{A}) * (\Gamma \times b)$, es decir que

$$(\mathscr{A} * b) \times \Gamma \leq (\mathscr{A} \times \Gamma) * (b \times \Gamma)$$

y como también

$$(\mathscr{A} * \sigma) \times \Gamma \geq (\mathscr{A} \times \Gamma) * (\sigma \times \Gamma)$$

resulta la tesis.

Los principios de totalidad y de permanencia están incluídos en el siguiente

TEOREMA III. — Si Σ_e es una estructura distributiva ella es isomorfa con la Σ_e'.

Demostración. — Si Σ_e es distributiva la comdosición e de dos o varios (en número finito) de sus anágenos es otro anágeno de Σ_e Luego Σ_e es isomorfa con $\overline{\Sigma}_e$ Por lo tanto los anágenos de Σ_e con

respecto a $\overline{\Sigma}_e$ son todos anágenos de Σ_e y la composición $*$ coincide con la $\stackrel{e}{-}$. Luego es $\overline{\Sigma}_e$ isomorfa con Σ_e' y por carácter transitivo son isomorfas Σ_e y Σ_e'.

De modo que a toda estructura de anágenos Σ_e se puede asociar una estructura distributiva según los 3 principios; esta asociada es la estructura Σ_e'.

Es claro que se llega a resultados análogos tomando en vez de Σ_e su isomorfa Σ_i de los anágenos i y utilizando en vez de la composición $\stackrel{e}{-}$ la $\stackrel{i}{-}$, etc.

25. — Vamos a indicar brevemente cómo se puede obtener un resultado análogo, utilizando en vez del método de la composición el método de anágenos (2).

Consideremos como antes las estructuras Σ_e y $\overline{\Sigma}_e$ y designemos con A, B,... sus elementos. A todo $A \in \Sigma_e$ hacemos corresponder dos fmilias $\{\mathscr{A}_i, \dots\}$ y $\{\mathscr{A}_e, \dots\}$ de subconjuntos de $\overline{\Sigma}_e$ definidas como sigue:

dos elementos

$$B, C \text{ de } \overline{\Sigma}_e \text{ son unidos en } \{A_i, \dots\} \text{ si } B * A = C * A$$

dos elementos

$$B, C \text{ de } \overline{\Sigma}_e \text{ son unidos en } \{A_e, \dots\} \text{ si } B \times A = C \times A$$

Sean ahora B_1, C_1, D_1,... elementos de Σ_e.

Si B_1 y C_1 son unidos en $\{A_i, \dots\}$ también lo son $(B_1 \times D_1)$ y $B_1 * D_1$. En efecto tenemos por definición $B_1 * A = C_1 * A$ de donde $B_1 * D_1) * A = (C_1 * D_1) * A$, además en virtud del teorema I, § 9, Cap. II, como

$$(B_1 * A) \times D_1 = (B_1 \times D_1) * (D_1 \times A$$

resulta $\quad (B_1 \times D_1) * (D_1 \times A) = (C_1 \times D_1) * (D_1 \times A)$

de donde $\quad (B_1 \times D_1) * A = (C_1 \times D_1) * A$

Si $C_1 \subset B_1$ para que B_1 y C_1 sean unidos en $\{A_e, \dots\}$ es necesario y suficiente que no exista ningún $D \neq B$, tal que $C_1 \subset D \subset B_1$

y unido con B_1 *en* $\{A_i, \ldots\}$. En efecto. La condición es necesaria: tenemos por hipótesis

$$B_1 \times A = C_1 \times A \quad , \quad D * A = B_1 * A \quad , \quad D \supset C_1$$

luego $$D \supset (B_1 * A) \times C_1.$$

Pero

$$(B_1 * A) \times C_1 = (B_1 \times C_1) * (C_1 \times A) = B_1 * (B_1 \times A) = B,$$

por lo tanto es $D \supset B_1$ lo que da $D = B_1$

La condición es suficiente: Haciendo $D = (B_1 * A) \times C_1$ se tiene que $C_1 \subset D \subset B_1$, y como

$$[(B_1 * A) \times C_1] * A = B_1 * (C_1 \times A) * A = B_1 * A$$

es D unido con B_1 en $\{A_., \ldots\}$; luego debe ser

$$D = B_1 \quad \text{o} \quad C_1 \times A \supset B_1$$

y como $C_1 \subset B_1$ es $C_1 \times A = B_1 \times A$ es decir que C_1 y B_1 son unidos en $\{A_e, \ldots\}$.

Análogamente se demuestra que si B_1, C_1 son unidos en $\{A_e, \ldots\}$ también lo son $B_1 \times D$, $B_1 * D$ y para que sean unidos en $\{A_i, \ldots\}$ es necesario y suficiente que para todo $B_1 \supset D \supset C_1$ donde D es unido con C_1 en $\{A_e, \ldots\}$ se verifica $D = C_1$.

De estas observaciones se deduce fácilmente que a todo A de Σ_e corresponde un anágeno (2) $[\{A_i, \ldots\} \; \{A_e, \ldots\}]$ del tipo de los anágenos generalizados del § 20, Cap. III. Luego estos anágenos (2) proporcionan una estructura distributiva asociada según los 3 principios.

26. — Los métodos de los §§ 24, 25 sirven también para transformar toda estructura de anágenos en una estructura fuertemente y muy fuertemente distributiva. Para eso consideremos algunos preliminares.

Llamemos composición $\overset{e}{-}$ muy fuerte o fuerte (*) de infinitos conjuntos $A, B, \ldots$ y lo designamos $A \overset{e}{-} B \overset{e}{-} \ldots$ al conjunto formado por los elementos de $A + B + \ldots$ y los posibles elementos de la forma

(*) Según que se trate de una infinidad numerable o no de conjuntos.

$a\,b' \ldots$ donde $a, b, \ldots$ pertenecen a $A + B + \ldots$ Análogamente se define la composición i fuerte o muy fuerte.

Las mismas consideraciones hechas en el capítulo II sirven para demostrar que:

1) Si $A, B, \ldots M$, son anágenos e se verifica

$$(A \overset{e}{-} B \overset{e}{-} \ldots) \times M = (A \times M) \overset{e}{-} (B \times M) \overset{e}{-} \ldots$$

2) Si $K = A \overset{e}{-} B \overset{e}{-} \ldots$ siendo $A, B, \ldots$ anágenos e y $K_1 \leq K$ es un anágeno e, entonces

$K_1 = A_1 \overset{e}{-} B_1 \overset{e}{-} \ldots$ donde A_1, B_1 son anágenos y $A_1 \leq A$, $B_1 \leq B, \ldots$

Diremos que un espacio parcialmente ordenado verifica la condición α') si la composición fuerte $\overset{e}{-}$ de anágenos $\overset{e}{-}$ es un anágeno $\overset{e}{-}$ y la condición α'') si la composición muy fuerte de sus anágenos es un anágeno.

3) Todo espacio α' (α'') es una estructura fuertemente (muy) distributiva a la izquierda y recíprocamente.

Propiedades análogas se deducen para la composición fuerte i y las estructuras fuertemente distributivas a la derecha.

27. — Sea Σ_e la estructura de los anágenos e y formemos la estructura $\overline{\overline{\Sigma}}_e$ que se obtiene formando las posibles composiciones fuertes e (en número infinito) y los posibles productos de anágenos y de conjuntos a su vez así obtenidos.

Definición. — Sean $F, F_1 \ldots$ infinitos conjuntos de anágenos e de Σ_e. Llamamos composición fuerte respecto a $\overline{\overline{\Sigma}}_e$ de $F, F_1, \ldots$ y la designamos $F * F_1 * \ldots$ al conjunto formado por todos los elementos de $F + F_1 + \ldots$ más los posibles anágenos e de Σ_e que son de la forma $A_1 \overset{e}{-} A_2 \overset{e}{-}, \ldots$ donde $A_1, A_2, \ldots$ son infinitos anágenos que pertenecen a $F + F_1 + \ldots$

Como Σ_e está contenida en $\overline{\overline{\Sigma}}_e$ de modo que si un elemento sigue a otro en Σ_e también le sigue en $\overline{\overline{\Sigma}}_e$ podemos considerar los anágenos e de Σ_e respecto a $\overline{\overline{\Sigma}}_e$. Es fácil ver que estos últimos son conjuntos $\mathscr{A}$ de anágenos de Σ_e que verifican:

Si $A \varepsilon \mathscr{A}$ y $A_1 \supset A$, $A_1 \varepsilon \Sigma_e$ es $A_1 \varepsilon \mathscr{A}$ [1']

Si infinitos

$$A_1, A_2, \ldots \varepsilon \mathscr{A} \text{ y } C = A_1 \overset{e}{-} A_2 \overset{e}{-} \ldots, C \varepsilon \Sigma_e \text{ es } C \varepsilon \mathscr{A} \quad [2']$$

igual que en el § 24 se demuestra que si infinitos F, $F_1, \ldots$ verifican [1′] y [2′] también lo verifican $F * F_1 * \ldots$ y $F \times F_1 \times \ldots$

Ahora sea Σ_e'' la estructura formada por todos los anágenos de Σ_e respecto a $\overline{\overline{\Sigma}}_e$ y las posibles composiciones $(\overline{\overline{\Sigma}}_e)$ y productos que se puede formar con éstos y con los conjuntos así obtenidos a su vez. Repitiendo los razonamientos del § 24 se verá que Σ_e'' es fuertemente distributiva a la izquierda, y si Σ_e es ella misma fuertemente distributiva izquierda entonces son isomorfas Σ_e y Σ_e''. Como además Σ_e está contenida en Σ_e'', resulta que Σ_e'' nos proporciona una asociada fuertemente distributiva izquierda según los 3 principios.

De la misma manera se obtiene una asociada fuertemente distributiva derecha si en vez de los anágenos e y composición e utilizamos los anágenos i y composición i. Además es evidente que basta cambiar los términos fuerte en muy fuerte para obtener los mismos resultados para estructuras asociadas muy fuertemente distributivas.

Finalmente, resultados análogos se obtienen utilizando el método de anágenos (2). No vamos a insistir sobre el particular puesto que está claro el procedimiento a utilizar.

Anágenos (3). Método Kantor-Cauchy

28. — El método del § anterior permite transformar directamente una estructura muy fuerte en una structura fuertemente distributiva sin exigir que la primera sea simplemente distributiva. Pero si se tiene ya una estructura distributiva y se quiere transformarla en fuertemente distributiva es a veces más cómodo y más útil utilizar el siguiente método que llamaremos « método de los anágenos 3 » o de Kantor-Cauchy.

Consideremos una estructura fuerte y distributiva. Llamemos « anágeno e (3) » a toda sucesión infinita del tipo

$$a_1 \subset a_2 \subset a_3 \subset \ldots \subset a_n \subset \ldots$$

Definición. — Diremos que dos anágenos (3)

$$\alpha = (a_1 \subset a_2 \subset \ldots a_n \subset \ldots) \text{ y } \beta = (b_1 \subset b_2 \subset \ldots)$$

son iguales, $\alpha = \beta$ si para todo elemento K se verifica

$$a_1 K + a_2 K + \ldots + a_u . K + \ldots = b_1 K + b_2 K + \ldots b_n . K + \ldots$$

Es claro que la relación $=$ así definida es reflexiva simétrica y transitiva.

Dados dos anágenos (3) $\alpha = (a_1 \subset a_2 \subset \ldots)$ y $\beta = (b_1 \subset b_2 \subset \ldots)$ llamemos *producto* de α y β al anágeno

$$\alpha . \beta = (a_1 b_1 \subset a_2 b_2 \subset a_3 b_3 \subset \ldots)$$

y suma de α y β al anágeno

$$\alpha + \beta = (a_1 + b_1 \subset a_2 + b_2 \subset a_3 + b_3 \subset \ldots).$$

TEOREMA. IV. — Si $\alpha = \beta$, $\gamma = \delta$ es $\alpha . \gamma = \beta . \delta$; $\alpha + \gamma = \beta + \delta$.

Demostración. — Sean

$$\alpha = (a_1 \subset a_2 \subset \ldots) \quad \beta = (b_1 \subset b_2 \subset \ldots) \quad \gamma = (c_1 \subset c_2 \subset \ldots)$$

y k un elemento cualquiera. Tenemos:

$$\alpha \gamma = (a_1 c_1 \subset a_2 c_2 \subset \ldots) \quad \beta \gamma = (b_1 c_1 \subset b_2 c_2 \subset \ldots).$$

Ahora

$$a_1 c_1 k + a_2 c_2 k + \ldots a_n c_n k + a_{n+1} c_{n+1} k + \ldots$$

$$\supset a_1 c_n k + a_2 c_n k + \ldots + a_n c_u k + a_{n+1} c_n k + \ldots$$

y como $\alpha = \beta$ es por definición

$$a_1 c_n k + \ldots a_n c_n k + a_{n+1} c_n k + \ldots = b_1 c_n k + \ldots b_n c_n k + \ldots$$

luego

$$a_1 c_1 k + \ldots a_n c_n k + \ldots \supset b_1 c_n k + \ldots + b_n c_n k + \ldots \supset b_n c_u k$$

y como n es cualquiera resulta

$$a_1 c_1 k + \ldots + a_n c_n k + \ldots \supset b_1 c_1 k + \ldots + b_n c_n k + \ldots ;$$

pero los mismos razonamientos sirven para ver que

$$b_1 c_1 k + \ldots + b_n c_n k + \ldots \supset a_1 c_1 k + \ldots + a_n c_n k + \ldots$$

luego

$$a_1 c_1 k + \ldots a_n c_n k + \ldots = b_1 c_1 k + \ldots b_n c_n k + \ldots$$

o sea $\alpha\gamma = \beta\gamma$.

Análogamente será $\beta\gamma = \beta\delta$ y por lo tanto $\alpha\gamma = \beta\delta$.

Además

$$\alpha + \gamma = (a_1 + c_1 \subset \ldots \subset a_n + c_n \subset \ldots)$$

$$\beta + \gamma = (b_1 + c_1 \subset \ldots \subset b_n + c_n \subset \ldots)$$

y $(a_1 + c_1)\, k + \ldots + (a_n + c_n)\, k + \ldots = a_1 k + c_1 k + \ldots + a_n k + c_n k + \ldots =$

$$= (a_1 k + \ldots + a_n k + \ldots) + (c_1 k + \ldots + c_n k + \ldots) =$$

$$= (b_1 k + \ldots + b_n k + \ldots) + (c_1 k + \ldots c_n k + \ldots) =$$

$$= b_1 k + c_1 k + \ldots + b_n k + c_n k + \ldots$$

$$= (b_1 + c_1)\, k + \ldots (b_n + c_n)\, k + \ldots$$

luego $\alpha + \gamma = \beta + \gamma$, análogamente $\beta + \gamma = \beta + \delta$

y por lo tanto $\alpha + \gamma = \beta + \delta$ l. q. d. d.

Corolario. — Si $\alpha \beta = \alpha$ es $\alpha + \beta = \beta$ y recíprocamente. En efecto, en virtud de lo demostrado, es

$$\alpha + \beta = \alpha . \beta + \beta = (a_1 b_1 \subset \ldots a_n b_n \subset \ldots) +$$

$$+ (b_1 \subset \ldots b_n \subset \ldots) = (b_1 \subset \ldots b_n \ldots) = \beta .$$

De la definición de producto y suma resulta además que

$$\alpha . \beta = \beta . \alpha \quad \alpha . \beta . \gamma = (\alpha) . (\beta . \gamma) \quad \alpha\alpha = \alpha \quad \alpha + \beta = \beta + \alpha$$

$$\alpha + \beta + \gamma = \alpha + (\beta + \gamma) \quad \alpha + \alpha = \alpha .$$

Luego los anágenos (3) forman una estructura si convenimos que $\alpha \subset \beta$ si $\alpha . \beta = \alpha$ (*). Esta estructura es además distributiva, como es fácil de verlo, y además contiene a la primitiva como caso particular haciendo $a = (a \subset a \subset \ldots a \subset \ldots)$.

Teorema V. — Sean

$$\alpha = (a_1 \subset \ldots a_n \subset \ldots) \quad \beta = (b_1 \subset \ldots b_n \subset \ldots)$$

dos anágenos (3) Si a todo índice i se puede indicar un índice j tal que $a_i \subset b_j$ es $\alpha \subset \beta$.

Demostración. — Tenemos que

$$\alpha + \beta = (a_1 + b_1 \subset \ldots a_n + b_n \subset \ldots).$$

(*) Vea *Teoría de Structuras*, de Clivenko, pág. 10, y *Appendice*.

Por hipótesis a todo i se podrá hacer corresponder un j tal que $a_i + b_i \subset b_j$, luego si k es un elemento cualquiera

$$(a_1 + b_1) k + \dots + (a_n + b_n) k + \dots \subset b_1 k + b_2 k + \dots + b_n k + \dots$$

y como naturalmente es

$$(a_1 + b_1) k \dots (a_n + b_n) k + \dots \supset b_1 k + \dots b_n k + \dots$$

resulta

$$(a_1 + b_1) k + \dots + (a_n + b_n) k + \dots = b_1 k + \dots + b_n k + \dots$$

o sea $\alpha + \beta = \beta, \ \alpha < \beta$ l. q. d. d.

Teorema VI. — Dados infinitos anágenos (3) $\alpha_1, \dots \alpha, \dots$ existe la suma infinita de ellos, es decir existe un anágeno (3) μ tal que para todo n es $\mu \supset \alpha_n$ y si $\mu_1 \supset \alpha_n$ para todo n es $\mu \subset \mu_1$.

Demostración. — Sean $\sigma_n = \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n$. Evidentemente basta demostrar que existe la suma infinita $\sigma_1 + \dots + \sigma_n + \dots$ Sean

$$\sigma_1 = (S_1^{(1)} \subset S_2^{(1)} \subset \dots \subset S_n^{(1)} \subset \dots)$$
$$\sigma_2 = (S_1^{(2)} \subset S_2^{(2)} \subset \dots \subset S_n^{(2)} \subset \dots)$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$\sigma_n = (S_1^{(n)} \subset S_2^{(n)} \subset \dots \subset S_n^{(n)} \subset \dots)$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

De la definición de σ_n resulta que $S_n^{(i)} \subset S_n^{i+k}$, luego podemos formar el anágeno (3)

$$\mu = (S_1^{(1)} \subset S_2^{(2)} \subset S_3^{(3)} \subset \dots S_n^{(n)} \subset \dots).$$

En virtud del teorema anterior es $\mu \supset \sigma_n$ para todo n. Sea ahora

$$\mu_1 = (m_1 \subset \dots m_n \subset \dots) \quad \text{y} \quad \mu_1 \supset \sigma_n \quad \text{para todo } n.$$

Entonces para todo n y k cualeuira es

$$m_1 k + m_2 k + \dots + m_n k + \dots = (S_1^{(n)} + m_1) k + \dots (S_n^{(n)} + m_n) k + \dots$$

luego $m_1 k + \dots + m_n k + \dots \supset (S_n^{(n)} + m_n) \, . \, k$

para todo n, y por lo tanto

$$m_1 k + \ldots + m_n k + \ldots \supset (S_1^{(1)} + m_1) k + \ldots (S_n^{(n)} + m_n) . k + \ldots$$

lo que exige

$$m_1 k + \ldots + m_n k + \ldots = (S_1^{(1)} + m_1) . k + \ldots + (S_n^{(n)} + m_n) k \ldots +$$

o sea $\mu_1 = \mu + \mu_1 \quad \mu_1 \supset \mu$ l. q. d. d.

De este teorema se deduce el

Principio de totalidad. — Si $\alpha_1, \ldots \alpha_n, \ldots$ son anágenos (3) tales que $\alpha_1 \subset \ldots \subset \alpha_n \subset$ y μ un anágeno cualquiera, es

$$\alpha_1 \mu + \alpha_2 \mu + \ldots + \alpha_n \mu + \ldots = (\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n + \ldots) \mu$$

es decir que todo anágeno (3) $(\alpha_1 \subset \ldots \subset \alpha_n \subset \ldots)$ de anágenos (3) es igual al anágeno (3) $\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots$

Demostración. — Sean

$$\alpha_n = (a_1^{(u)} \subset a_2^{(n)} \subset \ldots a_n^{(n)} \subset \ldots) \quad \text{y} \quad \mu = (m_1 \subset \ldots \subset m_n \subset \ldots).$$

Por lo visto en el teorema IV es

$$\alpha_1 + \ldots \alpha_n + \ldots = (a_1^{(1)} \subset a_2^{(2)} \subset \ldots \subset a_u^{(n)} \subset \ldots)$$

luego

$$(\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots \alpha_n + \ldots) \mu = (a_1^{(1)} m_1 \subset a_2^{(2)} m_2 \subset \ldots \subset a_n^{(n)} m_n \subset \ldots)$$

y por otra parte

$$\alpha_n = \mu (a_1^{(n)} m_1 \subset a_2^{(n)} m_2 \subset \ldots a_n^{(n)} m_n \subset \ldots)$$

luego

$$\alpha_1 \mu + \ldots + \alpha_n \mu + \ldots = (a_1^{(1)} m_1 \subset a_2^{(2)} m_2 \subset \ldots a_n^{(n)} m_n \subset \ldots)$$

o sea

$$\alpha_1 \mu + \ldots + \alpha_n \mu + \ldots = (\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots \alpha_n + \ldots) \mu.$$

Teorema VII. — La estructura de los anágenos (3) es fuertemente distributiva a la izquierda, es decir para toda sucesión $\alpha_1, \ldots \alpha_n \ldots$ se verifica $(\alpha_1 + \ldots \alpha_n + \ldots) \mu = \alpha_1 \mu + \ldots$

Demostración. — Haciendo

$$\sigma_n = \alpha_1 + \ldots + \alpha_u \quad \text{como} \quad \sigma_1 \subset \sigma_2 \subset \ldots \sigma_n \subset \ldots$$

resulta en virtud del principio de totalidad que

$$(\alpha_1 + \ldots + \alpha_n + \ldots)\,\mu = (\sigma_1 + \ldots \sigma_n + \ldots)\,\mu =$$

$$= \sigma_1\,\mu + \ldots + \sigma_n\,\mu + \ldots = \alpha_1\,\mu + (\alpha_1 + \alpha_2)\,\mu + \ldots +$$

$$+ (\alpha_1 + \ldots + \alpha_n)\,\mu + \ldots = \alpha_1\,\mu + (\alpha_1\,\mu + \alpha_2\,\mu) + \ldots$$

$$\ldots (\alpha_1\,\mu + \alpha_2\,\mu + \ldots \alpha_n\,\mu) + \ldots = \alpha_1\,\mu + \alpha_2\,\mu + \ldots$$

$$\ldots + \alpha\ \mu + \ldots \quad \text{l. q. d. d.}$$

De este teorema resulta fácilmente el

Principio de permanencia. — Toda estructura fuertemente distributiva a la izquierda es isomorfa con la estructura de sus anágenos (3).

Demostración. — Sean $(\alpha_1 \subset \alpha_2 \subset \ldots \subset \alpha_n \subset \ldots)$ un anágeno (3) de esta estructura y μ un elemento cualquiera, como

$$\alpha_1\,\mu + \ldots + \alpha_n\,\mu + \ldots = (\alpha_1 + \ldots + \alpha_n + \ldots)\,\mu$$

resulta que por definidión es

$$(\alpha_1 \subset \ldots \subset \alpha_n \subset \ldots) = (\alpha_1 + \ldots + \alpha_n + \ldots \subset \alpha_1 + \ldots + \alpha_n + \ldots \subset \ldots) =$$

$$= \alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n + \ldots$$

Es decir que todo anágeno (3) es igual a un elemento propio l. q. d. el teorema.

Análogamente podemos definir los anágenos i (3) como sucesiones $(\alpha_1 \supset \alpha_2 \supset \ldots)$ y definir que dos anágenos α, β son iguales para todo k es $(a_1 + k)\ldots(a_n + k)\ldots = (b_1 + k)\ldots(b_n + k)\ldots$ y obtener de esta manera una estructura fuertemente distributiva derecha según los tres principios.

Finalmente se puede en analogía con el método de Weirstrass considerar anágenos de la forma de un par de sucesiones

$$\alpha_1 \subset \ldots \subset \alpha_n \subset \ldots$$

$$\beta_1 \supset \ldots \supset \beta_n \supset \ldots$$

o combinar los métodos de los anágenos i y e o composiciones i y e obteniendo de esta manera estructuras fuertemente distributivas de los dos lados, pero acá nos limitaremos a lo expuesto. Resumiento lo visto en los capítulos I, II y IV resulta que

Todo conjunto ordenado, completándole con los anágenos (1), *después con el método de la composición* e *o* i *y finalmente con la composición fuerte* $\times$ e *o* i *o con anágenos* (3) e *o* i, *puede ser transformado en una estructura fuertemente distributiva a la derecha o izquierda según los* 3 *principios.*

FE DE ERRATAS:

Pg. 338, T. CXXVII, dice PA_1 PA_2

debe decir P no pertenece a A_1
y P no pertenece a A_2

TARIFAS FERROVIARIAS DE UTILIDAD MÁXIMA

POR EL

ING. EMILIO REBUELTO

(Continuación)

VI. — TARIFAS KILOMETRICAS

Después de haber tratado en los capítulos anteriores las tarifas a aplicar al transporte proveniente de un punto aislado; las tarifas de precio *único* en las que no se hace intervenir la influencia de la distancia; y las de clase *única*, trataremos de estudiar los problemas de mayor compliación, originados por los tres sistemas clásicos de tarifas: kilométricas, terminales y parabólicas.

Las llamadas *kilométricas* o también *proporcionales*, fueron las primitivamente aplicadas a los transportes ferroviarios, debido a la sencillez de su formación y al hecho de aparecer como las más lógicas ante el punto de vista del público, incapacitado, como es natural, para intensificar su análisis. En estas dos razones reside la causa del constante favor y preferencia que se les ha concedido, llegando algunas opiniones hasta el extremo de considerarlas como las únicas razonables y justas. A doble distancia, doble tarifa: a triple distancia, triple tarifa, y así sucesivamente.

Esta forma de raciocinio simplista, se juzga inobjetable por la mayoría de las personas, a quienes satisface plenamente, el suponer que siendo la tarifa el precio de un servicio prestado al cargador por la empresa de transportes, no debe pagarse más que una cantidad de dinero, exacta y rigurosamente proporcional al trabajo efectivo hecho por la empresa, o sea, tal como sucede con las tarifas kilométricas, una cantidad fija por cada tn.-Km.

Se olvida, al raciocinar así, la universal costumbre de tarificar los objetos habituales de comercio, con un distinto precio por unidad, según el número total de unidades objeto de la transacción comercial. Los precios al « por mayor y al por menor », son bien conocidos.

Nadie se conforma en pagar el mismo precio por un objeto cuando compra diez o cuando se adquieren cien o más. De idéntica manera, el costo de una ton.-Km. no debería ser el mismo, si se trata de un transporte a diez o a cinco o más kilómetros. Pero con las tarifas kilométricas lo es, y por eso se llega pronto a un costo tan elevado para el transporte, que resulta prohibitivo apenas aumenta la distancia más allá de cierto límite, muy reducido, por otra parte, para las mercaderías de bajo precio. La práctica ha impuesto, pues, otros tipos de tarifas, y las kilométricas fueron paulatinamente abandonadas en el tráfico de cargas, reduciéndose su aplicación al transporte de pasajeros, a pesar de las protestas de quienes usan del ferrocarril para transportes cortos, que, en efecto, resultan encarecidos cuando se aplican otros sistemas distintos de tarifas. Se puede demostrar que las *diferenciales*, o sea las *no proporcionales* a la distancia, son más convenientes para las empresas y los intereses generales de un país, representados por el conjunto de todos los productores de la zona atravesada por el ferrocarril, y no por los ubicados solamente en los primeros kilómetros.

Sin embargo, en la época presente se asiste a un profundo cambio de opiniones, volviéndose a las kilométricas, con abandono cada vez mayor de las tarifas terminales y parabólicas. El motivo de tan fundamental modificación, hay que buscarlo en el transporte automotor por camiones, extraordinariamente desarrollado en nuestros días, con efectos competitivos sobre el ferrocarril cuya importancia crece de continuo, obligando cada vez más a tenerlos en cuenta. Y el transporte automotor emplea, de preferencia, tarifas kilométricas.

Es sabido que la lucha entre una kilométrica o proporcional y otra diferencial, cualquiera que ésta sea, se decide siempre a favor de la kilométrica, para las cortas distancias, que es precisamente la zona dentro de la cual actúan con más eficacia los autos, ómnibus y camiones empleados en el transporte caminero. La consecuencia forzosa para los ferrocarriles es la pérdida absoluta de todo tráfico que a las distancias cortas no se encuentra sujeto a tarifas kilométricas. Y aún más: como el ferrocarril debe efectuar transportes a todas las distancias, se impone que todas sus tarifas tengan iniciación kilométrica, si es que se quiere evitar la competencia de los automotores. Ya se ha dicho en varias oportunidades que las tarifas terminales y parabólicas, extendidas a todas las distancias, no son aplicables en la actualidad y debe buscarse el sustituirlas por otras de iniciación kilométrica.

Estas observaciones y algunos comentarios más que podrían agregarse sobre ellas, justifican la creciente atención dedicada ahora a las tarifas kilométricas, con las cuales esperan las empresas ferroviarias solucionar algunos de sus graves problemas de disminución de tráfico. En una palabra, son un tema de actualidad; y esta circunstancia, más que el valor real de las páginas siguientes, espero que atraiga un poco el interés de los lectores hacia las consideraciones expuestas a continuación.

Sea $y = mx$, una tarifa de tipo kilométrico: se trata de determinar el valor de m, de modo que la utilidad dejada por la tarifa sea máxima.

El ancho de la zona, a cada lado de la vía, será, de acuerdo a las notaciones ya usadas

$$y_z = \frac{v - mx}{f}$$

Para $x = \frac{v}{m}$, $y_z = 0$ y la zona terminará. Su forma resulta, pues, la de un triángulo isósceles, de base igual a $\frac{2v}{f}$, (valor de $2y_z$ para $x = 0$) y de altura $\frac{v}{m}$, (valor de x para $y_z = 0$). El área de esta zona será $\frac{v^2}{fm}$, y la producción $\frac{\gamma v^2}{fm}$. Considerándola concentrada en el centro de gravedad del triángulo, su transporte implicará un trabajo igual a

$$\frac{1}{3} \frac{v}{m} \cdot \frac{\gamma v^2}{fm} = \frac{\gamma v^3}{3 fm^2}$$

Como se cobra m por cada ton. Km. y la empresa suponemos que gasta g, la utilidad total será

$$U = \frac{\gamma v^3}{3 fm^2} (m - g) = \frac{\gamma v^3}{3 f} \frac{m - g}{m^2}$$

Hallando la derivada de U respecto a m e igualando a cero, se encuentra

$$\frac{m^2 - 2 m (m - g)}{m^4} = 0 \quad \therefore \quad m = 2 g$$

valor que sustituído en la derivada segunda la hace tomar un signo negativo: luego corresponde a la tarifa que procurará el máximo de utilidad: aquélla y éste serán, respectivamente

$$y = 2\,gx \quad ; \quad U_{max} = \frac{\gamma\, v^3}{3\,f}\,\frac{m - g}{m^2} = \frac{\gamma\, v^3}{12\,fg}$$

A este mismo resultado habíamos llegado ya en el Cap. II, *Fórmulas fundamentales,* haciendo uso de un cálculo basado en el empleo de una integral. El procedimiento ahora expuesto, mucho más sencillo y elemental, se presta para ser usado cuando deban discutirse estos problemas con personas que no posean suficientes conocimientos matemáticos para seguir aquel raciocinio.

Antes de seguir adelante, anotemos como propiedad curiosa y característica de las tarifas kilométricas, la no intervención del valor v en el importe de la tarifa a cobrar (pues ésta resultó ser $y = 2\,gx$); en consecuencia, a todas las diferentes clases de cargas, cualesquiera que sea su coeficiente de transporte, les va a corresponder igual tarifa, detalle interesante para el estudio de la competencia con el transporte automotor que tiende a emplear una o un número muy reducido de clases. Como interviene solo el valor de g, o gasto directo por ton.-Km. de peso útil, una vez determinado un *valor medio* conveniente para las diferentes cargas (aunque demanden para su transporte diverso peso bruto), se podría llegar a la fijación de una *tarifa única* para todas las cargas de un ferrocarril, y determinarla de modo que produjera la utilidad máxima.

Mejor dicho, no sería una tarifa única sino una *iniciación única* para todas las tarifas, pues más allá de cierta distancia, la tarifa se convierte en prohibitiva, limitándose su radio de acción. Aquí sí interviene el valor de v en forma tal, que se originan nuevos problemas dignos de cuidadoso estudio.

En efecto: la distancia máxima de transporte resultaría de:

$$y = mx = 2\,gx = v \quad \therefore \quad x = \frac{v}{2\,g}$$

o sea, la mitad de la distancia hasta la cual puede transportar sin pérdida la empresa. Esta conclusión es la que evidencia precisamente, la imposibilidad de atender en buenas condiciones los tráficos de largas distancias con tarifas kilométricas.

Se plantea entonces la cuestión siguiente: cuando la zona que se desea servir se extiende hasta una distancia x_0, o si la carga a la cual se va a aplicar la tarifa está a dicha distancia x_0, la tarifa deberá ser tal que $m_0 x < v$, pues v es lo más que, por hipótesis, puede pagar dicha mercadería para su transporte. De aquí sacamos $m < \frac{v}{x_0}$; pero *si este valor* $\frac{v}{x_0}$, *es menor que* $2g$, *la empresa obtiene con estos transportes menos utilidad que con los efectuados hasta distancias menores de* x_0. En otras palabras, no le conviene prolongar sus vías o sus servicios para satisfacer estos transportes.

Existe, pues, para cada carga (y por lo tanto, también para el conjunto de varias clases de cargas), una cierta distancia límite más allá de la cual no debe extender sus servicios ninguna empresa de transporte que tenga en vigencia tarifas kilométricas. Le es forzoso, antes, proceder a un cambio en su sistema tarifario, pues, de no hacerlo, verá disminuir, no sólo sus utilidades, sino también el interés del capital invertido, a la vez que aumentará el coeficiente de explotación, tendiendo hacia la unidad, y por lo tanto aproximándose la empresa hacia la situación de pérdida.

Pueden avaluarse estos sucesivos estados del negocio, escribiendo los valores de las utilidades, U, del interés, i y del coeficiente E en función de la distancia x hasta la cual se puede transportar con semejantes tarifas, o sea hasta que

$$y = mx = v \quad \therefore \quad m = \frac{v}{x}$$

Para este valor de m se tiene

$$U = \frac{\gamma v^3}{3f} \frac{m - g}{m^2} = \frac{\gamma v x (v - gx)}{3f}$$

Supongamos que ésta fuera la utilidad total del ferrocarril, o sea que no se transportase más que una sola clase de carga, aquella a la cual se refieren los valores de γ, v y g; o que esta clase de carga fuera a tal punto predominante sobre el total, que las utilidades dejadas por las otras resultasen despreciables. Si llamamos C al

costo de un Km. de ferrocarril, los x kilómetros costarán Cx y el interés producido por las utilidades será

$$i = \frac{U}{Cx} = \frac{\gamma\, v\, (v - gx)}{3\, fC}$$

expresión *decreciente con* x, o sea que cuanto más se prolonga la vía, más disminuye el interés del capital invertido en ella. Las utilidades alcanzan un máximo cuando

$$x = \frac{v}{2\,g}, \qquad \text{para el cual} \qquad U_{max} = \frac{\gamma\, v^3}{12\, fg}$$

y el interés correspondiente es

$$i = \frac{U}{Cx} = \frac{\gamma\, v^2}{6\, fC}$$

que vendría a ser el interés que produce la empresa cuando la longitud en explotación es la que produce el máximo de utilidad. Para longitudes menores, la utilidad es *menor* pero el interés es *mayor*. Para longitudes mayores, *la utilidad y el interés disminuyen*.

De la última expresión escrita para i, parece deducirse una conclusión absurda, pues para $x = 0$, resulta un cierto valor de i, que es el mayor de todos. Pero no habiendo ninguna longitud de línea en explotación, desde el momento que x es igual a cero, no es posible que exista ningún valor de i.

Este resultado no implica un defecto de las fórmulas ni de la teoría que conduce a ellas: para $x = o$, es $U = 0$, como es fácil verificarlo con la fórmula respectiva; y siendo nulas las utilidades, no hay caso de calcular ningún interés, pues éste es cero, por definición. El otro valor de x que anula las utilidades, es $\frac{v}{g}$, el que anula también el interés, de acuerdo a la fórmula para éste, la cual no debe pues, ser empleada más que para valores de x mayores de cero.

En cuanto al coeficiente de explotación, E, o relación de gastos a productos, lo calcularemos inmediatamente, dividiendo los gastos totales (que son iguales a la producción Q, por g y por la distancia del centro de gravedad, que es $\frac{1}{3}x$, por los productos; éstos se

forman con la producción Q, por la tarifa, que es igual a m por kilómetro, o sea $\frac{mx}{3}$ en total; y como $m = \frac{v}{x}$, los productos resultan $\frac{Qv}{3}$ y el cociente

$$E = \frac{G}{P} = \frac{Qg\frac{x}{3}}{Q\frac{v}{3}} = \frac{gx}{v}$$

valor que aumenta, evidentemente, al crecer x. Para la distancia que procura las utilidades máximas, se tiene

$$E = \frac{gx}{v} = \frac{g}{v}\frac{v}{2g} = 0{,}50$$

En estos cálculos se han tomado en cuenta solamente los gastos *directos* (que son los de Tracción y Movimiento), tal como es costumbre hacerlo cuando se estudia una tarifa aislada. Pero cuando se trata de todo el tráfico de un ferrocarril, es forzoso considerar también los gastos indirectos para deducir las utilidades, el interés y el coeficiente de explotación. Esto puede ser hecho de varias maneras.

La más sencilla consiste en utilizar, en vez del valor g, gasto *directo* por ton.-Km. útil, el valor g_1, del gasto *total* por igual unidad. En la práctica puede suponerse aproximadamente que los gastos indirectos son un 54 % de los totales, luego éstos serán el 1,85 % de los directos, porque

$$\frac{1}{54} = 0{,}0185$$

Bastará, pues, tomar 1,85 g en vez de g en todas las fórmulas anteriores y tener en cuenta las consecuencias.

Estos valores de las relaciones entre directos, indirectos y totales, varían poco en los últimos años. Según los datos de la Estadística oficial, se tiene:

FERROCARRILES ARGENTINOS

AÑO	GASTOS Directos $ oro	GASTOS Totales $ oro	Relación de totales a directos
1926	96.918.085	180.837.973	1,86
1927	104.668.897	197.006.146	1,88
1928	105.754.501	202.309.586	1,91
1929	109.501.394	206.470.155	1,88
1930	100.049.349	184.542.671	1,84
1931	95.972.109	180.641.568	1,88
1932	87.972.369	165.052.457	1,87
1933	85.153.909	159.356.685	1,87
1934	85.889.632	156.267.047	1,81
1935	87.102.360	160.649.872	1,84
Término medio	—	—	1,85

Semejante manera de incorporrar a los cálculos los gastos indirectos, no es del todo lógica, pues su monto resulta así computado proporcionalmente a los directos, o sea, proporcionalmente a la distancia recorrida por la carga, cuando se sabe que, por su naturaleza, son más bien proporcionales a la longitud de vías en servicio (gastos de vía y obras) y a las toneladas de carga recibidas y despachadas en estaciones (gastos de tráfico, personal de estaciones, administración, etc.), además de los de Dirección y Superintendencias, en ninguno de los cuales influye el recorrido. Más razonable parece, pues, hacerlos intervenir como proporcionales a las toneladas de carga, pero con un coeficiente de proporcionalidad variable según la longitud de las líneas, para tener así en cuenta los dos factores de que dependen en primer lugar. Empezaremos, pues, por dividir los gastos indirectos, G_i, por el total de toneladas útiles movidas, lo que daría un valor g_i:

$$g_i = \frac{G_i}{Q} = \frac{G_i}{\frac{\gamma v^2}{fm}} = \frac{G_i fm}{\gamma v^2}$$

$$\therefore \quad G_i = \frac{\gamma v^2}{fm} g_i$$

Este monto de gastos, G_i, es lo que debemos restar de la utilidad calculada antes, teniendo en cuenta solamente los gastos directos:

$$U = \frac{\gamma v^3}{3f} \cdot \frac{m-g}{m^2} - G_i$$

$$= \frac{\gamma v^3}{3f} \cdot \frac{m-g}{m^2} - \frac{\gamma v^2}{fm} g_i$$

$$= \frac{\gamma v^2}{3f} \cdot \frac{(m-g)v - 3mg_i}{m^2}$$

sustituyendo a m por su valor $\frac{v}{x}$, queda una expresión más sencilla:

$$U = \frac{\gamma vx}{3f}(v - gx - 3g_i)$$

Derivando a U respecto a x, se podrá determinar el valor de x que conduce a un máximo de U: pero al hacerlo no debe olvidarse que g_i depende también de x, según una relación fácil de establecer: basta escribir que las utilidades son evidentemente las mismas, cualquiera que sea la hipótesis hecha para hacer intervenir los gastos indirectos; luego

$$\frac{\gamma vx(v - 1{,}85gx)}{3f} = \frac{\gamma vx(v - gx - 3g_i)}{3f}$$

$$1{,}85gx = gx + 3g_i$$

$$g_i = 0{,}28gx$$

y entonces

$$\frac{dg_i}{dx} = 0{,}28g$$

$$\frac{dU}{dx} = \frac{\gamma v}{3f}\left[v - 2gx - 3g_i - 3x\frac{dg_i}{dx}\right] = 0$$

$$v - 3g_i - 2gx - 0{,}85gx = 0$$

$$x = \frac{v - 3g_i}{2{,}85g}$$

Este valor coincide con el encontrado antes: basta sustituir a g_i por $0{,}28\, g\, x$ para encontrar

$$x = \frac{r}{2\,(1{,}85)\,.\,g}$$

Con él se pueden obtener expresiones de m y de U_{max} en las que aparezca g_i, y por lo tanto de apariencia distinta de las ya encontradas, pero idénticas, en cuanto se sustituye a g_i por su valor.

El valor de g_i en los ferrocarriles argentinos oscila alrededor de 1,35 $ m/n por tm. útil, como término medio, teniendo en cuenta para deducirlo las toneladas útiles que resultan de sumar a las cargas, equipajes y encomiendas, el peso de los pasajeros, computado cada uno como 100 Kg. para incluir el peso del equipaje libre de flete que la ley argentina permite transportar. Claro es que un análisis detallado proporcionaría la separación de los gastos indirectos relativos a cargas de los correspondientes a los pasajeros (en forma aproximada, pues lo complejo del problema no permite esperar una solución completa), obteniéndose así un valor de g_i más cercano a la realidad. A falta de este análisis, que no es del caso intentar aquí, recordamos algunas cifras estadísticas de interés sobre este punto.

FERROCARRILES ARGENTINOS

Gastos indirectos por ton. útil en $ oro

1926	1,35	1931	1,36
1927	1,32	1932	1,38
1928	1,39	1933	1,38
1929	1,40	1934	1,25
1930	1,40	1935	1,25

Término medio: 1,35

Con las fórmulas que dejamos expuestas se puede resolver el problema de averiguar hasta qué distancia conviene hacer transportes de una carga determinada: o hasta donde es aconsejable prolongar un ferrocarril en el que predomina cierta clase de carga; el ejemplo siguiente aclara la aplicación del método.

Ejemplo: Se está construyendo un ferrocarril, librando al público tramos sucesivos de 50 Km. En la zona se produce principalmente una mercadería con un coeficiente de transporte, $r = 10$ $ m/n y en una cantidad de 40 ton. por Km. cuadrado. El gasto directo de transporte por esta vía de comunicación es de 0,0107 $ m/n por ton. Km. útil, y el de los transportes transversales o radiales por caminos, de 0,35 $ m/n por igual unidad.

Se desea adoptar un sistema de tarifas kilométricas, estableciendo para las distintas longitudes que va adquiriendo la vía en servicio público, la más alta tarifa que pueda soportar el tráfico en cada caso.

Calcular los resultados de la explotación, de acuerdo a estas condiciones y tarifas, suponiendo que el costo de la vía es de 50.000 $ m/n por Km. y que se cultiva sólo el 80 % de la zona de influencia permitida por las tarifas que se van adoptando.

Cuando se libre al servicio el primer tramo de 50 Km., a esa distancia la mercadería producida en la misma punta de rieles podrá pagar 10 $ m/n, luego la tarifa será

$$y = \frac{10}{50} x = 0,2\, x$$

y mientras la línea no se prolongue, no habrá interés en rebajarla, pues a mayor distancia no hay todavía tráfico posible. Al incorporarse el segundo tramo de 50 Km., para traer la mercadería producida a los 100 Km., y que no puede pagar más de 10 $ m/n, se adoptará la tarifa

$$y = \frac{10}{100} x = 0,1\, x,$$

y así sucesivamente. En general, siendo x_0 la longitud de línea en servicio, se tendrá

$$y = \frac{10}{x_0} x$$

Las utilidades obtenidas eran

$$U = \frac{\gamma\, v\, x\, (v - gx)}{3 f}$$

pero como se supone cultivada sólo el 80 % de la zona, en vez de γ tomaremos $0,8\, \gamma$; y como debemos considerar también los gastos indirectos, en vez de g adoptaremos $1,85\, g$, resultando entonces

$$U = \frac{0,8\,(40)\,(10)\, x\,[10 - 1,85\,(0,0107)\, x]}{3\,(0,35)} = 304\, x\,(10 - 0,02\, x)$$

Cuando $x = 50$, se tiene

$$U = 304\,(50)\,(10 - 1) = 136.800 \text{ \$ m/n.}$$

Para $x = 100$ resultará

$$U = 304\,(100)\,(10 - 2) = 243.200 \text{ \$ m/n}$$

etc.

Como el costo de la vía por Km. es de 50.000 $ m/n el interés producido por el negocio en los primeros 50 kilómetros será

$$i = \frac{136.800}{50.000\ (50)} = 0,0547$$

o sea un 5,47 %. En general

$$i = \frac{0,8\,\gamma\, v\,(v - 1,85\, gx)}{3\, fC} = \frac{0,8\ (40)\ (10)\ (10 - 0,02\, x)}{3\ (0,35)\ 50.000} =$$

$$= 0,0608\ (10 - 0,02\, x)$$

y en cuanto al coeficiente de explotación

$$E = \frac{1,85\, gx}{v} = \frac{0,02\, x}{10} = 0,002\, x$$

Con estas fórmulas se calcula fácilmente el cuadro que sigue:

RESULTADOS DE UNA EXPLOTACIÓN CON TARIFAS KILOMÉTRICAS

Longitud de la línea km.	Tarifa aplicada	Utilidades totales $ m/n	Interes obtenido %	Coeficiente de Explotación
50	0,20 x	136.800	5,47	0,10
100	0,10 x	243.200	4,86	0,20
150	0,06 x	319.200	4,25	0,30
200	0,05 x	364.800	3,64	0,40
250	0,04 x	380.000 (Máx.)	3,04	0,50
300	0,03 x	364.800	2,43	0,60
350	0,028 x	319,200	1,82	0,70
400	0,025 x	243.200	1,21	0,80
450	0,022 x	136.800	0,60	0,90
500	0,020 x	0	0,00	1,00

El interés más elevado, es el que se obtiene con la explotación de los 50 primeros kilómetros. Al prolongar la línea, los nuevos capitales ganan cada vez un interés menor, pero como las utilidades totales aumentan, sería aconsejable continuar la construcción hasta los 250 Km. por lo menos, distancia a la cual se obtiene una ganancia máxima de 380.000 $ m/n, que para un capital invertido de 12.500.000 pesos moneda nacional representa un interés de 3,04 %. Si se continúa construyendo la línea más allá de este punto, las ganancias disminuyen, y como el capital aumenta, el interés obtenido decrece rápidamente.

En la práctica puede presentarse el caso de que existan dos o más clases de cargas con igual importancia relativa. Cada una de ellas obligaría a detener el transporte a distancia distinta para obtener la respectiva utilidad máxima.

Pero si se quiere hacer posibles los transportes de todas las cargas hasta punta de rieles, habrá que buscar si no existe una distancia intermedia susceptible de proporcionar mayores utilidades.

Este problema, de gran interés práctico, se plantea y resuelve fácilmente en teoría, pero en la realidad obliga a un análisis muy cuidadoso y a una discusión de las diferentes soluciones posibles, que no son siempre las que a priori se espera encontrar.

Sean v_1, v_2.. y en general v_n los coeficientes de transporte de las varias cargas: sean igualmente γ_n y g_n la producción por Km. cuadrado y el costo directo del transporte ferroviario por ton.-Km. de peso útil: 1,85 g_n será el gasto total. La suma de las diferentes utilidades será

$$U = \frac{\gamma_1 v_1 x (v_1 - 1{,}85\, g_1 x)}{3f} + \frac{\gamma_2 v_2 x (v_2 - 1{,}85\, g_2 x)}{3f} + \ldots$$

$$= \frac{1}{3f} \Sigma\, \gamma_n v_n x (v_n - 1{,}85\, g_n x)$$

Derivando con respecto a x,

$$\frac{dU}{dx} = \frac{1}{3f} \Sigma\, \gamma_n v_n (v_n - 3{,}70\, g_n x)$$

$$\frac{d^2U}{dx^2} = -\frac{1{,}23}{f} \Sigma\, \gamma_n v_n g_n$$

La segunda derivada es evidentemente negativa, luego existe un máximo de la utilidad que se producirá para la distancia deducida de

$$\Sigma\, \gamma_n v_n (v_n - 3{,}70\, g_n x) = 0$$

$$x = \frac{\Sigma\, \gamma_n v_n^2}{3{,}70\, \Sigma\, \gamma_n v_n g_n}$$

Encontrada así la distancia, determinaremos las tarifas respectivas, que serán:

$$y_1 = \frac{3{,}70\, v_1 \Sigma\, \gamma_n v_n g_n}{\Sigma\, \gamma_n v^2} x$$

$$y_2 = \frac{3{,}70\, v_2 \Sigma\, \gamma_n v_n g_n}{\Sigma\, \gamma_n v_n^2} x$$

. . . .

Todas ellas serán distintas, pero todas serán aplicables hasta la misma distancia, y en su conjunto producirán la utilidad máxima, cuyo monto será calculado de inmediato, sustituyendo el valor de x en la fórmula respectiva.

En esta forma se puede establecer el *sistema de tarifas kilométricas* más convenientes para un ferrocarril, de acuerdo a las clases de cargas que transporta, a la cantidad de toneladas de cada clase y a los diversos gastos que cada una origina, o sea, haciendo intervenir todos los elementos característicos del tráfico, por más heterogéneos, complejos y numerosos que sean. A continuación se detalla la solución de un caso en el que intervienen dos clases de cargas.

Ejemplo: Los mismos datos del ejemplo anterior, pero considerando que además de la carga allí supuesta, que llamaremos « carga A », se transporta otra, « carga B », para la cual

$$v = 15 \text{ \$ m/n}; \quad \gamma = 30 \text{ ton}; \quad g = 0{,}01 \text{ \$ m/n}.$$

La diferencia en el valor de g se explica por requerirse menor peso muerto para el transporte del mismo peso útil.

Se pide calcular la longitud de vía a construir, a fin de obtener utilidad máxima, llevando (o trayendo) a las dos cargas hasta (o desde) punta de rieles.

Aquí cabe estudiar tres situaciones distintas.

1° Adoptar la distancia para la cual se consigue el máximo de utilidad con la carga A y sumarle la utilidad que para esa distancia proporciona la otra.

2° Adoptar la distancia para la cual se consigue el máximo de utilidad con la carga B, y sumarle la utilidad que para esa distancia produce la carga A.

3° Considerar el conjunto de las dos cargas y determinar una distancia intermedia, la misma para las dos clases de cargas, y que aun sin ser la correspondiente al máximo de ninguna de ellas, produzca dos utilidades que, sumadas, den un total superior al de cualquiera de los otros dos casos.

Con la primera hipótesis, ya vimos en el ejemplo anterior que la distancia era de 250 Km., y la utilidad dejada por la carga A, de 380.000 \$ m/n. Para esa distancia, la tarifa aplicable a la carga B es

$$y = \frac{v}{x^0}\, x = \frac{15}{250}\, x = 0{,}06\, x$$

La fórmula de la utilidad será

$$U_B = \frac{1}{3f}\, \gamma\, vx\, (v - 1{,}85\, gx) = \frac{1}{3\,(0{,}35)}\, 30\,(15)\, x\, [15 - 1{,}85\,(0{,}01)\, x] =$$

$$= 428\, x\, (15 - 0{,}0185\, x)$$

que para $x = 250$ Km. resulta:

$$U_B = 428\ (250)\ [15 - 0{,}0185\ (250)] = 1.110.125\ \$\ \text{m/n}$$

$\therefore$

$$U_A + U_B = 380.000 + 1.110.125 = 1.490.125\ \$\ \text{m/n}.$$

Con la segunda hipótesis, la distancia para la cual se produce el máximo de utilidad con la carga B es

$$x = \frac{v}{3{,}7\ g} = \frac{15}{3{,}7\ (0{,}01)} = 405\ \text{Km}.$$

Adoptada esta longitud para la construcción del ferrocarril, las tarifas respectivas serían:

$$y'_A = \frac{10}{405}\ x = 0{,}0246\ x \quad ; \quad y'_B = \frac{15}{405}\ x = 0{,}037\ x$$

y las utilidades

$$U_A = 304\ (405)\ [10 - 0{,}02\ (405)] = 233.928$$

$$U_B = 428\ (405)\ [15 - 0{,}0185\ (405)] = 1.301.783.$$

$$U_A + U_B = 1.535.711\ \$\ \text{m/n}.$$

suma algo superior a la que nos proporciona la primera hipótesis; pero han sido necesarios 155 Km. más de ferrocarril, lo que presupone una inversión de 7.750.000 pesos moneda nacional. para obtener apenas 45.000 $ m/n más de utilidades.

Con la tercera hipótesis, determinaríamos una distancia intermedia,

$$x = \frac{32\ (10)^2 + 30\ (15)^2}{3{,}7\ [32\ (10)\ (0{,}0107) + 30\ (15)\ (0{,}01)]} = \frac{9950}{29{,}32} = 339\ \text{Km}.$$

Adoptaremos 340; las tarifas respectivas serían

$$y_A = \frac{10}{340}\ x = 0{,}0294\ x \quad ; \quad y_B = \frac{15}{340} = 0{,}0441\ x$$

y las utilidades

$$U_A = 304\ (340)\ [10 - 0{,}02\ (340)] = 330.752\ \$\ \text{m/n}.$$

$$U_B = 428\ (340)\ [15 - 0{,}0185\ (340)] = 1{,}267.479\ \$\ \text{m/n}$$

$$U_A + U_B = 1.589.231\ \$\ \text{m/n},$$

que, como se ve, son mayores que con cualquiera de las dos hipótesis precedentes. En particular, es interesante el hecho de que se consigan casi 63.000 $ m/n más de utilidades que con el cálculo inmediato anterior, a pesar de suponerse en explo ta, ción 65 Km. menos de línea férrea.

Sin embargo, no es ésta la solución más favorable: porque se puede construir el ferrocarril hasta los 405 Km., pero no hacer los transportes de la mercadería A más que hasta los 250 Km.; entonces las tarifas son:

$$y_A = \frac{10}{250} x = 0{,}04\,x \quad ; \quad y_B = \frac{15}{405} x = 0{,}037\,x$$

y la suma de las respectivas utilidades ya calculadas

$$U_A + U_B = 380.000 + 1.301.783 = 1.681.783 \ \$ \ \text{m/n}$$

que superan las previstas en los otros tres casos.

El máximo del interés se obtendrá, sin embargo, construyéndose sólo 250 Km.; cuando rigen tarifas kilométricas, no interesa a las empresas la prolongación de sus líneas más allá de ciertos límites, que como se, ve, son muy reducidos.

Mediante pequeñas modificaciones, se puede igualmente aplicar estas teorías a casos prácticos distintos de los considerados más arriba. Por ejemplo, supongamos que entre las cargas exista una (o varias), que *no* sean proporcionales a la *superficie* de la zona, como los cereales, sino aproximados a la *longitud* de la vía, lo que equivale a un consumo o producción constante por Km. tal como sucede con las mercaderías generales de almacén, tienda, ferretería, etc., dentro de ciertos límites.

Sean entonces c_1, c_2 estos valores; $c_1\,x$; $c_2\,x$; $c_r\,x$, sean las toneladas a transportar, que supondremos concentradas a la mitad de la distancia x; las toneladas-Km. útiles serán

$$c_1 \frac{x^2}{2} \quad ; \quad c_2 \frac{x^2}{2} \quad \ldots \quad c_r \frac{x^2}{2},$$

a las cuales aplicaremos la tarifa $\frac{v_r}{x}$, gastanto 1,85 g_i para el transporte; en conclusión, la utilidad total será

$$U = \Sigma\, c_r \frac{x^2}{2} \left(\frac{v_r}{x} - 1{,}85\, g_r \right) = \frac{1}{2} \Sigma\, c_r\, x\, (v_r - 1{,}85\, g_r\, x)$$

expresión que sumaremos a la anteriormente encontrada, teniendo entonces

$$U = \frac{1}{3f} \Sigma\, \gamma_n\, v_n\, x\, (v_n - g_n\, x) + \frac{1}{2} \Sigma\, c_r\, x\, (v_r - 1{,}85\, g_r\, x)$$

de la cual obtendremos por derivación e igualación a cero, el valor de x que produce la utilidad máxima

$$x = \frac{2 \Sigma \gamma_n v_n^2 + 3 f \Sigma c_r v_r}{4 \Sigma \gamma_n v_n g_n + 11{,}1 f \Sigma c_r g_r}$$

y con ella fijaremos las tarifas de cada una de las clases de carga. El problema queda así completamente resuelto en teoría, si todos los transportes deben ser hechos hasta punta de rieles pero la solución práctica puede consistir en limitar los tráficos de cada clase de carga hasta la distancia de los máximos respectivos, tal como se ha visto en el último ejemplo.

Estos resultados son aplicables lo mismo a un ferrocarril que a cualquier otra empresa de transportes que tenga tarifas kilométricas — por ejemplo, las de ómnibus o camiones que efectúan servicios por carretera, — y siempre que se cumplan las otras hipótesis hechas al principio, entre las cuales es fundamental la constancia del gasto g de transporte por ton.-Km para todo valor de x, lo que, si bien se verifica para el ferrocarril, no parece serlo igualmente en el caso de los automotores por caminos.

Estudiaremos ahora el caso de un ferrocarril ya construído, y con una longitud *menor* de la que corresponde a la distancia que produce el máximo de utilidad de una carga.

(Continuará)

ERRATA

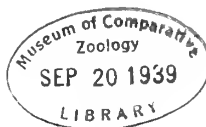
En la « *Nota sobre la formación del salitre chileno* » publicada en los « ANALES » de Mayo, página 375, al final del renglón número 15 en lugar de NO_3H_2, debe ser NO_3H. La última fórmula debe escribirse en la siguiente forma:



$$NO_3H + NaCl \longrightarrow NO_3Na + HCl$$

ADDENDA

Al final de la nota « *Sobre los puntos singulares de las funciones analíticas* » del Dr. CARLOS BIGGERI, páginas 430 y 431 de estos « ANALES » léase: **Fué entregada para su publicación a la *Sociedad Científica Argentina* el 5 de mayo de 1939.**



ÍNDICE GENERAL

DE LAS MATERIAS CONTENIDAS EN EL TOMO CENTÉSIMO VIGÉSIMO SÉPTIMO

SOCIOS ACTIVOS

Abrines, Héctor Aníbal
Aguilar, Félix
Aiblzzati, Carlos M.
Alessi, Juan M.
Alvarez, Raúl J.
Alvarez de Toledo, Belisario
Allende Lezama, Luciano P.
Anastasi, Camilo
Anchorena, Juan E.
André, Enrique de
Andrioletti, Juan Luis
Añón Suárez, Vicente
Aparicio, Francisco de
Aráoz Alfaro, Gregorio
Arce, Manuel J.
Armani, Aquiles
Arnaudo, Silvio J.
Avila Méndez, Delfín
Bado, Atilio A.
Bachmann, Ernesto
Baglietto, Eduardo E.
Balbiani, Atilio
Baliani, Luis M.
Bancalari, Agustín
Bandoni, Alfredo J.
Barabino Amadeo, S.
Bargna, Juan L.
Barilari, Mariano J.
Barral Souto, José
Barrancos, Leónidas A.
Becke, Alejandro von der
Berrino, Juan B.
Bertino, José Carlos
Besio Moreno, Nicolás
Bianchi Lischetti, A.
Biggeri, Carlos
Blaquier, Juan
Boaglio, Santiago
Bolognini, Héctor
Bonanni, Cayetano A.
Bontempi, Luis
Bordas, Alejandro F.
Bordenave, Pablo E.
Borzacov, Vladimir
Borzi, Ana María
Bosch, Gonzalo
Bosisio, Anecto J.
Bottaro, Juan C.
Bozzini, Luis (h.)
Briano, Juan A.
Buich, Raúl
Bula, Clotilde A.
Bunge, Juan C.
Buontempo, Guillermo
Burkart, Arturo
Busso, Eduardo B.
Butty, Enrique
Buzzo, Alfredo
Cailliet Bois, Teodoro
Calandra, Raúl E.
Canale, Humberto
Canal Feijoo, Bernardo
Capelli, Pedro F.
Carabelli, Juan José
Carbia, Rómulo D.
Carbone, Esteban
Carbonell, José J.
Cárcova, Enrique de la
Carelli, Antonio
Carelli, Humberto H.
Caride Massini, Pedro
Carli, Félix D.
Carman, Ernesto
Carrea, Juan Ubaldo
Casacuberta, Antonio
Castellanos, Alberto
Castello, Manuel F.
Castiñeiras, Julio R.
Ceppi, Héctor
Cernuschi, Félix
Clos, Enrique C.
Cock, Guillermo E.
Coni Bazán, F. A.
Curti, Orlando P.
Curutchet, Luis
Chanourdie, Enrique
Chizzini Melo, Aníbal F.
D'Ascoli, Lucio
Dassen, Claro C.
Dasso, Héctor
Dasso, Ricardo L.
De Cesare, Elías A.
De Fina, Armando L.
De la Iní, Juan E.
Dellepiane, Luis J.
Dennler, Jorge
Deulofeu, Venancio
Díaz, Emilio C.
Dieulefait, Carlos E.
Doello-Jurado, Martín
Dobranich, Jorge W.
Domínguez, Juan A.
Dubecq, Raúl E.
Dueñas, José
Duhau, Luis
Dupont, Enrique
Durañona y Vedia, A.
Durrieu, Mauricio
Escudero, Antonio
Escudero, Pedro
Faré, Santo S.
Fernández, Alberto J.
Fernández Díaz, A.
Fernández Long, S.
Figini, Angel
Figuerero, Hernando W.
Fischer, Gustavo Juan
Flores, Emilio M.
Floriani, Luis
Florit Carlos J.
Fossa Mancini, E.
Franceschi, Alfredo
Fürnkorn, Divico A.
Gadda, Carlos Manuel
Galmarini, Alfredo G.
Gando, Alfredo R.
Gandolfi Herrero, Augusto
Gandolfo, José S.
Gascón, Alberto
Gaspar, Fernando L.
Géneau, Carlos E.
Gerardi, Donato
Ghigliazza, Sebastián
Giagnoni, Bartolomé E.
Giannone, José
Gradín, Carlos
Grieben, Arturo
Gutiérrez, Ricardo J.
Haussier, Emilio
Herbin, Luis A.
Hermitte, Enrique
Herrera Vegas, M.
Herzer, Bernardo
Hickethier, Carlos F.
Hofmann, Herbert
Houssay, Bernardo A.
Hoyo, Arturo
Igartúa, Luis María
Irigoyen, Luis H.
Isetta, José
Ivanissevich, Ludovico
Jorge, José M.
Jakob, Cristofredo
Kervor, Juan B.
King, Diarmid O.
Kinkelin Pelletán, J. C. de
Knoche, Walter
Kraglievich, Nicolás T.
Krapf, Eduardo
Labarthe, Julio
Lagunas, Simón
La Menza, Francisco
Laporte, Luis B.
Larco, Esteban
Lasso, Alfredo L.
Latzina, Eduardo
Ligniéres, Roberto
Lizer y Trelles, C. A.
Lombardi, Alberto
López Sommaschini, Antonio
Loudet, Osvaldo
Loyarte, Ramón G.
Lugones, Arturo M.
Llauró, José
Mac Donagh, E. J.
Magnin, Félix J.
Magnin, Jorge
Mainini, Carlos
Malloi, Emilio
Mamberto, Benito
Marcó del Pont, E.
Marchionatto, Juan B.
Martignone, Eduardo
Marotta, F. Pedro
Marotta, R. Armando
Mata, Leopoldo
Méndez, Julio
Meoli, Gabriel
Meoli, Humberto
Mercau, Agustín
Meriggi, Juan C.
Mermoz, Francisco A.
Molfino, José F.
Molina Carranza, L.
Molle, Clotilde C.
Montes, Vicente E.
Moragues Bernat, Jaime
Moreno, Evaristo V.
Nágera, Juan José
Natale, Alfredo
Natale, Ernesto
Negrete, Lucia
Negri, Mario L.
Nielsen, Juan
Novelli, Armando
Ogloblin, Alejandro
Oliveri, Alfredo E.
Ortiz, Aníbal A.
Ortiz de Rosas, Jorge
Otamendi, Gustavo
Ottonello, Héctor
Ottonello, Néstor J.
Páez, José María
Page, Franklin Nelson
Paitoví, y Oliveras, A.
Parodi, Edmundo
Parodi, Lorenzo R.
Parodi, Rodolfo
Pasman, Rodolfo E.
Pastore, Franco
Paz Anchorena, José M.
Pérez Hernández, A.
Perrone, Cayetano
Pestalardo, Agustín
Pini, Aldo S.
Platz, Hubert
Podestá, Juan Carlos
Posadas, Carlos
Quinos, José Luis
Quinterno, Bruno F.
Quiroga, Pedro R.
Raimondi, Alejandro
Raffo, Bartolomé M.
Ramaccioni, Danilo
Ramallo, Carlos M.
Ratto, Héctor R.
Rebuelto, Antonio
Rebuelto, Emilio
Reece, William Asher
Repetto, Blas Angel
Repossini, José
Ringuelet, Emilio J.

Rissotto, Atilio A.
Robles, Angel A.
Rodriguez Aravena, S.
Rodriguez, Germinal
Rodriguez, Miguel
Roffo, Angel H.
Roffo, Juan
Roldán, Raimundo
Romero Brest, Enrique
Rokotnitz, Otto
Rossell Soler, Pedro
Ruata, Luis E.
Ruiz Moreno, Isidoro
Ruiz Moreno, Adrián
Rumi, Tomás J.
Sabaria, Enrique
Salomón, Hugo
Sánchez, José Ricardo
Sánchez, Gregorio L.
Sánchez Diaz, Abel
Sánchez Sorondo, M. G.
Sanroman, Iberio
Santángelo, Rodolfo
Sarhy, Juan F.
Sarrabayrouse, Eugenio
Savon, Marcos A.
Schnack, Benno J.
Schulz, Guillermo
Selva, Domingo
Selzer, Samuel
Sesma,, Angel
Sheahan, Juan F.
Silva, Leónidas L.
Simonoff, Miguel
Simons, Hellmut
Siri, Luis
Sobral, Arturo
Solari, Emilio F.
Solari, Miguel A.
Sordelli, Alfredo
Soler, Frank L.
Spinetto, David J.
Spota, Víctor J.
Storni, Segundo R.
Talana, Alberto F.
Talana, Jorge
Tarragona, José
Tello, Eugenio
Torre Bertucci, Pedro
Torello, Pablo
Tossini, Luis
Trelles, Rogelio A.
Trucco, Sixto E.
Valeiras, Antonio
Valentini, Argentino
Valentinuzzi, Máximo
Vallebella, Colón B.
Vanossi, Reinaldo
Varela Gil, José
Vecchi, Arístides de
Vela Huergo, Julio
Verdaguer, Juan
Veyga, Francisco de
Vidal, Eduardo
Vignati, Milciades A.
Vignaux, Juan C.
Vinardell, Alberto
Volpatti, Eduardo
Walner, Jacobo
Wunenburger, Gastón
Wauters, Carlos
Wernicke, Raúl
White, Guillermo J.
Williams, Adolfo T.
Yepes, José
Zamboni, Agustin
Zappi, Enrique V.
Zavalla, Carlos M.
Zuloaga, Angel M.

SOCIOS ADHERENTES

Bazzanella, José
Cotlar, Mischa
Devoto, Carlos Alberto
Ebin, José
Elizondo, Francisco M.
Ferramola, Raúl
Folcini, Martín L. G.
García, Eduardo D.
Goyena, Ricardo J.
Gorchs, Agustín C.
Laclau, Juan Pedro
Magne de la Croix, P. A.
Mailhos, Luis E.
Milesi, Emilio Angel
Quevedo Capdevila, Eduardo A.
Recoder, Roberto F.
Repetto, Cayetano
Rusconi, Carlos
Sadosky, Manuel
Somonte, Eduardo
Wechsler, Wolf

CASAS ADHERENTES

Angel Estrada y Cía.
Benvenuto y Cía.
Lutz, Ferrando y Cía.
Hijos de Atilio Massone
Otto Hess, S. A.
T. Gr. "Tomás Palumbo"
Jacobo Peuser, S. A. Ltda.

SOCIO VITALICIO

Huergo, Eduardo María

MIEMBROS PROTECTORES DE LA ORGANIZACION DIDACTICA DE BUENOS AIRES

Anchorena, Juan E.
Besio Moreno, Nicolás
Tornquist, E. y Cía. (Lda.)

SECCION CORDOBA

COMISION DIRECTIVA

Presidente, Dr. Juan Olsacher; Vice-presidente, Dr. Miguel Fernández; Vice-presidente, Ing. Daniel A. García; Secretario de actas, Dr. Guillermo V. Stuckert; Secretario de correspondencia, Prof. Tulio Mácola; Tesorero, Sr. Bernardo Pilotto; Pro-tesorero, Dr. Carlos C. Hosseus; Vocales: Ing. Clodoveo Pascualini; Ing. Jorge E. Bobone; Ing. Luis Chechi; Ing. Ambrosio L. Taravella; Dr. Federico Padula; Dr. José Carlomagno; Dr. Meade L. Zimmer; Sr. Enrique Sparn.

SOCIOS ACTIVOS

Aguiar, Henoch D.
Bobone, Jorge E.
Brandan, Ramón A.
Broglia, Alberto A.
Buteler, Jesús E.
Camilloni, Carlos
Carlomagno, José
Chaudet, Enrique
Checchi, Luis
Deheza, Eduardo
Esteban, Fernando
Fernández, Miguel
Fontana, Lorenzo F.
García, Daniel
Godoy, Salvador A.
Gordillo, Pedro N.
Hosseus, Carlos Curt
Larrauri, Agustín C.
Mácola, Berardo A.
Mácola, Tulio
Mirizzi, Pablo Luis
Ninci, Raúl T.
Olaf Lützow, Holm
Olsacher, Juan
Padula, Federico
Pasqualini, Clodoveo
Peláez J. Gambastiani de

Pilotto, Bernardo
Ponce Laforgue, Carlos
Rothlin, Edwin
Schmiedecke, Augusto
Sparn, Enrique
Stuckert, Guillermo V.
Taravella, Ambrosio L.
Trebino, Natalio
Urciolo, Victorio
Vercello, Carlos
Yadarola, Mauricio L.
Zimmer, Mesde L.

SECCION SANTA FE

COMISION DIRECTIVA

Presidente, Dr. José Piazza; Vice-presidente, Ingº Civil Francisco E. Urondo; Secretario de correspondencia, Ingº Quím. Rodolfo G. Christen; Secretario de actas, Ingº Quím. Carlos C. Christen; Tesorero, Ingº Quím. Guillermo Berráz; Vocal 1º, Ingº Civil José Babini; Vocal 2º, Prof. Rolando Hereñú; Vocales suplentes, Ingº Agrº Bruno Santini y Prof. Julio Salaber; Encargado de Publicaciones, Ingº Civil José Babini; Encargado de Canje, Ingº Quím. Rodolfo Rouzaut.

SOCIOS ACTIVOS

Anadón, Leónidas
Ariotti, Juan Carlos
Babini, José
Berraz, Guillermo
Bertuzzi, Francisco A.
Bossi, Celestino
Cerana, Miguel
Claus, Guillermo
Cohan, Marcos
Courault, Pablo
Crouzeilles, A. L. de
Cruellas, José
Christen, Carlos
Christen, Rodolfo G.
Damianovich, Horacio
Falco, Federico
Fester, Gustavo A.
Frenguelli, Joaquín
Gollán, Josué (h.)
Hereñú, Rolando
Hotschewer, Curto
Julià, Tolrá Antonio
Kleer, Gregorio
Lachaga, Dámaso A.
Mai, Carlos
Mántaras, Fernando
Marelli, Hipólito
Martino, Antonio E.
Montpellier, Luis Marcos
Mounier, Celestino
Muzzio, Enrique
Nigro, Angel
Niklison, Carlos A.
Oliva, José
Peresutti, Luis
Piazza, José
Piñero, Rodolfo
Pozzo, Hiram J.
Ragonese, Arturo E.
Reinares, Sergio
Rouzaut, Rodolfo
Salaber, Julio
Salgado, José
Santini, Bruno L. P.
Schivazappa, Mario
Simonutti, Atilio A.
Tissembaum, Mariano
Urondo, Francisco E.
Virasoro, Enrique

SECCION MENDOZA

COMISION DIRECTIVA

Presidente, Dr. Eduardo Carette; Vice-presidente, Ingº Cayetano C. Piccione; Secretario, Sr. Adrián Ruiz Leal; Tesorero, Sr. Manuel Tellechea; Bibliotecario, Prof. Aníbal Ruíz; Vocales: Dr. Juan B. Lara; Ingº Juan P. Toso; Ingº Angel Stura; Sr. Ranulfo Rosales; Dr. Juan P. Paganotto; Dr. Mario Bidone.

SOCIOS ACTIVOS

Ahumada, Ciro
Anzorena, Jacinto
Ayala Castagnino, G.
Basso, Germinal
Benegas, Raúl
Bidone, Mario
Borsani, Carlos Pablo
Burgoa, Pedro A.
Carette, Eduardo
Castillo, José
Croce, Francisco M.
Espinosa, Norberto A.
Flor Alvarado, José M.
Galeano, Edgardo
García, José Federico
Godoy Vergelin, G.
Gomensoro, José N.
Guevara, José R.
Jofré, Alberto L.
Lara, Juan B.
Lucero, Braulio G.
Lugones, Manuel G.
Magistretti, Guillermo
Maveroff, Aquiles
Mayorga, Santiago C.
Navarro Correas, José A.
Paganotto, Juan P.
Piccione, Cayetano C.
Ponce, José Raúl
Pontis, Rafael E.
Richard, Alfonso E.
Rosales, Ranulfo S.
Ruiz, Aníbal
Ruíz Leal, Adrián
Sáez Medina, Miguel
San Martín, José Benito de
Serra, Luis Angel
Silvestre, Tomás
Stura, Angel C.
Tellechea, Manuel
Tolosa, Julio (h)
Toso, Juan F.

SECCION LA PLATA

COMISION DIRECTIVA

Presidente, Dr. Carlos A. Sagastume; Secretaria, Dra. Juana Cortelezzi; Tesorero, Dr. Carlos T. Teobaldo; Vocales: Ingº Juan Sabato, Ingº Manuel Ucha, Dr. Pedro G. Paternosto, Dr. Alberto E. Sagastume Berra.

SOCIOS ACTIVOS

Alsina Fuertes, Fidel
Amarante, Pedro C.
Angil, Jerónimo
Arroyo Basaldúa, Victor M.
Basualdo, Washington S.
Bauer, Conrado
Bonet, Luis A.
Brau, Eduardo F.
Canals Frau, Salvador
Carusi, Oreste
Coria, Pedro E.
Cortelezzi, Juana
Crespi Gherzi, Rodolfo A.
Christmann, Federico E
Daló, Héctor R.
Delprato, Ismael
Ferrari, Obdulio J. F.
Gascón, Jorge
Gershánik, Simón
Giovambattista, Humberto
Grisi, Adolfo P.
Inda, Carmen
Lizarán, Fernando
Lockart, Carlos E.
Loedel Palumbo, Enrique
Mc Loughlin, Rogelio P.
Magliano, Hilario
Marmonti, Angel
Massimino, Blas
Méndez, José D.
Micheletti, Luis A.
Nico, Raúl
Oliva, Virgilio
Paternosto, Pedro G.
Pera, Tomás Carlos
Platzceck, Ricardo P.
Rodriguez, Marcelo R. N.
Sabato, Juan
Sáez, Francisco A.
Sagastume Berra, A. E.
Sagastume, Carlos A.
Scheggia, Eduardo R.
Teobaldo, Carlos
Toranzos, Fausto L.
Trejo, César A.
Ucha Udabe, Manuel
Vucetich, Danilo C.
Wilkens, Alejandro

SOCIOS CORRESPONDIENTES

Aguilar y Santillán, R.	México
Alvarez, Antenor	Sgo. del Estero
Amaral, Afranio de	San Pablo (Br.)
Avendaño, Leónidas	Lima
Bachmann, Carlos J.	Lima
Bodenbender, Guillermo	Córdoba
Bolivar, Ignacio	Madrid
Bonarelli, Guido	Gubbio (It.)
Borel, Emile	Paris
Bragg, William Henry	Londres
Bruch, Carlos	Olivos (B. A.)
Cabrera, Blás	Madrid
Campos Porto, Pablo	Rio de Janeiro
Carabajal, Melitón M.	Lima
Darmois, Eugenio	Nancy (Fr.)
Darmois, Georges	Paris
Dávila, Rubén	Santiago (Ch.)
Escomel Edmundo	Arequipa (P.)
Flebrig, Carlos	Munich (Al.)
Fontecilla Larrain, Arturo	Santiago (Ch.)
Fort, Michel	Lima
González del Riego, Felipe	Lima
Greve, Germán	Santiago (Ch.)
Guinter, Philibert	Nancy (Fr.)
Hadamard, Jacques	Paris
Hauman, Luciano	Bruselas
Hernández, Juvenal	Santiago (Ch.)
Hijar y Haro, Luis	México
Janet, Pierre	Paris
Jiménez de Asúa, Luis	Madrid
Keiper, Guillermo	Berlin
Lahille, Fernando	Tarn (Fr.)
Langevin, Paul	Paris
Levi Civita, Tulio	Roma
Lobo, Bruno	Rio de Janeiro
Mardones, Francisco	Santiago (Ch.)
Molina, Enrique	Concepc. (Ch.)
Monjaráz, Jesús E.	México
Moretti, Gaetano	Milán
Oliver Schneider, Carlos	Santiago (Ch.)
Pereira d'Andrade, Lencastre	Nova Goa (I. P.)
Perrin, Tomás G.	México
Perrine, Carlos D.	Córdoba
Pi y Suñer, Augusto	Barcelona
Porter, Carlos E.	Santiago (Ch.)
Reyes Cox, Eduardo	Santiago (Ch.)
Rowe, Leo S.	New York
Tello, Julio C.	Lima
Valle, Rafael H.	México
Vélez, Daniel M.	México
Villarán, Manuel V.	Lima
Vitoria, Eduardo	Barcelona
Volterra, Vito	Roma



Date Due


analesdelasocied1271soci


ST006542